УДК 336.767 (075)

РАВНОВЕСНЫЕ ПОРТФЕЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ

В. В. Давнис, Е. А. Хлебникова

Воронежский государственный университет

Предлагается методика построения портфелей ценных бумаг со структурой оптимальной относительно равновесных значений средней доходности. Проведено сравнение портфелей, построенных в соответствии с классической схемой и предлагаемой методикой. Результаты вычислительного эксперимента показали преимущество этой методики.

Известно, что идеи оптимальных портфельных решений широко используются при разработке инвестиционных стратегий [2]. Инвесторы хорошо усвоили основные принципы этих решений. Портфельные технологии стали эффективным инструментом снижения инвестиционных рисков. Стратегия приемлемого риска стала доминирующей при реализации многих инвестиционных проектов. Однако попытки практического использования оптимальных соотношений, как правило, не приводят к успеху. Поэтому ситуация с портфельной теорией явно противоречива. Ее применение на качественном уровне дает позитивный результат, а количественный аспект выглядит значительно хуже. Суть противоречия очевидна. В отличие от рекомендаций общего плана, количественные оценки строго привязаны к определенному моменту времени и их можно переносить на перспективный период только в том случае, если в динамике рынка не предвидятся заметные изменения. К сожалению, эти изменения чаще происходят, чем не происходят и оптимальность по сути лишь мгновенное свойство портфеля, для поддержания которого в следующий момент времени необходимы соответствующие изменения его структуры.

Ниже развивается идея построения портфелей со структурой, которая является оптимальной по отношению не к текущим средним значениям доходности ценных бумаг, как это принято в классической модели, а к их равновесным значениям. Равновесные значения являются обобщенной характеристикой перспективного периода. Реальность будущего сконцентрирована в равновесных значениях гораздо в большей степени, чем в текущих средних. Данное свойство позволяет надеяться, что портфель, построенный на их основе, должен и в перспективном периоде сохранять свои оптимальные свойства.

Возможность оценки равновесных значений здесь является определяющим условием, от которого зависит целесообразность практического использования данного подхода. Аппаратом для получения таких оценок служат эконометрические модели авторегрессионного типа [1]. Для понимания всей схемы расчетов изложение начнем с описания эконометрического подхода к построению оптимального портфеля.

Пусть инвестор составляет портфель из *n* активов и требуется определить такую структуру портфеля, которая при заданном уровне доходности обеспечит минимальный риск инвестору.

Введем обозначения:

$\mathbf{r} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$ — вектор доходностей активов за рассматриваемый промежуток времени;

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ — вектор, определяющий структуру портфеля, где *i*-я компонента w_i есть доля средств, вложенная в *i*-й актив.

Для компонент вектора **w** выполняется условие

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1,$$

i — вектор из единиц.

З а м е ч а н и е. Компоненты вектора **w** могут быть отрицательными в том случае, когда разрешена «короткая продажа» (short sales).

Доходность портфеля за один период является случайной величиной и равна

$$R = \mathbf{w}'\mathbf{r} \qquad (1)$$

с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2

$$\mu = \mathrm{E}(R) = \mathbf{w}'\mathbf{m} \text{ и } \sigma^2 = \mathrm{V}(R) = \mathbf{w}'\mathbf{У}\mathbf{w},$$

где **m** — математическое ожидание вектора **r**, **У** — ковариационная матрица вектора **r**, т.е. $\mathbf{m} = \mathrm{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{У} = \mathrm{V}(\mathbf{r})$.

Задача построения оптимального портфеля, минимизирующего риск при заданной доходности μ, записывается следующим образом:

$$\mathbf{w}'\mathbf{У}\mathbf{w} \to \min, \qquad (2)$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{m} = \mu, \qquad (3)$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1. \quad (4)$$

Для получения оптимального решения строится функция Лагранжа

$$\mathrm{L}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'\mathbf{У}\mathbf{w} - 2\lambda(\mathbf{w}'\mathbf{m} - \mu) - 2\delta(\mathbf{w}'\mathbf{i} - 1), \quad (5)$$

оптимизация которой по **w,** λ и δ позволяет получить решение в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{У}^{-1}(\lambda\mathbf{m} + \delta\mathbf{i}). \quad (6)$$

Значения множителей Лагранжа определяются из двух последних уравнений системы, получаемой как результат дифференцирования функции Лагранжа (5)

$$\lambda = \frac{C\mu - B}{AC - B^2}, \; \delta = \frac{A - B\mu}{AC - B^2}, \quad (7)$$

где

$$A = \mathbf{m}'\mathbf{У}^{-1}\mathbf{m}, \; B = \mathbf{m}'\mathbf{У}^{-1}\mathbf{i}, \; C = \mathbf{i}'\mathbf{У}^{-1}\mathbf{i}.$$

Подставляя (7) в (6), получаем уравнение для расчета структуры оптимального портфеля с заданной доходностью μ

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{У}^{-1}\left(\frac{C\mu - B}{AC - B^2}\mathbf{m} + \frac{A - B\mu}{AC - B^2}\mathbf{i}\right). \quad (8)$$

Таким образом, структура оптимального портфеля определяется ковариационной матрицей и вектором средних доходностей, которые были получены на основе исторических данных. Естественное предположение, лежащее в основе построения портфеля, состоит в том, что за прогнозную оценку доходности перспективного периода принимается текущее среднее. Это чрезмерно груба оценка. Обычно среднее принимается за прогноз в тех случаях, когда кроме тривиальной нет никакой информации о динамике интересующего нас показателя. Надежность такой прогнозной оценки гарантируется только в тех случаях, когда в течение всего интересующего нас периода средняя доходность остается практически неизменной. К сожалению, реальность фондового рынка не дает таких гарантий. Поэтому при построении портфеля не целесообразно ориентироваться на среднюю величину.

Реализуя наш замысел по замене в (8) вектора средних $\mathbf{m}$ на вектор равновесных доходностей, $\dot{\mathbf{m}}$ рассмотрим модель, описывающую процесс торгов на фондовом рынке. Для этого введем обозначения:

m_{jt} — текущая средняя доходность *j*-го актива, включаемого в портфель;

$\dot{m}_j$ — равновесное значение средней доходности *j*-го актива;

Y_t — объем торгов в текущий момент времени.

Используя введенные обозначения, запишем модель торгов на фондовом рынке в следующем виде

$$Y_t^d = b_0^d + b_1^d m_{jt}, \quad (9)$$

$$Y_t^s = b_0^s + b_1^s m_{jt-1}, \quad (10)$$

$$Y_t^d = Y_t^s. \quad (11)$$

Первое уравнение характеризует процесс покупки финансовых активов. Чем выше средняя доходность актива, тем интенсивней этот актив покупается. Второе уравнение характеризует процесс продажи активов. Чем ниже доходность актива, тем интенсивнее он распродается. Последнее равенство устанавливает естественный баланс между объемами покупок и продаж.

Записанные соотношения напоминает паутинообразную модель, с помощью которой описывается процесс достижения равновесной цены на рынке. Основное отличие в том, что в модели (9)—(11) в соответствии с ее смысловой интерпретацией коэффициенты имеют знаки противоположные знакам соответствующих коэффициентов паутинообразной модели. Другими словами, закономерность спроса на акции, в зависимости от их доходности, в линейном случае противоположна закономерности спроса на товар, в зависимости от его цены. Но, не смотря на это, механизм достижения равновесной доходности описывается той же самой паутинообразной кривой.

Весь анализ, связанный с выяснением существования равновесной доходности и ее оценкой, основан на конечно разносном уравнении

$$m_{jt} = b_0 + b_1 m_{jt-1}, \quad (12)$$

которое получается, если в соответствии с (11) приравнять между собой выражения (9) и (10). Равновесное значение определяется из очевидного соотношения

$$\dot{m}_j = b_0 + b_1 \dot{m}_j. \quad (13)$$

При заданных b_0 и b_1 имеем

$$\dot{m}_j = \frac{b_0}{1 - b_1}. \quad (14)$$

Так же, как и в паутинообразной модели, для того, чтобы существовало равновесное значение, требуется выполнение условия $|b_1| < 1$. Особенность модели (9)—(11) только в том, что ее равновесное значение может быть отрицательным, но это находит объяснение.

Чтобы рассчитать равновесную среднюю доходность конкретной ценной бумаги необходимо рассмотреть эконометрический вариант неоднородного конечно-разностного уравнения (12).

$$m_{jt} = b_0 + b_1 m_{jt-1} + \varepsilon_{jt}. \qquad (15)$$

Появление случайной составляющей в этом уравнении свидетельствует о том, что данная зависимость выполняется только в среднем. Зависимости другого типа в данном случае не имеют смысла.

Построенная эконометрическая модель по данным выборочной совокупности дает представление только о той закономерности, которая в среднем доминировала в течении периода, охваченного выборкой. За границами этого периода адекватность модели затухает и полученные с ее помощью оценки равновесного значения теряют надежность, что отражается на надежности портфельного решения. Однако, не смотря на это, портфель, построенный с ориентацией на равновесные значения, должен в большей степени отражать оптимальность пропорций перспективного периода.

В принципе оценки равновесных значений не обязательно использовать при расчете оптимальной структуры портфеля. Являясь предельными, эти оценки отражают такую отдаленную перспективу, состояние которой вряд ли будет формироваться текущими тенденциями и которая не представляет интерес для инвесторов. Поэтому при построении портфеля имеет смысл использовать не сами равновесные значения, а направление, в котором изменяется средняя доходность активов, стремясь достичь своего равновесного состояния. Реализуя эту идею, будем при определении оптимальной структуры портфеля рассматривать среднюю доходность, определяемую соотношением

$$\tilde{\mathbf{m}} = \alpha \mathbf{m}_t + (1-\alpha)\dot{\mathbf{m}} \quad 0 \le \alpha \le 1. \qquad (16)$$

Вектор так определенных средних доходностей $\tilde{\mathbf{m}}$ зависит от величины α. При $\alpha = 1$ портфель будет иметь структуру, для определения которой использовался вектор текущих средних доходностей $\mathbf{m}_t$, при $\alpha = 0$ — структуру, связанную с предельными значениями $\dot{\mathbf{m}}$, в остальных случаях структура портфеля связана со значениями, определяемыми согласно (16). Структура портфеля при таком подходе зависит от параметра α

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{V}^{-1}\left(\frac{C\mu - B}{AC - B^2}(\alpha \mathbf{m}_t + (1-\alpha)\dot{\mathbf{m}}) + \frac{A - B\mu}{AC - B^2}\mathbf{i}\right). \qquad (17)$$

Принципиальное отличие (17) от (8) в том, что расчет оптимальной структуры осуществляется с учетом упреждающей оценки средней доходности, получаемой как взвешенная величина текущей средней и равновесной доходностей. Кроме того, ковариационная матрица, используемая в (17) рассчитывается по отклонениям от взвешенной величины, а не по отклонениям от средней. Получаемые с помощью (17) результаты расчетов в значительной степени зависят от точности упреждающих оценок, которые в свою очередь зависят от того, насколько точно в моделях отражена инвестиционная перспектива. Поэтому, данный подход имеет смысл применять только в тех случаях, когда построенная авторегрессионная модель достаточно точно описывает динамку перспективного периода.

Вычислительный эксперимент по формированию оптимального портфеля с использованием формул (8) и (17) проводился на примере из активов четырех компаний: НорНикель ГМК, РАО ЕЭС, Сбербанк и Газпром. В качестве исходных данных использовались котировки акций этих компаний за период с 10.01.2006 по 22.09.2006. Процедурой вычислительного эксперимента предусматривалось деление всей выборочной совокупности данных на две подвыборки. В первую подвыборку были включены данные за первые пять месяцев, а во вторую — за оставшиеся четыре. Смысл эксперимента в том, что оптимальные структуры портфелей определялись по данным первой подвыборки, а эффективность портфелей сравнивалась по данным второй подвыборки.

Для построения авторегрессионных моделей в проведенных расчетах использовались текущие средние доходности, а не доходности, определяемые по двум соседним котировкам. Переход к текущим средним доходностям обеспечивает возможность построения моделей приемлемого уровня адекватности. В основе такого перехода лежит понимание того, что прогнозировать нужно не случайные величины, а их числовые характеристики. Результаты оценивания моделей, приведенные в табл. 1 подтверждают эту точку зрения.

Используя построенные модели, определим равновесные значения средних доходностей (третий столбец табл. 1) и проведем расчет оптимальной структуры портфелей с ориентацией на средний уровень (формула 8) и равновесный уровень доходностей (формула 17). Расчеты по формуле 17 проводились с $\alpha = 0{,}5$.

Сравнение портфелей позволяет сделать вывод, что портфель 2, структура которого определена в соответствии с (17), обеспечивает средний уровень доходности в ретроспективном периоде равный уровню средней доходности портфеля 1. Риск инвестора сформировавшего портфель 2 практически не отличается от риска инвестора владеющего портфелем 1. Но зато расчеты для перспективного

Таблица 1

Авторегрессионные уравнения и критерии их качества

Компания	Авторегрессионные уравнения	Равновесные значения	Коэффициент детерминации
ОАО ГМК Норильский никель	$y_t^{[1]} = 0,2718 + 0,5724 y_{t-1}^{[1]}$ (0,0397) (0,0459)	0,6356	$R_{[1]}^2 = 0,6333$
ОАО РАО ЕЭС России	$y_t^{[2]} = 3588 + 0,5455 y_{t-1}^{[2]}$ (0,5455) (0,0507)	0,7894	$R_{[2]}^2 = 0,5625$
ОАО Сбербанк	$y_t^{[3]} = -0,0237 + 0,8146 y_{t-1}^{[3]}$ (0,0300) (0,0539)	–0,1278	$R_{[3]}^2 = 0,7172$
ОАО Газпром	$y_t^{[4]} = -0,0186 + 0,8543 y_{t-1}^{[4]}$ (0,0326) (0,0553)	–0,1274	$R_{[4]}^2 = 0,7260$

Таблица 2

Сравнительный анализ эффективности портфелей

Портфель	Характеристики	Компании				Показатели	
		ОАО ГМК Норильский никель	ОАО РАО ЕЭС России	ОАО Сбербанк	ОАО Газпром	Доходность	Риск
Портфель 1	Структура (короткие продажи разрешены)	0,3475	0,1644	0,0145	0,4737		
	Средняя ежедневная доходность за период с 10.01.2006 по 31.05.2006	0,5205	0,3242	0,0686	0,2425	0,35	3,0140
	Доходность за период с 1.06.2006 по 22.09.2006	–0,1704	15,3092	21,1715	–4,3255	0,7144	3,0140
Портфель 2	Структура (короткие продажи разрешены)	0,3194	0,2642	0,0654	0,3510		
	Прогноз средней доходности на период с 1.06.2006 по 22.09.2006	0,6286	0,7669	–0,0574	0,0409	0,35	3,0428
	Доходность за период с 1.06.2006 по 22.09.2006	-0,1704	15,3092	21,1715	–4,3255	3,8567	3,0428

периода, данные которого в расчетах оптимальной структуры портфелей не были учтены, показывают, что доходность второго портфеля более чем в четыре раза превосходит доходность первого портфеля. Это свидетельствует о том, что его структура обладает более высокой устойчивостью к изменениям, которые происходят в динамике доходностей финансовых активов.

В заключении хотелось бы отметить, что абсолютное доверие к существующей реальности, зачастую оборачивается «шоком будущего». Проведенные расчеты удачно это продемонстрировали.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Давнис В.В., Тинякова В.И.* Адаптивные модели: анализ и прогноз в экономических системах : монографии. — Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2006. — 380 с.

2. *Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С.* Математические методы финансового анализа. — М.: Анкил, 2006. — 440 с.

Принято в печать 21декабря 2006 г.