УДК 330.4

КОНЦЕПЦИЯ РИСКА КАК РЕСУРСА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОРТФЕЛЬНЫМ ИНВЕСТИЦИЯМ

А. Б. Секерин

Орловский государственный университет

Рассматривается задача управления риском на основе концепции «Риск как ресурс». Введено понятие ресурсно-подобного проявления риска и охарактеризован механизм такого проявления. Управление риском как ресурсом заключается в достижении его оптимального уровня. Доказана общая теорема, следствием которой является наличие единственного оптимального уровня риска портфеля ценных бумаг.

Как известно, одним из проблемных моментов в теории экономического риска является противоречие «доходность-риск» (“Risk-Return paradox”) [9], состоящее в том, что, с одной стороны, стремление свести риск к минимуму приводит к низким доходам, а с другой стороны — с ростом уровня риска становится более реальной возможность потерь. Существенным шагом в развитии теории риска и, в частности, в вопросе разрешения данного парадокса является концепция риска как ресурса. Автором данной концепции является M. A. Greenfield, сформулировавший ее в 1998 г. [10]. Данная концепция в определенной степени приближает нас к ответу на вопрос о том, какое внутреннее качество риска обеспечивает возможность получения дополнительных выгод в результате принятия рискованных решений. Вместе с тем для применения данной концепции необходима разработка соответствующего аппарата, в том числе количественных методов и моделей.

В работах [3], [4] автором рассмотрен ряд качественных и количественных аспектов концепции риска как ресурса. В частности, был введен аналог производственной функции, в число переменных-ресурсов которой входит уровень риска. В виде гипотез были сформулированы свойства данной функции. Далее было показано, что эти свойства в действительности имеют место в ряде ситуаций принятия решений. Основные выводы, сделанные в работах [3] и [4], состояли в следующем:

а) как ресурсы могут проявлять себя далеко не все, а лишь отдельные виды хозяйственных рисков (ресурсно-подобные риски);

б) специфика риска как ресурса состоит в том, что повышение уровня ресурсно-подобного риска приводит к позитивному эффекту лишь до определенных пределов, которые следует считать оптимальным уровнем риска. Дальнейшее повышение уровня риска приводит к негативным эффектам. Таким образом управление ресурсно-подобным риском заключается не в его снижении или в повышении, а в поддержании на оптимальном уровне.

Целью данной работы является дальнейшее развитие методов, представленных в работах [3] и [4].

В связи с тем, что существенную роль в излагаемых ниже результатах играет понятийный аппарат теории риска, необходимо привести соответствующие базовые определения.

Риском будем называть характеристику ситуации принятия решения в ходе экономической деятельности, связанную с субъективной оценкой ЛПР последствий влияния факторов неопределенности на результаты принимаемого решения с точки зрения благоприятного и неблагоприятного влияния.

Данное определение учитывает возможность позитивной реализации риска, поскольку в нем учитывается возможность благоприятного проявления факторов неопределенности.

Уровнем риска называется оценка возможных последствий рассматриваемого решения, в агрегированном виде отражающая меру реальности наступления как благоприятных, так и неблагоприятных последствий, а также размеры возникающих при этом потерь или выгод.

Автор разделяет точку зрения Р. М. Качалова [2], состоящую в том, что уровень риска является качественным понятием. Количественная оценка уровня риска получается на основе использования той или иной меры риска, под которой мы будем понимать правило выражения уровня риска в некоторой числовой шкале.

В дальнейшем для краткости под уровнем риска мы будем подразумевать также и числовое выражение уровня риска, предполагая при этом наличие и использование определенного правила, т.е. меры риска.

Рассмотрим ситуацию принятия решения в условиях риска. Пусть A – множество рассматриваемых вариантов решений. Предположим, что для каждого решения $a \in A$ его последствия описываются случайной величиной X(a), т.е. имеется правило, дающее количественную характеристику всех возможных последствий рассматриваемых решений. Предположим далее, что существует некоторая мера риска R(a)=R(X(a)), количественно выражающая уровень риска каждого решения. Далее, мы предполагаем, что существует субъективная агрегированная оценка полезности $U(a)=U(X(a))$ каждого решения, отражающая и учитывающая все его возможные последствия.

Сделанные предположения являются стандартными посылками в теории принятия решений в условиях неопределенности. Известная теорема об ожидаемой полезности [1, 5, 8] утверждает, что при выполнении определенных условий-аксиом агрегированная полезность решения равна математическому ожиданию случайной величины u(X(a)). Здесь u(t) — функция полезности, заданная на множестве всех значений случайной величины X(a), т.е. случайная величина $u(X(a))$ описывает набор полезностей каждого из возможных последствий решения a.

Сделаем дополнительное предположение, состоящее в том, что для каждого из вариантов решения $a \in A$ существует детерминированная стоимостная оценка ресурсов $Z(a)$, использование которых необходимо для реализации данного решения.

Таким образом каждый из вариантов решения $a \in A$ характеризуется тремя числовыми параметрами — полезностью $U(a)$, уровнем риска $R(a)$ и стоимостной оценкой необходимых ресурсов $Z(a)$. Заметим, что мы не предполагаем наличия функциональной зависимости между этими величинами. Например, решения $a_1, a_2 \in A$ могут характеризоваться различными значениями полезностей $U(a_1) \neq U(a_2)$, тогда как $R(a_1)=R(a_2)$ и $Z(a_1)=Z(a_2)$, т.е. при одинаковых затратах и уровнях риска последствия решений различны, поскольку эти решения предполагают различные способы использования ресурсов. Аналогично при $R(a_1) \neq R(a_2)$ или $Z(a_1) \neq Z(a_2)$ возможно равенство $U(a_1)=U(a_2)$, т.е. решения, требующие различных затрат и характеризующиеся различными уровнями риска, имеют одинаковую полезность.

Пусть B — множество всех числовых пар $(Z(a), R(a))$ где $a \in A$. Для фиксированной пары $(Z,R) \in B$ положим

$$M(Z,R)=\sup\{U(a) | Z(a)=Z, R(a)=R\},$$

т.е. для заданных объема затрат Z и уровня риска R функция $M(Z,R)$ равна верхней грани полезностей всевозможных решений a, характеризующихся параметрами Z и R. Будем считать, что для любых $(Z,R) \in$ B величина $M(Z,R)$ конечна, т.е. при ограниченном уровне затрат полезность решений не может неограниченно расти.

В этих обозначениях примем следующее определение.

В рассматриваемой ситуации принятия решения риск проявляет себя как ресурс (является ресурсно-подобным), если для некоторых двух пар (Z_1,R_1), $(Z_2,R_2) \in B$ верны соотношения $Z_1 \leq Z_2$, $R_1 > R_2$, $M(Z_1,R_1) > M(Z_2,R_2)$.

Таким образом риск проявляет себя как ресурс, если для некоторого решения существует альтернативное решение с большей полезностью, характеризующееся при этом меньшим (или равным) уровнем затрат, но большим уровнем риска. Смысл данного определения состоит в том, что при снижении затрат ресурсов полезность не уменьшается, а даже возрастает за счет того, что снижение затрат «обычных» ресурсов компенсируется ростом вовлекаемого объема другого ресурса, т.е. риска.

Здесь необходимо отметить, что решение, характеризующееся большим уровнем риска и меньшими затратами возможно, связано с применением новой технологии производства, т.е. другой производственной функции, связывающей объемы вовлекаемых ресурсов с отдачей процесса. Тем не менее по условию данная технология характеризуется большим уровнем риска, отказ от принятия которого эквивалентен отказу от применения этой технологии, т.е. риск проявляет себя как обобщенный ресурс.

Далее, если рост полезности при переходе от одного решения к другому возможен только при одновременном росте затрат и уровня риска или при снижении затрат и снижении уровня риска, то в обоих случаях риск не считается ресурсно-подобным. В первом случае речь может идти о том, что уровень риска жестко связан с объемом ресурсов, вовлекаемых в процесс. Например, повышая совокупный объем предоставляемых кредитов, банк увеличивает уровень средств, подвергаемых кредитному риску, т.е. уровень риска возрастает. Однако нельзя говорить о том, что при этом рост прибыли обеспечивается только за счет повышения уровня риска, поскольку речь, в том числе, идет об обычном росте отдачи производственного процесса, вызванном ростом исходных ресурсных вложений. Во втором случае возможно использование новой технологии, являющейся одновременно и более экономичной и безопасной. Естественно здесь не может и речи идти о том, что риск играет роль ресурса.

Следует также указать, что ресурсно-подобное поведение риска имеет субъективный характер. В одной и той же ситуации для одного ЛПР риск может быть ресурно-подобным, а для другого — нет. Предположим даже, что существует «объективная» характеристика ситуации принятия решения, т.е. набор значений случайных величин $X(a)$ объективно отражает все возможные последствия принятия каждого из решений. Тем не менее при оценке ситуации различные ЛПР используют различные функции полезности и различные меры риска. Как известно [8], функция полезности, используемая ЛПР, определяет его индивидуальное отношение к риску, от которого в свою очередь зависит наличие или отсутствие рассматриваемой характеристики риска.

Пусть, например, при решении об участии в лотерее один индивид в качестве функции полезности использует ожидаемый выигрыш, а другой – максимально возможный выигрыш. Будем предполагать, что лотерея является максимально «честной», т.е. ожидаемый выигрыш (выручка) равен цене билета z. Отказ от участия в лотерее мы понимаем как «затраты» в объеме z при том же выигрыше с нулевым уровнем риска. Тогда для первого индивида речь идет о сравнении пар $(z,0)$ и (z,R_1) с полезностями равными z, а во втором случае — о сравнении пар $(z,0)$ и (z,R_2) с полезностями равными соответственно z и M, где M — максимально возможный выигрыш, а R_1 и R_2 уровень риска лотереи с точки зрения соответственно первого и второго индивида. В соответствии с принятым определением риск является ресурсно-подобным только с точки зрения второго индивида, что может служить стимулом к его участию в лотерее.

Таким образом, наличие или отсутствие ресурсно-подобных проявлений риска зависит:

а) от состава рассматриваемых альтернатив-решений и их последствий;

б) от способа оценки последствий решений;

в) от способа количественной оценки уровня риска.

Рассмотрим теперь с качественной точки зрения механизм ресурсно-подобного проявления риска. В общей теории принятия решений в условиях неопределенности [8] предполагается, что недетерминированность последствий рассматриваемых решений вызвана возможностью различных состояний среды, в которой реализуется принятое решение. Предполагается, что последствие решения можно достоверно предсказать, если на момент принятия решения состояние среды достоверно предсказуемо. Возможность различных состояний среды обусловлена, в свою очередь, проявлением факторов неопределенности, отсутствие которых означает, что среда находится в фиксированном состоянии. Таким образом в процессе реализации принятого решения объект управления подвергается собственно управляющим воздействиям ЛПР, а также воздействию факторов неопределенности. Воздействие последних имеет случайный характер, вследствие чего последствия реализации решения недетерминированы. Будем предполагать, что в каждом из вариантов решения объект управления может быть подвержен воздействию некоторого набора факторов неопределенности из одного и того же множества $F=\{f_1,f_2, ...,f_m\}$. При этом каждый вариант решения характеризуется своим набором факторов. Будем считать уровень риска решения тем большим, чем большему количеству факторов из набора $\{f_1,f_2, ...,f_m\}$ будет в ходе реализации этого решения подвержен объект управления. Более строго, под этим понимается следующее. Если в ходе реализации решений a_1 и a_2 объект управления подвержен воздействию наборов факторов неопределенности F_1 и F_2, где $F_1 \subset F_2 \subset F$, то уровень риска второго решения выше, чем для первого решения. Такой подход соответствует принятой выше трактовке уровня риска. Разобьем множество $\{f_1,f_2, ...,f_m\}$ на три группы. К первой группе отнесем факторы, воздействие которых на объект управления носит однозначно негативный характер. Данные факторы назовем *негативными факторами риска*. Ко второй группе отнесем факторы, воздействие которых на объект управления носит неопределенный характер, т.е. может быть как негативным, так и позитивным. Данные факторы назовем неопределенными факторами. Наконец к третьей группе отнесем *позитивные факторы риска*, т.е. позитивно воздействующие факторы. ЛПР не может по своему усмотрению формировать состав факторов, а рассматривает имеющиеся варианты решений, которые, как правило, характеризуются проявлением факторов не менее чем двух групп. Ресурсно-подобное проявление риска характеризуется наличием таких двух вариантов решений, что более высокий уровень риска второго варианта вызван проявлением большего количества факторов третьей группы, чем в первом варианте. Если это с избытком компенсирует проявление факторов первых двух групп, то последствия второго решения являются более предпочтительными.

Искусство управления риском состоит, таким образом, в использовании воздействия на объект управления возможно большего количества позитивных факторов риска и уменьшении воздействия возможно большего количества негативных факторов риска.

Управлением экономическим риском называется разработка и реализация специальных мероприятий, позволяющих учесть факторы риска в ходе управления экономической системой. Данные мероприятия должны быть направлены на противодействие негативному влиянию данных факторов и использование возможности их позитивного влияния на конечный результат функционирования системы.

Сведение риска к минимальному уровню означает, таким образом, попытку устранения воздействия всех факторов неопределенности, в том числе позитивных факторов риска. Тем не менее данный способ управления риском является наиболее эффективным в тех ситуациях, когда проявление позитивных факторов риска незначительно или отсутствует.

Приведем теперь примеры ситуаций, явно характеризующихся ресурсно-подобным проявлением риска. Наиболее характерным примером является применение выборочных наблюдений с целью получения информации об обследуемой совокупности объектов. По сути, отказ от сплошного обследования, дающего (условно) достоверную информацию, означает *сознательное повышение уровня риска* недостоверности получаемой информации *с целью снижения затрат*, необходимых для получения этой информации. Это фактически означает, что уменьшение объема используемых «обычных» ресурсов (затрат на проведение наблюдений) компенсируется увеличением уровня риска, т.е., считая риск ресурсом, мы имеем дело с обычным замещением одних ресурсов другими.

Рассмотрим теперь вопрос о ресурсно-подобном проявлении риска в ходе формирования инвестиционного портфеля на рынке ценных бумаг.

Применительно к анализу ресурсно-подобного проявления портфельного риска задача заключается в исследовании поведения функции $M(Z,R)$, где Z — уровень затрат на формирование портфеля, R – уровень риска, а $M(Z,R)$ — максимально возможная ожидаемая будущая стоимость портфеля при заданных затратах Z и уровне риска R. Так как ожидаемая стоимость портфеля равна произведению объема затрат на его ожидаемую доходность, то $M(Z,R)=Zm(1,R)$, где $m(1,R)$ — максимально возможная ожидаемая доходность портфеля при уровне затрат равном 1 и уровне риска R. Таким образом с экономической точки зрения речь идет об обеспечении максимальной ожидаемой доходности портфеля для некоторого заданного уровня риска, а с математической – об исследовании поведения функции $M(R)=m(1,R)$.

Следующая теорема описывает поведение функции $M(R)$ в достаточно общей ситуации, включающей в себя задачу портфельного анализа на основе техники Марковица [11, 12]. В ходе формулировки и доказательства теоремы будут существенно использоваться понятие компактности и свойства непрерывных и выпуклых функций, которые приведены во многих книгах по математическому анализу, например в [7].

Пусть A – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, $m(y)$ — выпуклая вверх функция, заданная на A. Пусть далее $g(y)$ — непрерывная, действительно-значная функция, также заданная на A.

Рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования:

$$\begin{gathered} m(y) \to \max \\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in A, \\ g(y)=R, \end{gathered} \qquad (1)$$

где число R рассматривается как параметр. Очевидно задача (1) имеет смысл при выполнении условий $R_{min} \le R \le R_{max}$, где

$$R_{min} = \min\{g(y),\ y \in A\},\ R_{max} = \max\{g(y),\ y \in A\}.$$

В силу непрерывности функции $g(y)$ для любого $R_{min} \le R \le R_{max}$ множество $A_R = \{y \in A: g(y) = R\}$ является непустым компактом, поэтому решением задачи (1) является некоторый вектор $y \in A_R$. При этом $m(y) = M(R) = \max\{m(y),\ y \in A_R\}$. Нас будет интересовать поведение функции $M(R)$ на отрезке $[R_{min}, R_{max}]$. Введем обозначения. Пусть $M_0 = \max\{m(y),\ y \in A\}$. Пусть далее $A^{M_0} = \{y \in A: m(y) = M_0\}$, $R_0' = \min\{g(y): y \in A^{M_0}\}$, $R_0'' = \max\{g(y): y \in A^{M_0}\}$. Очевидны следующие неравенства:

$$R_{min} \le R_0' \le R_0'' \le R_{max}.$$

В этих обозначениях справедлива

Теорема 1. На отрезке $[R_{min}, R_0']$ функция $M(R)$ строго возрастает; на отрезке $[R_0'', R_{max}]$ — строго убывает; на отрезке $[R_0', R_0'']$ верно $M(R) \equiv M_0$.

Доказательство. Напомним, что функция $f(R)$ считается строго возрастающей (убывающей) на отрезке $[a,b]$, если для любых $a \le R_1 < R_2 \le b$ верно $f(R_1) < f(R_2)$ ($f(R_1) > f(R_2)$). Поэтому на вырожденном отрезке $[a,a]$ любая функция считается одновременно строго возрастающей и убывающей. Предположим, что $R_{min} < R_0'$ и $R_{min} \le R_1 \le R_2 \le R_0'$. Покажем, что $M(R_1) < M(R_2)$. Прежде всего отметим, что $M(R_1) < M_0$. Действительно, в противном случае $M(R_1) \ge M_0$, а так как $M_0 = \max\{m(y), y \in A\}$, то $M(R_1) = M_0$. Если для $y \in A_{R_1}$ верно $m(y) = M(R_1)$, то в наших обозначениях $y \in A_{R_1} \cap A^{M_0}$. Поэтому $g(y) \ge R_0' = \min\{g(y): y \in A^{M_0}\}$ и, с другой стороны, $g(y) = R_1$, что противоречит условию $R_{min} \le R_1 \le R_2 \le R_0'$. Итак, $M(R_1) < M_0$. Далее, множество A^{M_0} очевидно компакт, следовательно, в силу непрерывности функции $g(y)$ для некоторого $y' \in A^{M_0}$ имеем $R_0' = g(y')$. Поэтому $m(y') = M_0 = M(R_0')$. Пусть $y_1 \in A_{R_1}$ такой вектор, что $M(R_1) = m(y_1)$. Введем функцию $\alpha(t) = g((1-t)y_1 + ty')$. Так как множество A выпукло, то функция $\alpha(t)$ непрерывна на $[0,1]$. При этом $\alpha(0) = g(y_1) = R_1$, $\alpha(1) = g(y') = R_0'$. Так как $R_1 < R_2 \le R_0'$, из непрерывности $\alpha(t)$ следует, что для некоторого $t_0 \in [0,1]$ имеем $\alpha(t_0) = R_2$. При этом $t_0 > 0$, так как $R_1 < R_2$. Так как множество A выпукло, то $y_2 = (1-t_0)y_1 + t_0 y' \in A$ и $g(y_2) = \alpha(t_0) = R_2$, т.е. $y_2 \in A_{R_2}$. По условию, функция $m(y)$ выпукла вверх, следовательно $m(y_2) \ge (1-t_0)m(y_1) + t_0 m(y')$. Тогда

$$M(R_2) \ge m(y_2) \ge (1-t_0)m(y_1) + t_0 m(y') = $$
$$= (1-t_0)M(R_1) + t_0 M_0.$$

Согласно доказанному $M_0 > M(R_1)$. Поэтому, так как $t_0 > 0$,

$$M(R_2) \ge (1-t_0)M(R_1) + t_0 M_0 >$$
$$> (1-t_0)M(R_1) + t_0 M(R_1) = M(R_1),$$

т.е. $M(R_2) > M(R_1)$.

Пусть теперь $R \in [R_0', R_0'']$. Покажем, что $M(R) = M_0$. По построению $M(R_0') = M(R_0'') = M_0$. Пусть $y', y'' \in A^{M_0}$ таковы, что $g(y') = R_0'$, $g(y'') = R_0''$. Введем функцию $\beta(t) = g((1-t)y' + ty'')$. Имеем $\beta(0) = g(y') = R_0'$, $\beta(1) = g(y'') = R_0''$. Функция $\beta(t)$ непрерывна на $[0,1]$, поэтому для некоторого $t_0 \in [0,1]$ верно $\beta(t_0) = R$. Тогда $(1-t_0)y' + t_0 y'' \in A_R$. Поэтому, в силу выпуклости вверх функции $m(y)$, верно

$$M(R) \ge m((1-t_0)y' + t_0 y'') \ge$$
$$\ge (1-t_0)m(y') + t_0 m(y'').$$

Но $y', y'' \in A^{M_0}$, поэтому $m(y') = m(y'') = M_0$. Тогда $M(R) \ge M_0$. С другой стороны, по определению $M(R) \le M_0$. Поэтому $M(R) = M_0$.

Докажем теперь, что на отрезке $[R_0', R_{max}]$ функция $M(R)$ строго убывает. Предположим, что $R_0'' < R_{max}$ и $R_0'' \le R_1 \le R_2 \le R_{max}$. Покажем, что $M(R_2) < M(R_0'') = M_0$. Если $M(R_2) \ge M_0$, то $M(R_2) = M_0$. Тогда, как и выше, для некоторого $y \in A_{R_2} \cap A^{M_0}$ имеем $m(y) = M(R_2) = M_0$ и $g(y) = R_2$. Следовательно, $R'' = \max\{g(y): y_0 \in A^{M_0}\} \ge R_2$, что противоречит условию. Итак, $M(R_2) < M_0$. Пусть для $y'' \in A^{M_0}$ верно $g(y'') = R_0''$ и для $y_2 \in A_{R_2}$ верно $m(y_2) = M(R_2)$. Положим $\gamma(t) = g(ty'' + (1-t)y_2)$. Имеем $\gamma(0) = g(y_2) = R_2$ и $\gamma(1) = g(y'') = R_0''$. В силу выпуклости A функция $\gamma(t)$ непрерывна на $[0,1]$ и $R_0'' \le R_1 < R_2$. Поэтому для некоторого $t_0 \in [0,1]$ имеем $\gamma(t_0) = R_1$. При этом $t_0 > 0$, так как $R_1 < R_2$. Тогда $t_0 y'' + (1-t_0)y_2 \in A_{R_1}$. В силу выпуклости вверх функции $m(y)$ имеем

$$M(R_1) \ge m(t_0 y'' + (1-t_0)y_2) \ge$$
$$\ge t_0 m(y'') + (1-t_0)m(y_2) = t_0 M_0 + (1-t_0)M(R_2).$$

По доказанному $M(R_2) < M_0$. Поэтому, так как $t_0 > 0$, имеем $t_0 M_0 + (1-t_0)M(R_2) > M(R_2)$. Тогда $M(R_1) > M(R_2)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь применение теоремы 1 к задаче анализа ресурсно-подобного поведения портфельного риска. В математической постановке задача формирования инвестиционного портфеля — оптимальное распределение инвестируемых средств по приобретению акций n компаний [11]. Предполагается, что определен некоторый период, по истечении которого инвестор рассчитывает получить максимальный доход в результате роста стоимости портфеля. Пусть X_j – доходность акций j-й компании, то есть $X_j = P_{t+T}(j)/P_t(j)$, где $P_t(j)$ стоимость акции в момент времени t ее приобретения, а $P_{t+T}(j)$ — стоимость по истечении периода T. Величины t и T будем считать фиксированными. В таком случае X_j — случайная величина. Пусть y_j, $j=1,2,...,n$, $0 \le y_j \le 1$ — доли вложения средств в акции вида j. Считая совокупные вложения равными 1, получаем, что совокупная доходность портфеля — случайная величина X, задаваемая равенством:

$$X = y_1X_1 + y_2X_2 + ... + y_nX_n.$$

Случайная величина X характеризуется ее математическим ожиданием $E(X)$ и дисперсией $V(X)$, при этом

$$E(X) = y_1E(X_1) + y_2E(X_2) + ... + y_nE(X_n) = \\ = y_1m_1 + y_2m_2 + ... + y_nm_n,$$

где $m_j = E(X_j)$. Предполагается, что математические ожидания всех величин X_j конечны. Аналогично предполагаются конечными ковариации $V_{ij} = E[(X_i - m_i)(X_j - m_j)]$ для всех $i,j = 1,2,...,n$. Тогда дисперсия $V(X)$ выражается равенством

$$V(X) = v(y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}y_iy_j.$$

В теории портфельного анализа [11, 12, 6] дисперсия $V(X)$ используется в качестве меры риска. Пусть $M(R)$ – максимально возможная ожидаемая доходность при заданном уровне риска R. Тогда вопрос о поведении функции $M(R)$ – частный случай рассмотренной выше задачи (1), где $g(y)=v(y)$, $m(y) = y_1m_1 + y_2m_2 + ... + y_nm_n$, а множество A имеет вид

$$A = \{y = (y1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \le y_j, \\ y_1 + y_2 + ... + y_n = 1\}.$$

При указанных характеристиках множества A соответствующий портфель называется стандартным [12]. По теореме 1, функция $M(R)$ строго возрастает на отрезке $[R_{\min}, R_0']$, равна максимально возможной доходности на отрезке $[R_0', R_0'']$ и строго убывает на $[R_0'', R_{\max}]$. Таким образом в соответствии с принятым определением портфельный риск проявляет себя как ресурс при условии $R_{\min} < R_0'$. Более того, так как функция $M(R)$ строго возрастает на $[R_{\min}, R_0']$, то сознательное увеличение инвестором уровня риска от минимального уровня до R_0' приводит к росту максимально возможной ожидаемой доходности. Увеличение уровня риска от R_0' до R_0'' неэффективно, так как максимально возможная ожидаемая доходность остается постоянной. Дальнейшее увеличение уровня риска от R_0'' до $R_{\max}$ приводит к снижению максимально возможной ожидаемой доходности. Таким образом существует *единственное значение оптимального уровня риска*, равное R_0'. Портфельный риск не проявляет себя как ресурс в ситуации, когда $R_{\min} = R_0'$, т.е. когда портфель, характеризующийся минимальным уровнем риска, обеспечивает максимально возможную ожидаемую доходность. Как показывают статистические данные по российскому и зарубежным рынкам ценных бумаг, такая ситуация является достаточно редкой.

В теории портфельного анализа сформулирована теорема об эффективном множестве (efficient set theorem) [6, глава 8], состоящая в том, что инвестор выбирает оптимальный портфель из множества портфелей, каждый из которых

а) обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска;

б) обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности.

В соответствии с этой теоремой используется понятие эффективной границы. Эффективная граница представляет собой множество точек плоскости с координатами (E,V), где (E,V) параметры инвестиционного портфеля, удовлетворяющего требованиям а) и б). Можно показать, что при использовании дисперсии $V(y)$ в качестве меры риска эта граница совпадает с графиком функции $M(R)$ на отрезке $[R_{\min}, R_0']$. Отметим также, что из свойств эффективной границы, доказанных в [6], вытекает выпуклость вверх функции $M(R)$ на отрезке $[R_{\min}, R_0']$, т.е., в частности, ее непрерывность. На $[R_0'', R_{\max}]$ функция $M(R)$ может быть разрывной. Пример соответствующего (теоретически возможного) портфеля нетрудно привести, используя геометрические рассуждения, приведенные в [11].

Таким образом всегда существует единственный оптимальный уровень риска, обеспечивающий максимально возможную ожидаемую доходность стандартного портфеля. При этом в качестве меры риска может использоваться не только дисперсия, но и любая функция $g(y)$, непрерывно зависящая от параметров портфеля (долей инвестиционных вложений в акции выделенных компаний). В подавляющем большинстве ситуаций риск (измеряемый дисперсией доходности) стандартного портфеля характеризуется ресурсно-подобным проявлением.

Аналогично можно рассмотреть инвестиционный портфель при отсутствии ограничений $y_j \geq 0$. Эта ситуация интерпретируется как формирование инвестиционного портфеля при возможности безрискового заимствования инвестором средств, предназначенных для инвестирования в рисковые активы [6, глава 9]. Множество A в этом случае имеет вид $A=\{y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n:\ y_1+y_2+\ldots+y_n=1\}$, т.е. сохраняет свойство выпуклости, но не является компактом. В этой ситуации теорема 1 формально неприменима. Однако если мы предположим, что заемные возможности инвестора тем не менее ограничены определенными рамками, т.е. для некоторого (возможно очень большого) числа L верны соотношения $|y_j|\leq L$, то множество A равно $A=\{y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n:\ y_1+y_2+\ldots+y_n=1, |y_j|\leq L\}$ т.е. является выпуклым компактом. Тогда при использовании в качестве меры риска дисперсии доходности (или любой другой непрерывной функции), мы вновь по теореме 1 получаем, что существует единственный оптимальный уровень риска, обеспечивающий максимально возможную ожидаемую доходность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейман Дж., фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.

2. *Качалов Р.М.* Управление хозяйственным риском. — М.: Наука, 2002.

3. *Секерин А.Б.* Модели управления риском и их применения для оптимизации системы налогового контроля // Вестник МГУ, сер. Экономика, 2004. № 1. С. 68-83.

4. *Секерин А.Б.* О методологии управления экономическим риском // Вестник Воронежск. гос. ун-та. Экономика и управление. 2004. № 1, С. 104—111.

5. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука,1978.

6. *Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.* Инвестиции: Пер с англ. – М.: ИНФРА-М , 2001. — XII, 1028 с.

7. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972.

8. *Arrow K.J.* Essays in the Theory of Risk Bearing. — Amsterdam. North Holland, 1970.

9. *Bowman, E.H.* A risk / return paradox for strategic management. Sloan Management Review, 1980, Spring: 17—31.

10. *Greenfield M.A.* Risk management "Risk as a resourse" http://www.hq.nasa.gov/office/codeq/risk/risk.pdf.

11. *Markowitz H.* Portfolio selection // Journal of Finance, Vol. VII, № 1. — P. 77—91.

12. *Markowitz H.* Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. — Newcastle, G.B.: Athenaeum Press Ltd., 1990. — 375 p.