УДК 338.27.015

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВОЛАТИЛЬНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ: АДАПТИВНЫЙ ПОДХОД

В. В. Давнис, А. Б. Тимченко

Воронежский государственный университет

Предложен вариант модели Р. Ингла, в которой условно гетероскедастичные остатки прогнозируются с помощью адаптивной регрессии. Вычислительные эксперименты в соответствии с данным вариантом модели продемонстрировали значительное повышение точности предсказания уровня ожидаемой волатильности. Этот факт вызывает интерес и ориентирует на продолжение исследований в данном направлении.

ВВЕДЕНИЕ

Прогноз финансовых показателей является наиболее важной задачей при обосновании инвестиционных решений. Дело в том, что принятие инвестиционных решений без оценки ожидаемых результатов вряд ли можно считать рациональным, а инвесторы, как правило, действуют рационально, и, следовательно, им нужен прогноз, подтверждающий рациональность их ожиданий.

Для прогнозирования финансовых временных рядов уже достаточно давно используются адаптивные модели. Их заслужено считают эффективным инструментом краткосрочного прогнозирования [2, 3]. Однако в современных теориях при объяснении динамики финансового рынка эти модели практически не используются. Их нет в стройной теории эффективного рынка, им не найдено место в альтернативном подходе, основой которого являются идеи нелинейной динамики. На наш взгляд, такая ситуация скорее сложилась из-за недооценки аналитических возможностей адаптивных моделей, нежели чем по каким-либо принципиальным моментам.

Конечно же, прогноз, и это всем известно, практически никогда не совпадает с наступающей реальностью, а значит, инвестор принимает решение в условиях риска. Снизить уровень риска можно попытаться, например, проведя дополнительный анализ изменчивости (волатильности) самого прогнозируемого показателя. Эффективным аппаратом, применяемым для этих целей, является предложенная Р. Инглом регрессионная модель с условно гетероскедостичными остатками (модель ARCH) [4, 5]. С ее помощью удается адекватно отразить изменение дисперсии, являющейся, по сути, измерителем присущей рынку неопределенности.

Преследуя цель расширения прикладных возможностей принципов адаптации, а также учитывая желательность проведения анализа волатильности в процессе обоснования инвестиционных решений, ниже предлагается схема построения модели Р. Ингла (модели ARCH) с адаптивной регрессией условно гетероскедостичных остатков. Чтобы понять специфику предлагаемого подхода, сначала рассмотрим ключевые моменты построения классической модели ARCH.

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ ARCH

Основная идея, заложенная в модели ARCH, состоит в отражении различия между условными и безусловными моментами второго порядка. Тогда как безусловные вариации и ковариации постоянны, условные моменты нетривиально зависят от прошлых состояний и развиваются во времени. В простейшем случае модель ARCH может быть записана в виде

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{x_t}\,\mathbf{b} + \varepsilon_t, \tag{1}$$

где $\varepsilon_t = u_t\,(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1})^{1/2}$, $u_t \sim N\,(0,1)$.

Для случайной величины ε_t выполняются все предпосылки классической регрессионной модели. Действительно,

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t \,|\, \mathbf{x}_t, \varepsilon_{t-1}) = 0\ , \tag{2}$$

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t \,|\, \mathbf{x}_t) = 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{V}(\varepsilon_t = V[E(\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}] + E[V(\varepsilon_t \,|\, \varepsilon_{t-1}] =$$
$$= 0+\alpha_0+ \alpha_1\, E(\varepsilon^2_{t-1}) = \alpha_0+ \alpha_1\, V(\varepsilon^2_{t-1})\ . \tag{4}$$

Используя этот результат и то обстоятельство, что $\mathrm{V}(\varepsilon_t) = V(\varepsilon_{t-1})$, получаем, что дисперсия случайной составляющей ε_t постоянна

$$\mathrm{V}(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\ . \tag{5}$$

В то же время условная дисперсия этой случайной составляющей зависит от времени

$$V(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}] = E(\varepsilon^2_{t-1} \mid \varepsilon_{t-1}) =$$
$$= E(u_t^2)\,(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2_{t-1}\,. \qquad (6)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что $E(u_t^2) = 1$.

Таким образом, все условия классической регрессии выполняются и оценки, полученные с помощью МНК,

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X'X})^{-1}{}'\mathbf{Xy}, \qquad (7)$$

являются несмещенными и эффективными среди линейных оценок.

Однако, как было показано Инглом, с помощью метода максимального правдоподобия [1] можно получить нелинейные оценки коэффициентов этой модели, превосходящие по эффективности линейные. Логарифм функции правдоподобия для модели с условно гетероскедастичными остатками записывается следующим образом:

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2) - \qquad (8)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}\,,$$

где $\varepsilon_t = y_t - \mathbf{x}_t\hat{\mathbf{b}}$.

Максимизация lnL требует применения нелинейных методов оптимизации. Для получения наиболее эффективных оценок коэффициентов модели ARCH Инглом и Джаджем предложена достаточно простая четырехшаговая процедура, краткое описание которой приводится ниже [6].

1. С помощью обычного МНК получают оценки $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ и вычисляют остатки $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}}$. Полученные оценки $\hat{\mathbf{b}}$ состоятельны, асимптотически нормальны, но неэффективны.

2. По остаткам с помощью МНК получают вектор $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)'$ коэффициентов регрессии σ_t^2 на ε^2_{t-1}

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2_{t-1},\ t = 2, ..., T\ . \qquad (9)$$

После выполнения этого шага целесообразно проверить гипотезу на отсутствие условной гетероскедастичности. (Детали такого тестирования будут описаны отдельно.) Если условная гетероскедастичность подтверждается, то выполняется следующий шаг.

3. С помощью модели, построенной на втором шаге, вычисляются расчетные значения дисперсии остатков

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2_{t-1}, \qquad (10)$$

которые используются для формирования переменных

$$g_t = (e_t^2/h_t - 1),\ z_{t1} = 1/h_t,\ z_{t2} = e^2_{t-1}/h_t,\ t = 2, ..., T \qquad (11)$$

Введя обозначения

$$\mathbf{g} = [g_t]_2^T, \qquad \mathbf{Z} = [z_{t1}, z_{t2}]_2^T, \qquad (12)$$

вычислим поправочные коэффициенты

$$\mathbf{d}_{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{g} \qquad (13)$$

и скорректируем коэффициенты, полученные на втором шаге,

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{d}_{\boldsymbol{\alpha}}. \qquad (14)$$

Асимптотическая ковариационная матрица оценивается как $2(\mathbf{Z'Z})^{-1}$.

4. С помощью полученных на третьем шаге оценок пересчитаем

$$h_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 e_{t-1}^2, \quad t = 2, \ldots, T\,. \qquad (15)$$

Для наблюдений вычислим

$$r_t = \sqrt{\frac{1}{h_t} + 2\left(\frac{\hat{\alpha}_1 e_t}{h_{t+1}}\right)^2}\,, \qquad (16)$$

$$s_t = \frac{1}{h_t} - \left(\frac{\hat{\alpha}_1}{h_{t+1}}\right)\left(\frac{e_{t+1}^2}{h_{t+1}} - 1\right) \qquad (17)$$

и, используя полученные значения, сформируем вектор и матрицу переменных следующим образом:

$$\mathbf{v} = [e_t s_t / r_t]_2^{T-1}, \qquad \mathbf{W} = [r_t \mathbf{x}_t]_2^{t-1}. \qquad (18)$$

Сформированный набор данных используем для вычисления поправочных коэффициентов к вектору оценок

$$\mathbf{d_b} = (\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{v} \qquad (19)$$

и окончательно получим

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \mathbf{d_b}\,. \qquad (20)$$

Полученные оценки асимптотически нормально распределены, и их асимптотическая ковариационная матрица оценивается с помощью $(\mathbf{W'W})^{-1}$.

Таким образом, описанная процедура позволяет с помощью четырехкратного применения МНК получить оценки коэффициентов регрессионной модели с условно гетероскедастичными остатками, которые являются более эффективными, чем оценки МНК.

По понятной причине (изменение дисперсии) к высокорискованным следует относить те процессы, адекватное описание которых получается с помощью ARCH моделей. Поэтому важным моментом при идентификации таких процессов является тестирование на ARCH эффекты.

Тестирование моделей типа ARCH обычно сводится к проверке существования характерных для них эффектов. Для этих целей, как правило, используется так называемый критерий TR^2, где T – объем выборки и R^2– коэффициент детерминации соответствующей модели для дисперсии. Этот показатель распределен по закону χ^2 с числом степеней свободы, равным количеству используемых в модели лаговых переменных ε^2_{t-1} и переменной σ^2_t, используемой для обозначения ошибки определения дисперсии процесса ε_t. Если расчетное значение $TR^2 > \chi^2(p^*, m)$, где p^*– заданный уровень доверительной вероятности и m – число степеней свободы, то гипотеза о присутствии эффектов ARCH принимается и процесс следует относить к высоко рискованным.

АДАПТИВНЫЙ ВАРИАНТ МОДЕЛИ ARCH

Теперь изложим адаптивный вариант прогнозной модели, разработанный специально для процессов, в которых наблюдаются эффекты ARCH. Эффекты подобного рода могут проявляться только в краткосрочных или среднесрочных тенденциях. Поэтому имеет смысл для прогнозирования временных рядов, в которых обнаружены ARCH эффекты, использовать модификацию модели с трехуровневой структурой адаптивного механизма. На первом уровне, как и в модели Ингла, оцениваются параметры регрессионной (авторегрессионной) модели, но с помощью рекуррентной схемы МНК. Уравнение же для остаточной дисперсии рассматривается как прогнозная модель с двухуровневой структурой адаптивного механизма. Формально модель такого типа можно записать следующим образом:

$$\hat{y}_{t+1/t} = \tilde{\mathbf{y}}_t \hat{\mathbf{b}}_t, \quad (21)$$

$$\hat{\sigma}^2_{t+1/t} = \boldsymbol{\varepsilon}^2_t \hat{\mathbf{d}}_t, \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{t+1} = \hat{\mathbf{b}}_t + \frac{\mathbf{C}_t^{-1}\tilde{\mathbf{y}}'_t}{\tilde{\mathbf{y}}_t \mathbf{C}_t^{-1}\tilde{\mathbf{y}}'_t + 1}[y_{t+1} - \hat{y}_{t+1/t}], \quad (23)$$

$$\mathbf{C}^{-1}_{t+1} = \left[\mathbf{C}_t^{-1} - \frac{\mathbf{C}_t^{-1}\tilde{\mathbf{y}}'_t \mathbf{y}_t \mathbf{C}_t^{-1}}{\tilde{\mathbf{y}}_t \mathbf{C}_t^{-1}\tilde{\mathbf{y}}'_t + 1}\right], \quad (24)$$

$$\varepsilon_{t+1} = y_{t+1} - \hat{y}_{t+1/t}, \quad (25)$$

$$\sigma^2_{t+1} = \frac{t}{t+1}\sigma^2_t + \frac{1}{t+1}\varepsilon^2_{t+1}, \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_{t+1} = \hat{\mathbf{d}}_t + \frac{\mathbf{D}_t^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)'}{\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{D}_t^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)' + 1}[\sigma^2_{t+1} - \hat{\sigma}^2_{t+1/t}], \quad (27)$$

$$\mathbf{D}^{-1}_{t+1} = \left[\mathbf{D}_t^{-1} - \frac{\mathbf{D}_t^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)'\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{D}_t^{-1}}{\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{D}_t^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)' + 1}\right], \quad (28)$$

$$\hat{\sigma}^2_{t+1/t+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_t \hat{\mathbf{d}}_{t+1}, \quad (29)$$

$$\hat{\hat{\mathbf{d}}}_{t+1} = \hat{\mathbf{d}}_{t+1} + \frac{\mathbf{D}_{t+1}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)'}{\boldsymbol{\varepsilon}_t \mathbf{D}_{t+1}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)' + \alpha}[\sigma^2_{t+1} - \hat{\sigma}^2_{t+1/t+1}], \quad (30)$$

$$\hat{y}_{t+2/t+1} = \tilde{\mathbf{y}}_{t+1}\hat{\mathbf{b}}_{t+1}, \quad (31)$$

$$\hat{\sigma}^2_{t+2/t+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}\hat{\mathbf{d}}_{t+1}, \quad (32)$$

$$\hat{\hat{\sigma}}^2_{t+2/t+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}\hat{\hat{\mathbf{d}}}_{t+1}. \quad (33)$$

В модели использованы следующие обозначения:

y_t – фактическое значение стоимости финансового актива в момент времени t;

$\tilde{y}_t = (1, y_t, ..., y_{t-l+1})$ – расширенная вектор-строка из l лаговых переменных (l – порядок авторегрессионной модели);

$\hat{y}_{t+1/t}$ – прогнозная оценка долгосрочного тренда, рассчитанная по модели с коэффициентами, оценки которых известны на момент t ;

σ^2_t – текущее значение дисперсии;

$\hat{\sigma}^2_{t+1/t}$ – прогнозная оценка дисперсии, рассчитанная с использованием модели, коэффициенты которой оценены на момент времени ;

$\hat{\hat{\sigma}}^2_{t+1/t}$ – прогнозная оценка дисперсии, рассчитанная с помощью адаптивной модели;

ε_t – отклонение расчетного от фактического значения моделируемого показателя;

$\varepsilon_t = (1, \varepsilon^2_t$ – расширенная вектор-строка из лаговой переменной;

$\hat{\mathbf{b}}_t$ – вектор текущих оценок прогнозной модели;

$\hat{\mathbf{d}}_t$ – вектор текущих оценок модели, с помощью которой прогнозируется дисперсия остатков;

$\hat{\hat{\mathbf{d}}}_t$ – вектор текущих оценок адаптивной модели, с помощью которой уточняются прогнозные оценки дисперсии остатков;

$\boldsymbol{C}_t^{-1}$ – матрица, обратная к матрице системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов, оцененная по t наблюдениям;

$\boldsymbol{D}_t^{-1}$ – матрица, обратная к матрице системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов, оцененная по данным из отклонений ε, возведенных в квадрат;

α – параметр адаптации краткосрочной модели ($0< \alpha< 1$).

ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ

Проведем расчеты с использованием модели (21) – (33) по прогнозированию волатильности временных рядов с эффектами ARCH. Исходные данные для расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Динамика стоимости акций по данным РТС, р.

Дата	ОАО РАО ЕЭС России	ОАО ГМК Норильский Никель	ОАО Газпром	ОАО Сургут-нефтегаз
03.10.2005	10,725	2 316,00	150,30	33,74
04.10.2005	11,380	2 350,00	151,70	31,80
05.10.2005	10,970	2 240,00	146,57	32,00
06.10.2005	10,771	2 090,00	138,26	29,10
07.10.2005	11,215	2 108,71	139,42	28,14
10.10.2005	11,359	2 157,66	143,44	28,74
11.10.2005	11,220	2 211,75	147,70	32,00
12.10.2005	10,650	2 122,08	141,10	29,09
13.10.2005	10,510	2 079,44	140,01	29,45
14.10.2005	10,287	2 010,00	135,65	29,00
17.10.2005	10,400	2 038,56	137,00	26,35
18.10.2005	9,884	2 026,16	138,53	26,24
19.10.2005	9,950	1 939,89	135,40	25,38
20.10.2005	9,718	1 935,00	136,00	24,91
21.10.2005	10,118	1 900,00	138,00	25,10
24.10.2005	10,039	2 000,00	141,95	25,86
25.10.2005	10,000	2 026,29	142,79	25,79
26.10.2005	9,868	2 038,06	142,91	26,25
27.10.2005	9,862	1 987,45	138,11	25,80
28.10.2005	10,008	1 990,00	139,00	26,05
31.10.2005	10,035	2 021,00	142,07	28,42
01.11.2005	10,222	2 020,30	142,80	27,60
02.11.2005	10,410	2 168,56	144,72	28,48
03.11.2005	10,464	2 140,00	144,71	31,00
07.11.2005	10,677	2 161,27	144,41	28,35
08.11.2005	10,741	2 185,92	144,46	28,45
09.11.2005	10,540	2 202,09	146,15	29,10
10.11.2005	10,444	2 199,30	144,35	28,14
11.11.2005	10,571	2 195,00	143,10	29,02
14.11.2005	10,800	2 200,00	144,37	28,53
15.11.2005	10,700	2 130,53	143,23	28,10
16.11.2005	11,108	2 200,00	143,90	28,38
17.11.2005	11,000	2 254,00	144,69	29,20
18.11.2005	11,320	2 325,00	145,50	29,15
21.11.2005	11,050	2 353,76	147,01	30,05
22.11.2005	10,800	2 314,39	151,18	32,16
23.11.2005	10,780	2 231,26	151,96	30,30
24.11.2005	10,780	2 355,59	159,95	30,90
25.11.2005	11,090	2 460,00	161,66	30,60
28.11.2005	11,000	2 451,43	168,40	30,80
29.11.2005	11,151	2 430,00	167,45	30,00
30.11.2005	11,847	2 424,00	171,30	30,02
01.12.2005	11,958	2 478,01	179,93	31,19

На первом этапе для рассматриваемых временных рядов были построены авторегрессионные модели (см. табл. 2).

С помощью построенных авторегрессионных моделей были подготовлены данные для прогнозирования волатильности: текущие значения квадратов остатков ε_t^2 и дисперсии σ_t^2 (см. табл. 3).

Таблица 2

Авторегрессионные уравнения и критерии их качества

Компания	Авторегрессионные уравнения	Коэффициент детерминации
ОАО РАО ЕЭС России	$y_t^{[1]} = 0,72 + 0,94 y_{t-1}^{[1]}$ (0,91) (0,09)	$R_{[1]}^2 = 0,75$
ОАО ГМК Норильский никель	$y_t^{[2]} = 104,52 + 0,95 y_{t-1}^{[2]}$ (141,78) (0,07)	$R_{[2]}^2 = 0,84$
ОАО Газпром (Санкт-Петербург)	$y_t^{[3]} = -14,65 + 1,11 y_{t-1}^{[3]}$ (8,85) (0,06)	$R_{[3]}^2 = 0,89$
ОАО Сургутнефтегаз	$y_t^{[4]} = 7,32 + 0,74 y_{t-1}^{[4]}$ (2,68) (0,09)	$R_{[4]}^2 = 0,61$

Таблица 3

Данные для прогнозирования волатильности

ОАО РАО ЕЭС России		**ОАО ГМК Норильский никель**		**ОАО Газпром**		**ОАО Сургутнефтегаз**	
ε_t^2	σ_t^2	ε_t^2	σ_t^2	ε_t^2	σ_t^2	ε_t^2	σ_t^2
0,0005	0,0005	9,5610	9,5610	0,0459	0,0459	0,3564	0,3564
0,0004	0,0005	21,8268	15,6939	41,7734	20,9096	1,0852	0,7208
0,0001	0,0003	0,1930	10,5269	82,8576	41,5590	4,0220	1,8212
0,0004	0,0003	54,8962	21,6192	1,5453	31,5556	0,6588	1,5306
0,0001	0,0003	42,7692	25,8492	15,8473	28,4139	0,2555	1,2756
0,0003	0,0003	18,1929	24,5732	14,4190	26,0814	11,0086	2,8977
0,0001	0,0003	3,0694	21,5012	56,4256	30,4163	4,0622	3,0641
0,0008	0,0003	35,0295	23,1923	1,7061	26,8275	0,2578	2,7133
0,0014	0,0004	62,4080	27,5496	19,9033	26,0582	0,0440	2,4167
0,0027	0,0007	123,7981	37,1744	2,9178	23,7441	6,3824	2,8133
0,0020	0,0008	96,0282	42,5248	3,0482	21,8627	0,4431	2,5978
0,0060	0,0012	107,6525	47,9521	9,4577	20,8289	2,0819	2,5548
0,0054	0,0015	206,9046	60,1792	0,9693	19,3013	1,6188	2,4828
0,0078	0,0020	213,4930	71,1302	5,3883	18,3075	0,5423	2,3442
0,0039	0,0021	263,6630	83,9657	16,4878	18,1862	0,0144	2,1889
0,0046	0,0023	134,3541	87,1150	0,2854	17,0674	0,5658	2,0875
0,0049	0,0024	107,5272	88,3157	0,0752	16,0678	0,0562	1,9680
0,0062	0,0026	96,4841	88,7695	27,1120	16,6814	1,0616	1,9176
0,0063	0,0028	148,2127	91,8981	0,9780	15,8549	0,1994	1,8272

Окончание таблицы 3

ОАО РАО ЕЭС России		**ОАО ГМК Норильский никель**		**ОАО Газпром**		**ОАО Сургутнефтегаз**	
ε_t^2	σ_t^2	ε_t^2	σ_t^2	ε_t^2	σ_t^2	ε_t^2	σ_t^2
0,0046	0,0030	112,6854	95,4329	0,1694	14,8033	0,7127	1,8309
0,0031	0,0030	113,3770	96,2485	2,3246	14,2361	0,4114	1,7664
0,0019	0,0030	14,1289	92,6781	0,3693	13,6332	6,3211	1,9644
0,0016	0,0029	25,8664	89,8943	0,8039	13,0986	4,0526	2,0514
0,0007	0,0028	16,7901	86,9701	0,2652	12,5853	0,0038	1,9695
0,0005	0,0027	8,7154	83,9603	1,2538	12,1495	0,3985	1,9091
0,0012	0,0027	4,8437	81,0301	6,4941	11,9400	0,6491	1,8624
0,0017	0,0026	5,4311	78,3301	3,2713	11,6304	0,6099	1,8177
0,0011	0,0026	6,4023	75,8499	0,7108	11,2539	0,1283	1,7594
0,0003	0,0025	5,2806	73,4975	2,8926	10,9752	0,1827	1,7069
0,0006	0,0025	30,5360	72,1117	0,0526	10,6228	0,0312	1,6528
0,0000	0,0024	5,2806	70,0232	0,0777	10,2933	0,6136	1,6203
0,0000	0,0023	0,0446	67,9027	0,0464	9,9828	0,0156	1,5717
0,0002	0,0022	12,3220	66,2679	0,6891	9,7094	1,1319	1,5588
0,0000	0,0022	23,4898	65,0457	11,0957	9,7490	6,2705	1,6934
0,0003	0,0021	9,1039	63,4918	0,2484	9,4851	0,8546	1,6701
0,0004	0,0021	0,7148	61,7951	43,9485	10,4166	1,1199	1,6552
0,0004	0,0020	24,3213	60,8089	0,2427	10,1488	0,0975	1,6142
0,0000	0,0020	95,7102	61,7038	18,9848	10,3754	0,5406	1,5867
0,0000	0,0019	88,0772	62,3632	16,3468	10,5247	0,0456	1,5482
0,0000	0,0019	70,3784	62,5587	0,7344	10,2859	0,1602	1,5143
0,0024	0,0019	65,7784	62,6353	27,3661	10,6926	2,4247	1,5360

Данные таблицы 3 были проверены на наличие эффектов ARCH. Значения TR^2 – статистики приведены в 4-м столбце таблицы 4. Их сравнение с критическим значением $\chi^2(1) = 3{,}84$ позволило сделать вывод о присутствии в данных эффектов ARCH.

Динамика коэффициентов регрессионной и адаптивной регрессионной моделей показана в таблице 5.

Таблица 4

Модели дисперсий остатков и критерии их качества

Компания	Регрессионные Уравнения	R^2	TR^2
ОАО РАО ЕЭС России	$\sigma_t^{2[1]} = 0{,}0012 + 0{,}1599\varepsilon_t^{2[1]}$ (0,0002) (0,0617)	0,14	6,02
ОАО ГМК Норильский никель	$\sigma_t^{2[2]} = 54{,}188 + 0{,}145\varepsilon_t^{2[2]}$ (5,0827) (0,0559)	0,14	6,04
ОАО Газпром (Санкт-Петербург)	$\sigma_t^{2[3]} = -14{,}421 + 0{,}219\varepsilon_t^{2[3]}$ (1,1867) (0,0589)	0,26	10,76
ОАО Сургутнефтегаз	$\sigma_t^{2[4]} = 1{,}807 + 0{,}078\varepsilon_t^{2[4]}$ (0,0814) (0,0293)	0,15	6,30

Таблица 5

Текущие значения коэффициентов регрессионной и адаптивной регрессионной моделей

$\hat{a}_0^{[A]}$	$\hat{a}_1^{[A]}$	$\hat{a}_0^{[A]}$	$\hat{a}_1^{[A]}$	$\hat{a}_0^{[A]}$	$\hat{a}_1^{[A]}$	$\hat{a}_0^{[A]}$	$\hat{a}_1^{[A]}$
ОАО РАО ЕЭС				**ОАО ГМК Норильский никель**			
0,0005	0,5245	0,0003	0,3710	41,1654	0,4370	22,2154	0,3439
0,0015	0,3943	0,0004	0,3604	38,7143	0,4299	22,0726	0,3435
0,0024	0,1365	0,0004	0,3441	85,4487	-0,0604	27,9652	0,2950
0,0024	0,0915	0,0005	0,3400	81,8422	-0,0132	26,7721	0,3047
0,0025	-0,0206	0,0005	0,3242	79,3647	-0,0177	27,1252	0,3007
0,0025	-0,0294	0,0005	0,3211	76,7582	-0,0159	27,3978	0,2975
0,0023	0,0596	0,0005	0,3356	74,2573	-0,0060	27,3750	0,2969
0,0021	0,1410	0,0004	0,3438	71,8608	0,0103	27,0498	0,2991
0,0022	0,0622	0,0005	0,3348	69,5482	0,0266	26,7144	0,3014
0,0023	-0,0020	0,0005	0,3220	68,2839	0,0332	26,6343	0,3018
0,0022	0,0344	0,0005	0,3284	62,9419	0,1037	24,7820	0,3169
0,0021	0,0023	0,0005	0,3183	64,2492	0,0592	26,1543	0,3048
0,0021	0,0147	0,0005	0,3201	63,1237	0,0605	26,3122	0,3031
0,0020	0,0393	0,0005	0,3251	60,7108	0,0903	25,3820	0,3107
0,0020	0,0338	0,0005	0,3219	57,3494	0,1250	24,5446	0,3173
0,0019	0,0640	0,0005	0,3286	57,9192	0,1041	25,2214	0,3113
0,0019	0,0756	0,0005	0,3302	57,9716	0,0951	25,6302	0,3076
0,0018	0,0849	0,0005	0,3312	41,3207	0,2196	24,3147	0,3187
0,0018	0,0680	0,0005	0,3257	28,3728	0,3396	21,4309	0,3381
0,0018	0,0780	0,0005	0,3271	31,8873	0,3263	21,6351	0,3373
ОАО Газпром				**ОАО Сургутнефтегаз**			
14,8307	0,2849	19,3913	0,1836	1,9277	0,0883	1,9790	0,0818
13,7665	0,2956	19,3415	0,1838	1,9366	0,0885	1,9925	0,0802
13,7692	0,3073	19,3099	0,1853	2,0158	0,0092	1,9999	0,0679
13,1973	0,3172	19,2727	0,1859	1,9156	0,0225	1,9898	0,0747
12,9515	0,3260	19,2430	0,1869	1,9190	0,0933	1,9906	0,0807
12,4966	0,3291	19,2270	0,1867	1,8434	0,1025	1,9859	0,0812
10,9565	0,3093	19,2125	0,1836	1,7800	0,1078	1,9823	0,0815
11,3335	0,3359	19,1809	0,1864	1,7288	0,1153	1,9788	0,0820
11,7789	0,3485	19,1599	0,1884	1,7273	0,1248	1,9763	0,0830
10,8487	0,3488	19,1380	0,1875	1,6728	0,1328	1,9725	0,0836
11,3638	0,3628	19,1115	0,1899	1,6607	0,1381	1,9705	0,0842
11,0810	0,3689	19,0894	0,1904	1,5525	0,1387	1,9670	0,0836
10,8482	0,3744	19,0700	0,1908	1,6080	0,1476	1,9663	0,0849
10,6866	0,3724	19,0737	0,1903	1,6275	0,1121	1,9744	0,0816
9,9623	0,2584	19,1169	0,1805	2,0296	-0,0506	2,0021	0,0583
11,4149	0,3601	19,1203	0,1896	1,6100	0,1234	1,9721	0,0824
19,6367	-0,1897	19,7675	0,1271	1,5539	0,1190	1,9699	0,0820
11,3800	0,3610	19,1174	0,1897	1,6231	0,1430	1,9681	0,0845
10,7260	0,0966	19,2596	0,1703	1,5378	0,1433	1,9654	0,0840
11,1656	0,1589	19,2151	0,1738	1,5649	0,1543	1,9632	0,0854

Сравнительный анализ результатов прогнозирования, полученных с помощью обычной и адаптивной регрессии, показал, что адаптивная значительно превосходит по точности обычную (см. табл. 6).

Таблица 6

Фактические и прогнозные оценки волатильности курсов акций

σ_t^2	$\hat{\delta}_t^{2[A]}$	$\delta_t^{[A]}$	$\hat{\delta}_t^{2[R]}$	$\delta_t^{[R]}$	σ_t^2	$\hat{\delta}_t^{2[A]}$	$\delta_t^{[A]}$	$\hat{\delta}_t^{2[R]}$	$\delta_t^{[R]}$
ОАО РАО ЕЭС					**ОАО ГМК Норильский никель**				
0,0030	0,0021	29,1815	0,0015	50,2509	92,6781	90,7067	2,1271	61,2087	33,9556
0,0029	0,0022	23,1849	0,0011	63,5141	89,8943	44,7880	50,1771	26,9262	70,0468
0,0028	0,0026	8,1838	0,0010	64,7332	86,9701	83,8863	3,5458	35,5961	59,0708
0,0027	0,0025	9,3708	0,0007	74,7760	83,9603	81,6208	2,7865	31,8889	62,0191
0,0027	0,0025	5,9743	0,0007	75,0369	81,0301	79,2102	2,2460	29,7462	63,2899
0,0026	0,0024	7,3274	0,0009	65,3427	78,3301	76,6810	2,1053	28,8386	63,1833
0,0026	0,0024	5,6886	0,0010	59,8623	75,8499	74,2248	2,1425	28,9875	61,7830
0,0025	0,0023	9,6724	0,0008	67,8397	73,4975	71,9269	2,1370	28,9647	60,5909
0,0025	0,0023	7,9944	0,0006	76,5757	72,1117	69,6886	3,3603	28,3061	60,7469
0,0024	0,0023	4,3750	0,0007	70,3001	70,0232	69,2972	1,0368	35,8485	48,8049
0,0023	0,0022	5,6976	0,0005	79,0965	67,9027	63,4894	6,4994	26,4556	61,0390
0,0022	0,0021	4,3034	0,0005	76,6212	66,2679	64,2519	3,0423	26,1679	60,5120
0,0022	0,0021	3,9624	0,0006	73,2796	65,0457	63,8687	1,8095	30,0466	53,8069
0,0021	0,0020	5,2214	0,0005	77,0510	63,4918	62,8317	1,0396	32,6811	48,5270
0,0021	0,0020	4,0985	0,0006	70,9188	61,7951	58,4873	5,3528	27,4333	55,6061
0,0020	0,0019	4,8691	0,0006	70,6623	60,8089	57,9936	4,6298	25,4439	58,1576
0,0020	0,0019	4,6199	0,0006	70,2334	61,7038	60,2837	2,3015	33,1126	46,3362
0,0019	0,0018	6,3562	0,0005	76,3257	62,3632	62,3362	0,0432	54,8219	12,0926
0,0019	0,0018	4,2148	0,0005	74,2349	62,5587	58,2835	6,8338	51,2100	18,1409
0,0019	0,0018	7,3161	0,0005	74,9317	62,6353	54,8500	12,4296	45,3764	27,5546
ОАО Газпром					**ОАО Сургутнефтегаз**				
13,6332	15,4930	-13,6417	19,8181	-45,3669	1,9644	1,9640	0,0183	2,0127	-2,4593
13,0986	13,8757	-5,9323	19,4093	-48,1784	2,0514	2,4962	-21,6846	2,4997	-21,8557
12,5853	14,0162	-11,3701	19,4589	-54,6166	1,9695	2,0531	-4,2442	2,2752	-15,5219
12,1495	13,2815	-9,3173	19,3220	-59,0360	1,9091	1,9157	-0,3462	1,9901	-4,2451
11,9400	13,3602	-11,8949	19,4773	-63,1268	1,8624	1,9562	-5,0352	2,0228	-8,6124
11,6304	14,6336	-25,8223	20,4393	-75,7404	1,8177	1,9099	-5,0748	2,0387	-12,1573
11,2539	11,9684	-6,3491	19,8130	-76,0553	1,7594	1,8458	-4,9105	2,0321	-15,4956
10,9752	11,5723	-5,4407	19,3134	-75,9734	1,7069	1,7436	-2,1513	1,9893	-16,5471
10,6228	12,7871	-20,3735	19,7049	-85,4963	1,6528	1,7501	-5,8877	1,9915	-20,4893
10,2933	10,8670	-5,5738	19,1479	-86,0231	1,6203	1,6770	-3,4956	1,9751	-21,8958
9,9828	11,3920	-14,1168	19,1262	-91,5924	1,5717	1,7454	-11,0540	2,0222	-28,6605
9,7094	11,0981	-14,3022	19,0983	-96,6981	1,5588	1,5546	0,2648	1,9683	-26,2705
9,7490	11,1062	-13,9212	19,2015	-96,9576	1,6934	1,7751	-4,8258	2,0624	-21,7917
9,4851	14,8189	-56,2325	21,1854	-123,3542	1,6701	2,3302	-39,5263	2,4859	-48,8504
10,4166	10,0265	3,7445	19,1617	-83,9545	1,6552	1,9863	-20,0047	2,0519	-23,9684
10,1488	27,2428	-168,4326	27,4524	-170,4979	1,6142	1,7482	-8,2993	2,0644	-27,8893
10,3754	19,5907	-88,8186	19,7984	-90,8202	1,5867	1,5655	1,3371	1,9779	-24,6534
10,5247	18,2328	-73,2387	22,7180	-115,8542	1,5482	1,7004	-9,8319	2,0138	-30,0747
10,2859	12,3049	-19,6285	22,0430	-114,3027	1,5143	1,5443	-1,9831	1,9693	-30,0430
10,6926	11,2823	-5,5155	19,3427	-80,8984	1,5360	1,5896	-3,4910	1,9768	-28,7016

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Несмотря на сложность процедуры адаптивного моделирования по сравнению с обычным регрессионным анализом, затраты на расчеты компенсируются получением результатов с более высоким уровнем точности. Заметим, что вопрос точности в моделировании волатильности продолжает интересовать исследователей. В настоящее время для ее моделирования, кроме ARCH, используются модели GARCH, GARCH-M, AGARCH, AGARCH-M, EGARCH, EGARCH-M. Общий вид этих моделей можно найти в работах Ю.П. Лукашина и других авторов [3, 6]. Построение многих из этих моделей требует применения процедур, сравнимых по сложности с адаптивной. Поэтому полученный результат, несмотря на его эмпирический характер, заслуживает особого внимания. Безусловно, и авторы хорошо это понимают, необходимо продолжать вычислительные эксперименты, статистика которых позволила бы получить окончательный вывод.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айвазян С. А.* Прикладная статистика и основы эконометрики : учебник / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1988. – 1022 с.

2. *Давнис В.В.* Адаптивное прогнозирование: модели и методы : / В.В. Давнис. – Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1997. – 196 с.

3. *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов / Ю.П. Лукашин. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.

4. *Engle R.* Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The “ARCH-M Model”/ R. Engle, D. Lilien, R. Robins // Econometrica. – 1987. – № 55.

5. *Engle R.* Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation / R. Engle // Econometrica. – 1982. – № 50. – P. 987-1007.

6. *Green W.H.* Econometric Analysis, 4th ed. / W.H. Green. – New York: Macmillian Publishing Company, 2000. – 1004 p.