УДК 657.631. 6(470)

ОЦЕНКА РИСКОВ РЕЙТИНГОВЫХ РЕШЕНИЙ

Е. И. Аристов, О. С. Воищева, В. И. Тинякова

Обсуждается проблема измерения уровня риска в случае, когда бизнес-решение принимается на основе результатов рейтингового оценивания. Предлагается эконометрический подход к ее решению. Данный подход предусматривает построение моделей дискретного выбора и оценку на их основе энтропийного уровня неопределенности, принимаемого за риск. В рамках предлагаемого подхода удается провести предельный анализ факторов, результаты которого служат для менеджера своеобразным ориентиром при разработке стратегии управления риском.

Риски в рейтинговом оценивании [2], как правило, не рассчитываются. Причин много, но основная, по нашему мнению, в трудности их идентификации и отсутствии интерпретируемых измерителей уровня риска тех ситуаций, в которых решение принимается на основе рейтингов.

Имеет право на существование и другая точка зрения, в соответствии с которой рейтинговые оценки формируются с учетом рисков и, поэтому нет смысла поднимать вопрос о том, что уже один раз учтено. Абсолютизация надежности рейтинговых оценок скорее заблуждение, чем достаточно обоснованный факт. Ошибки, порождающие риск, могут быть допущены как при формировании рейтинговой шкалы, так и в процессе присвоения рейтинга соответствующему субъекту. Несмотря на отсутствие единой точки зрения, ниже излагается один из возможных подходов к исследованию проблемы рисков в рейтинговом оценивании.

Смысл предлагаемого подхода в выявлении факторов, порождающих риск-ситуации, и оценка их воздействия на риск и его уровень, когда решение связано с выбором наиболее приемлемой альтернативы. Это сложная задача, предусматривающая построение специальных моделей, обеспечивающих получение адекватного представления о характере и силе факторов порождающих неуверенность в результатах принимаемых рейтинговых решений.

Изложение предлагаемого подхода начнем с рассмотрение упрощенного случая, в котором требуется принять решение по поводу выбора одной из двух альтернатив. Формализацию данной ситуации удобно осуществлять с помощью модели бинарного выбора [1], которая обеспечивает проведение предельного анализ степени воздействия факторов непосредственно на уровень риска. Ситуация бинарного выбора в задачах принятия решений встречается довольно часто и, по сути, является базовым элементом любой схемы управления. Она легко обобщается на случай множественного выбора. Кроме того, будем предполагать, что случаи, связанные с выбором одной из двух альтернатив, повторяются неоднократно, но реальность условий, в которых принимается решение, варьирует от ситуации к ситуации. Сами условия многогранны и могут быть описаны некоторым вектором показателей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Другими словами, имеется возможность сформировать выборочное множество наблюдений, описывающих результаты альтернативного выбора. Как только выборочная совокупность сформирована, появляется реальная возможность построения эконометрической модели.

Как известно, риски принято делить на стартовые и финальные [3]. Сразу заметим, что риск принятого решения (финальный) можно снижать путем проведения различного рода мероприятий, в то время как снижение риска принимаемого решения (стартового) достигается только за счет уточнения вероятностного распределения альтернатив. В свою очередь, вероятности зависят от условий, в которых принимается решение и, возможно, от условий, в которых принятое решение будет реализовываться. Сам механизм этой зависимости описывается следующим образом.

Пусть

u_1 — полезность, получаемая при выборе 1-й альтернативы;

u_2 — полезность, получаемая при выборе 2-й альтернативы.

Каждая из полезностей зависит от факторов, описывающих условия выбора, линейно, т.е.

$$\mathrm{u}_1 = \mathbf{x}\mathbf{d}_1,\ \mathrm{u}_2 = \mathbf{x}\mathbf{d}_2. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x} = (1,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_m)$ — расширенная вектор-строка, как это принято в эконометрике, а

$\mathbf{d}_k = (d_{k0},\ d_{k1}, \ldots, d_{km})'$ — вектор-столбец параметров k-й функции полезности.

К сожалению, в определении полезности преобладает субъективный фактор, и она, как правило, является ненаблюдаемой величиной, что исключает возможность применения эконометрических методов для оценки коэффициентов этих линейных функций. В то же время, несмотря на отсутствие формализованного представления, в каждом конкретном случае в соответствии с этими гипотетическими функциями полезности был сделан выбор наиболее предпочтительной альтернативы. Предполагая, что выбор осуществлялся рационально с ориентацией на получение наибольшей выгоды, можно записать следующее правило:

$$y = \begin{cases} 1, \text{ при } \mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 > 0, \\ 0, \text{ при } \mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если теперь разность полезностей представить как

$$\mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 = \mathbf{xb} + \varepsilon, \quad (3)$$

где ε — случайная ошибка, которая может быть допущена при оценке полезности выбора, то вероятность того, что предпочтение получит первая альтернатива, записывается следующим образом:

$$\mathrm{P}(y=1) = \mathrm{P}(\varepsilon > -\mathbf{xb}) = \mathrm{P}(\varepsilon < \mathbf{xb}) = \mathrm{F}(\mathbf{xb}). \quad (4)$$

Для рассматриваемой задачи ожидаемой полезностью выбора является условное математическое ожидание

$$\mathrm{E}(y|\mathbf{x}) = 1 \cdot \mathrm{F}(\mathbf{xb}) + 0 \cdot (1 - \mathrm{F}(\mathbf{xb}) = \mathrm{F}(\mathbf{xb}), \quad (5)$$

которое можно понимать как нелинейную регрессию y на $\mathbf{x}$, т.е.

$$y = \mathrm{F}(\mathbf{xb}). \quad (6)$$

Между полезностями $\mathrm{u}_1 = \mathbf{xd}_1$, $\mathrm{u}_2 = \mathbf{xd}_2$ и $y = \mathrm{F}(\mathbf{xb})$ есть принципиальное различие. С первыми двумя связан финальный риск, а с ожидаемой полезностью выбора — стартовый. Ниже будет рассмотрен предельный анализ, позволяющий понять механизм факторного снижения стартового риска.

Особо интересным и содержательно интерпретируемым предельный анализ получается, когда случайная величина ε имеет логистическое распределение

$$\mathrm{F}(\mathbf{xb}) = e^{\mathbf{xb}}(1 + e^{\mathbf{xb}})^{-1}. \quad (7)$$

Для построения логит-модели (7) используются статистические наблюдения ситуаций бинарного выбора, т.е. наблюдения, в которых значения зависимой переменной принимают всего два значения 0 и 1, а независимые являются непрерывными или категоризированными переменными. Параметры модели оцениваются с помощью метода максимального правдоподобия. Для выборочного множества наблюдений функция максимального правдоподобия записывается в виде

$$\mathrm{L}(\mathbf{y},\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b})^{y_i}\left[1 - \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b})\right]^{1-y_i}. \quad (8)$$

В данной форме записи множители произведения селектируются с помощью компонент вектора $\mathbf{y}$, принимающих всего два значения: 0 или 1. В произведении сохраняются те сомножители, у которых показатель степени оказался равным 1.

Математически проще максимизировать логарифмическую функцию правдоподобия

$$\ln \mathrm{L} = \sum_{i=1}^{n} [y_i \ln \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) + (1-y_i)\ln(1 - \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}))]. \quad (9)$$

Используя сокращенные записи $\mathrm{F}_i = \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b})$ и $\mathrm{F}_b'(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) = \mathrm{f}_i$, выпишем для логарифмической функции правдоподобия условия максимизации первого порядка

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i\,\mathrm{f}_i}{\mathrm{F}_\mathrm{i}} + (1-y_i)\frac{-\mathrm{f}_i}{(1-\mathrm{F}_\mathrm{i})}\right]\mathbf{x}_i' = 0. \quad (10)$$

В случае логистической функции распределения эта система уравнений хотя и может быть упрощена, но все равно для получения ее решения приходится использовать численные методы.

Адекватность модели бинарного выбора определяется по коэффициенту Макфаддена

$$\mathrm{LRI} = 1 - \frac{\ln \mathrm{L}(\hat{\mathbf{b}})}{\ln \mathrm{L}(\hat{b}_0)}, \quad (11)$$

где $\ln \mathrm{L}(\hat{\mathbf{b}})$ — максимальное значение логарифмической функции правдоподобия, достигаемое в точке, координаты которой равны оценкам параметров модели $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_m)$, а $\ln \mathrm{L}(\hat{b}_0)$ — значение логарифмической функции правдоподобия, вычисленное в предположении, что $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Для этих же целей, и это важно в рассматриваемом здесь случае, можно использовать энтропийный коэффициент предсказывающих возможностей построенной модели. Этот коэффициент имеет следующий вид:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{n}\left[-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b})\log_2 \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n}(1 - \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}))\log_2(1 - \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}))\right]. \quad (12)$$

Для случая, когда расчетные значения модели в точности совпадают с фактическими значениями дихотомической переменной, значение коэффициента (12) равно нулю, т.е. во всех случаях модель обеспечивает безошибочный выбор, не оставляя место для сомнений в пользу альтернативы. Максимальный уровень энтропии ($\mathrm{H}=1$) получается в случае, когда для всех рассмотренных ситуаций $\hat{y}_i = \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\hat{\mathbf{b}}) = 0,5$. Во всех остальных случаях $0 < \mathrm{H} < 1$. Величина коэффициента показывает средний уровень неопределенности, который будет иметь место в каждом случае бинарного выбора, если этот бинарный выбор осуществлять с помощью построенной модели. Коэффициент (12) вполне естественно принять за величину риска.

Применение построенной логит-модели в риск-анализе факторов основано на частных производных ожидаемой функции полезности, которые с учетом того, что $\mathrm{F}(\mathbf{xb})$ — логистическая функция, могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \mathrm{E}(y_i|\mathbf{x}_i)}{\partial x_k} = \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b})(1-\mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}))b_k. \qquad (13)$$

Полученное выражение называется предельной полезностью фактора и интерпретируется как величина, на которую изменяется функция полезности при изменении фактора на единицу в ситуации, описываемой i -м наблюдением. Интерпретация практически не отличается от той, которой пользуются в классическом регрессионном анализе, однако механизм формирования предельной величины не так прост, как в линейной модели, и представляет собой взаимодействие двух составляющих, каждая из которых вносит свой специфический вклад в предельный эффект и требует особого рассмотрения. Более того, формула (13) представляет собой известное логистическое выражение, которое при определенных условиях порождает хаос, и, следовательно, можно предположить, что есть ситуации, в которых результат воздействия фактора на вероятность выбора не предсказуем.

Так как для случая бинарного выбора

$$\sigma^2 = \mathrm{F}(\mathbf{xb})(\mathbf{1}-\mathrm{F}(\mathbf{xb})), \qquad (14)$$

то предельный эффект пропорционален квадрату риска. Таким образом, чем выше риск, тем выше степень воздействия фактора на ожидаемую полезность и, следовательно, за счет изменения фактора в данной ситуации ощутимей происходит перераспределение вероятностей между альтернативами выбора.

Из (14) легко сделать вывод, что если у фактора положительная предельная полезность, то для снижения риска в ситуации, когда $\mathrm{F}(\mathbf{xb}) > 0,5$ его нужно увеличивать, а в ситуации $\mathrm{F}(\mathbf{xb}) < 0,5$ — уменьшать. На основе результатов предлагаемого анализа можно делать выводы практического характера, помня при этом, что они имеют смысл при весьма незначительных изменениях факторов.

Если продифференцировать (14) по k -му фактору, то получим предельную величину воздействия фактора на риск

$$\frac{d\sigma^2}{dx_k} = \sigma^2(1-2\mathrm{F}(\mathbf{xb}))b_k, \qquad (15)$$

которая показывает, что при $b_k > 0$ и $\mathrm{F}(\mathbf{xb}) < 0,5$ увеличение фактора способствует росту риска, а при $b_k > 0$ и $\mathrm{F}(\mathbf{xb}) > 0,5$ — снижению риска, если все остальные факторы зафиксированы.

Вместе со снижением риска уменьшается и уровень энтропии

$$\mathrm{H} = -\mathrm{F}\log_2\mathrm{F} - (1-\mathrm{F})\log_2(1-\mathrm{F}), \qquad (16)$$

что свидетельствует о снижении неопределенности ситуации, в которой делается выбор. Энтропия, по сути, является моделью, адекватно отражающей уровень неопределенности той ситуации, в которой принимается решение.

Обычно связь между риском и неопределенностью понимается на интуитивном уровне. Здесь же эта зависимость подтверждается на формальном уровне. Максимальному уровню энтропии отвечает максимальный риск. Соответственно, минимальному уровню энтропии — минимальный риск.

Кроме того, анализ факторных возможностей снижения риска удобно проводить с помощью коэффициента абсолютного уклонения от риска, который для построенной функции полезности имеет вид

$$K_A = -\frac{\partial^2 \mathrm{E}(y_i\,|\,\mathbf{x}_i)/\partial x_{ik}^2}{\partial \mathrm{E}(y_i\,|\,\mathbf{x}_i)/\partial x_{ik}} = 2\mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) - 1. \qquad (17)$$

Интерпретация этого коэффициента позволяет сделать вывод, что для снижения риска за счет изменения k -го фактора действовать нужно избирательно. Если $\mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) < 0,5$, то прирост фактора только усилит ситуацию, в которой следует уклоняться от риска, а в случае $\mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) > 0,5$ ситуация становится противоположной.

Предельный эффект

$$\delta_{ij} = \mathrm{P}_{ij}[b_{lj} - \overline{b}_{il}], \qquad (18)$$

является отправным моментом для исследования стартового риска. Обычно интерес вызывает анализ конкретной ситуации. Пусть это ситуация с номером i . Тогда неопределенность выбора в i -й ситуации можно определить с помощью выражения

$$\mathrm{H}_i = -\sum_{j=0}^{J}\mathrm{P}_{ij}\log_2\mathrm{P}_{ij}. \qquad (19)$$

Если вероятность изменяется на величину предельного эффекта δ_{ij}, то естественно изменяется и величина энтропийного показателя

$$\mathrm{H}_i + \Delta \mathrm{H}_i = -\sum_{j=0}^{J} (\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}) \log_2 (\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}). \quad (20)$$

При $\Delta \mathrm{H}_i < 0$, увеличение соответствующего атрибута снижает уровень неопределенности множественного выбора в i-й ситуации на величину $\Delta \mathrm{H}_i$. Если неравенство в противоположную сторону, то тоже самое изменение атрибута увеличивает уровень неопределенности.

Величину $\Delta \mathrm{H}_i$ будем называть предельным информационным эффектом, имея в виду с одной стороны содержательный смысл этой величины, а с другой — механизм ее определения через предельный эффект атрибута. Понять в каких ситуациях следует ожидать отрицательное значение предельного информационного эффекта, а в каких положительное — весьма сложно. Гораздо проще вычислить $\Delta \mathrm{H}_i$ как разность между значениями, определяемыми в соответствии с (19) и (20). И все же рассмотрим механизм формирования величины предельного информационного эффекта

$$\Delta \mathrm{H}_i = -\sum_{j=0}^{J} (\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}) \log_2 (\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}) + \sum_{j=0}^{J} \mathrm{P}_{ij} \log_2 \mathrm{P}_{ij} =$$
$$= -\sum_{j=0}^{J} (\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}) \log_2 \left(\mathrm{P}_{ij} \frac{\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}}{\mathrm{P}_{ij}} \right) + \sum_{j=0}^{J} \mathrm{P}_{ij} \log_2 \mathrm{P}_{ij} =$$
$$= -\sum_{j=0}^{J} \mathrm{P}_{ij} \log_2 \mathrm{P}_{ij} - \sum_{j=0}^{J} \delta_{ij} \log_2 \mathrm{P}_{ij} - \quad (21)$$
$$-\sum_{j=0}^{j} (\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}) \log_2 \left(\frac{\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}}{\mathrm{P}_{ij}} \right) + \sum_{j=0}^{J} \mathrm{P}_{ij} \log_2 \mathrm{P}_{ij} =$$
$$= -\sum_{j=0}^{J} \delta_{ij} \log_2 \mathrm{P}_{ij} - \sum_{j=0}^{j} (\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}) \log_2 \left(\frac{\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}}{\mathrm{P}_{ij}} \right).$$

Полученная величина должна быть отрицательной, чтобы увеличение соответствующего атрибута снизило неопределенность ситуации множественного выбора. Знак полученного выражения зависит от δ_{ij}. Причем одновременно для всех j предельный эффект δ_{ij} не может иметь один и тот же знак, так как в его составе сомножитель равный отклонению $b_{lj} - \overline{b}_l$.

Для каждой i-й ситуации множественного выбора можно записать

$$\Delta \mathrm{H}_i = -\sum_{j \in J^-} \delta_{ij} \log_2 \mathrm{P}_{ij} - \sum_{j \in J^+} (\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}) \log_2 \left(\frac{\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}}{\mathrm{P}_{ij}} \right) -$$
$$-\sum_{j \in J^+} \delta_{ij} \log_2 \mathrm{P}_{ij} - \sum_{j \in J^-} (\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}) \log_2 \left(\frac{\mathrm{P}_{ij} + \delta_{ij}}{\mathrm{P}_{ij}} \right), \quad (22)$$

где J^- (J^+) — множество тех вариантов, для которых $b_{lj} - \overline{b}_l$ имеет отрицательный (положительный) знак. Следовательно, знак $\Delta \mathrm{H}_i$ определяется знаком верхних слагаемых, если они по величине превосходят нижние и наоборот, если не превосходят. Значения этих сумм отличаются для разных i, а это значит, что в одних ситуациях предельный эффект будет направлен на снижение неопределенности, а в других — на повышение.

В моделях множественного выбора энтропийный анализ играет важную роль, так как лицу, принимающему решение, необходимо оценить уровень неопределенности смоделированной ситуации и определить возможные варианты ее снижения. В нашем случае среднюю величину энтропийного коэффициента мы будем понимать как риск шкалы, на основе которой субъектам присваиваются рейтинги. Для каждого конкретного решения также рассчитывается энтропийный коэффициент, который является характеристикой индивидуального риска.

Чем ниже величина энтропийного коэффициента, тем выше информационная надежность решения. К сожалению, информационная надежность не имеет прямой связи с возможными материальными потерями. Это, конечно, ограничивает практическое использования энтропийной меры риска.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Давнис В.В., Тинякова В.И.* Прогнозные модели экспертных предпочтений: монография. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005. — 248 с.

2. *Карминский А.М., Пересецкий А.А., Петров А.Е.* Рейтинги в экономике: методология и практика / Под ред. А. М. Карминского. — М.: Финансы и статистика, 2005. — 240 с.

3. *Секерин А.Б., Мамошина Т.М.* Анализ и оценка риска. Курс лекций. — М.: ИИЦ МГУДТ, 2003. — 160 с.

Принято в печать 21 декабря 2006 г.