УДК 681.3.07

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО РЫНКА

© 2004 В. Л. Хацкевич, С. В. Паринов

Воронежский филиал Всероссийского заочного финансово-экономического института

В данной работе изучается общая модель экономики, берущая свое начало от Л. Вальраса и получившая развитие в более поздних исследованиях [1]. Исходными компонентами, рассматриваемой модели являются совокупности отдельных производителей и отдельных потребителей. Состояние экономической системы в любой момент времени описывается динамической моделью, характеризующей приспособление цен во времени к вариациям спроса потребителей на товары и предложения товаров производителями в условиях конкуренции.

Каждый потребитель в рамках бюджетных ограничений стремится получить максимальное удовлетворение от выбираемого им ассортимента товаров и услуг. Поведение производителей характеризуется стремлением максимизировать прибыль от производства, являющуюся разностью дохода от продажи произведенных товаров и затрат на осуществление производства.

Итак, предполагается, что каждый из участников экономической системы максимизирует некоторую величину при определенных ограничениях. При этом и целевая функция и ограничения выражаются в ценах на товары.

Отметим, что в исследуемой модели не делается различия между продуктами производства и первичными факторами (такими как труд, земля и т.п.), мы объединяем их в одно понятие товара.

Цены на товары называются равновесными, если производители и потребители, действующие наилучшим для себя образом, сообразуясь при этом с бюджетными ограничениями, обеспечивают такое положение вещей, когда спрос на каждый товар не превосходит его предложения.

С точки зрения математической экономики, состояние равновесия является необходимым условием стабильности, нормального функционирования экономики. Важный вопрос — о существовании равновесных цен — получил решение в трудах Эрроу, Дебре, Гейла, Никайдо и других математиков и экономистов [2].

Моделирование динамики цен на реальном рынке товаров П. Самульсон [3] предложил описывать системой дифференциальных уравнений. В этой модели считается, что скорости изменения цен на рынке пропорциональны функциям избыточного спроса на соответствующие товары.

Такой подход соответствует классическому закону спроса и предложения, который утверждает, что цена товара повышается, если спрос на товар превышает имеющееся предложение и понижается, если предложение превосходит спрос.

Важным вопросом в динамической модели формирования цен является вопрос устойчивости процесса их формирования. А именно, важно, чтобы при любых начальных ценах текущие цены стремились к некоторым равновесным. В этом отражается сущность процесса конкуренции. Целью этой работы является исследование устойчивости непрерывной динамической модели рынка в условиях многозначных функций избыточного спроса. Устойчивость такой модели ранее рассматривалась лишь для однозначных функций избыточного спроса (см., напр., [4]). Однако это является существенным упрощением модели и не отражает в полной мере реальных экономических ситуаций. При этом статическая модель исследована для многозначного случая (см. [2]).

Непрерывная динамическая модель для многозначных функций избыточного спроса описывается дифференциальными включениями. Поэтому мы используем результаты теории дифференциальных включений (см., напр., [5]).

Мы будем использовать следующие обозначения и определения. Вещественное k-мерное евклидово пространство будем обозначать E^k. Его элементами являются векторы $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$. Скалярное произведение $(\bar{x}, \bar{y})$ между векторами $\bar{x}, \bar{y} \in E^k$ и норма $\|\bar{x}\|$ определяются обычным образом

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{k} x_j y_j, \quad \|\bar{x}\| = (\bar{x}, \bar{x})^{\frac{1}{2}}.$$

Множество векторов из E^k с неотрицательными компонентами будем обозначать E_+^k, а соответствующие векторы будем называть неотрицательными.

Предположим, что на рынке имеется конечное число r различных товаров, включая услуги всех видов. Если один и тот же товар покупается и продается в различных местах, то его можно рассматривать как k различных товаров. Деньги мы тоже будем рассматривать как товар с нулевым номером, так что всего количество товаров считаем равным $r+1$.

Фирму или другое подобного рода производственное объединение, производящее товары, будем называть производственной единицей. Будем считать, что у каждой производственной единицы j $(j = 1, 2, ..., n)$ имеется множество Y_j возможных производственных планов. Элементами $\bar{y}_j \in Y_j$ являются векторы из E^{r+1}, h-я компонента которых $y_{h,j}$ обозначает выпуск товара h в этом плане. Затраты обозначаются отрицательными компонентами. Множество $Y = \sum_j Y_j$ представляет собой набор всевозможных графиков затрат и выпуска всего производственного сектора.

Каждая из производственных единиц стремится организовать производство таким образом, чтобы максимизировать свои прибыли.

Предположим, что имеется m потребителей с допустимыми множествами потребления $X_i \subset E_-^{r+1}$ (i=1,.., m).

Потребитель i стремится выбрать допустимый вектор потребления $\bar{x}_i \in X_i$, максимизирующий его функцию полезности. Пусть $\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i$ обозначает совокупный вектор потребления.

Таким образом, каждому вектору цен $\bar{p} = (p_0, p_1, ..., p_r)$ набора товаров соответствует совокупный вектор спроса $\bar{x}(\bar{p})$, и совокупный вектор производства (предложения) $\bar{y}(\bar{p})$, обладающие соответствующими свойствами оптимальности. Такие векторы $\bar{x}(\bar{p})$ и $\bar{y}(\bar{p})$, вообще говоря, не единственные. Они порождают соответственно многозначные функции спроса $\phi(\bar{p})$ и предложения $\psi(\bar{p})$, а их разность порождает многозначную функцию избыточного спроса:

$$F(\bar{p}) = \phi(\bar{p}) - \psi(\bar{p})$$

(см. напр. [1, ч. II, гл. 1]).

Динамику процесса установления равновесной цены в этом случае можно описать дифференциальным включением в пространстве E^{r-1}

$$\frac{d\bar{p}}{dt} \in F(\bar{p}) \tag{1}$$

при заданной начальной цене $\bar{p}(0) = \bar{p}^0$.

Под решением дифференциального включения (1) будем понимать векторную абсолютно непрерывную функцию $\bar{p}(t)$, которая удовлетворяет соотношению (1) почти всюду на заданном промежутке изменения t.

Равновесная цена $\bar{p}^*$ в этой ситуации удовлетворяет операторному включению в E^{r-1}

$$0 \in F(\bar{p}^*). \tag{2}$$

В случае однозначной функции избыточного спроса $\bar{f}(\bar{p})$ вместо (1) получим векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{f}(\bar{p}), \tag{3}$$

а вместо (2) операторное уравнение

$$\bar{f}(\bar{p}^*) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (3) и включение (1) описывают ситуацию, при которой цена некоторого товара повышается или понижается в зависимости от того, будет ли избыточный спрос на этот товар положителен или отрицателен. Скорость этого повышения или понижения пропорциональна размеру избыточного спроса или избыточного предложения по каждому товару.

Вместо векторного уравнения (3) можно записать систему уравнений

$$\frac{dp_j}{dt} = \lambda_j f_j(\bar{p}) \quad (j = 0, 1, ..., r) \tag{5}$$

с произвольными положительными коэффициентами λ_j. Числа $\lambda_j > 0$ называют коэффициентами подстройки цены на j-й продукт. Такую модель динамики рыночных цен для общего случая r товаров впервые предложил П. Самульсон [3].

Подходящим выбором единиц измерения для каждого товара система (5) приводится к виду (3).

При естественных предположениях на математическую модель рынка (см. [1, ч. II гл. 2]) оказывается, что многозначная функция F полунепрерывна сверху и ограничена, а ее образы являются непустыми выпуклыми замкнутыми и ограниченными множествами, лежащими в E^{r+1}.

Такие условия на функцию обобщенного спроса ниже будем называть основными.

Кроме того, обычные предположения на модель рынка обеспечивают выполнение закона Вальраса

$$(\bar{p}, \bar{z}) \leq 0 \quad (\forall \bar{z} \in F(\bar{p})). \tag{6}$$

Если (6) выполнено в форме равенства, то это мы будем называть законом Вальраса в форме равенства.

Существование равновесной цены гарантирует следующее утверждение, принадлежащее Гейлу (см. [1, ч. II гл. 2]).

Лемма 1. *Пусть многозначная функция избыточного спроса F удовлетворяет основным условиям и выполняется закон Вальраса (6). Тогда существует неотрицательное решение $\bar{p}^* \in E_+^{r+1}$ операторного включения (2) (равновесная цена). Множество равновесных цен замкнуто.*

Существование решения дифференциального включения (1) с заданным начальным условием, когда F удовлетворяет основным условиям, известно (см. [5]). Существование неотрицательного решения обеспечивает следующее утверждение (см. [6]).

Лемма 2. *Пусть многозначная функция избыточного спроса F удовлетворяет основным условиям, выполняется закон Вальраса (6) и условие неотрицательности спроса при нулевой цене:*

если $\bar{p} \geq 0$, причем $p_i = 0$,

то $z_i \geq 0$ для $\forall \bar{z} \in F(\bar{p})$.

Тогда для каждой начальной цены $\bar{p}^0 \geq 0$ существует неотрицательное решение $\bar{p}(t) \geq 0$ дифференциального включения (1) (динамика рынка), удовлетворяющее начальному условию

$$\bar{p}(0) = \bar{p}^0. \tag{7}$$

Это решение определено при всех $t \geq 0$ и удовлетворяет оценке

$$|\bar{p}(t)| \leq |\bar{p}^0| \quad (\forall t \geq 0). \tag{8}$$

Условие неотрицательности, фигурирующее в лемме 2, означает, что в случае цены $p_i = 0$ спрос на i-й товар не меньше предложения.

Ниже дополнительно будем предполагать, что решение задачи (1), (7) при любом начальном распределении цен $\bar{p}^0 \geq 0$ определяется единственным образом вправо. Это предположение имеет естественный экономический смысл. В случае однозначной функции избыточного спроса $\bar{f}(\bar{p})$ оно обеспечивается, например, гладкостью $\bar{f}(\bar{p})$.

В рыночной экономике в роли регулятора, согласовывающего действия всех участников и устанавливающего равновесные цены, выступает рынок. Возможность достижения равновесия в реальных экономических системах обеспечивается глобальной устойчивостью положения равновесия в смысле математической теории устойчивости по Ляпунову.

Рынок назовем (глобально) устойчивым, если при любых начальных ценах $\bar{p}^0 \geq 0$ каждая из траекторий, задачи (1), (7), описывающих динамику (процесс изменения) цен, приближается к некоторому равновесному состоянию при возрастании времени.

Исследуем устойчивость рынка в условиях выполнения аксиомы выявленного предпочтения. Чтобы пояснить содержательный смысл этого условия, вначале введем это понятие для индивидуальной функции спроса $\varphi(\bar{p})$ одного из потребителей.

Будем говорить, что вектор $\bar{z}^1 \in \varphi(\bar{p}^1)$ выявлено предпочитается вектору $\bar{z}^2 \in \varphi(\bar{p}^2)$ при $\bar{p}_1 \neq \bar{p}_2$, если

$$(\bar{p}^1, \bar{z}^1) \geq (\bar{p}^1, \bar{z}^2) \quad (\bar{z}^1 \neq \bar{z}^2). \tag{9}$$

Здесь $(\bar{p}, \bar{z})$ описывает общие издержки потребителя для данной цены $\bar{p}$ и вектора потребления $\bar{z}$. Другими словами, потребитель предпочитает максимизировать приобретаемый набор товаров в рамках своего бюджетного ограничения.

Функция спроса $\varphi(\bar{p})$ удовлетворяет (слабой) аксиоме выявленного предпочтения, если из условия (9), выполненного для некоторых $\bar{z}^j \in \Phi(\bar{p}^j)$ $j = 1,2$; $\bar{z}^1 \neq \bar{z}^2$ следует, что для этих $\bar{z}^1, \bar{z}^2$ справедливо

$$(\bar{p}^2, \bar{z}^1) > (\bar{p}^2, \bar{z}^2).$$

Это означает, что если набор товаров $\bar{z}^1$ выявлено предпочитается набору товаров $\bar{z}^2$ (при ценах $\bar{p}^1$), то набор товаров $\bar{z}^2$ не может выявлено предпочитаться набору товаров $\bar{z}^1$ при ценах $\bar{p}^2$.

Будем говорить, что совокупная функция избыточного спроса F удовлетворяет (слабой) аксиоме выявленного предпочтения, если для любых цен $\bar{p}^1 \neq \bar{p}^2$ из соотношения

$$(\bar{p}^1, \bar{z}^2 - \bar{z}^1) \le 0,$$

выполненного для некоторых $\bar{z}^j \in F(\bar{p}^j)$ $j = 1,2$; $\bar{z}^1 \neq \bar{z}^2$ следует, что для этих $\bar{z}^1, \bar{z}^2$ имеет место неравенство

$$(\bar{p}^2, \bar{z}^2 - \bar{z}^1) < 0.$$

При дальнейших исследованиях важным является следующее условие (A) на функцию избыточного спроса F.

(A). Из того, что $\bar{q}$ — вектор равновесных цен, а $\bar{p}$ равновесным не является, вытекает неравенство:

$$(\bar{q}, \bar{z}) > 0 \quad (\forall \bar{z} \in F(\bar{p})). \tag{10}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены основные предположения на функцию избыточного спроса F и закон Вальраса (6) в форме равенства. Пусть дополнительно функция избыточного спроса удовлетворяет (слабой) аксиоме выявленного предпочтения. Тогда выполнено условие (A).*

Доказательство. Пусть $\bar{p}^*$ любой фиксированный вектор равновесия, а $\bar{p}$ — любой неравновесный вектор. Положим $\bar{p}^2 = \bar{p}^*$ и $\bar{p}^1 = \bar{p}$. Тогда для любых фиксированных $\bar{z} \in F(\bar{p})$ в силу закона Вальраса имеем:

$$(\bar{p}, \bar{z}^* - \bar{z}) = (\bar{p}, \bar{z}^*) \quad (\forall \bar{z}^* \in F(\bar{p}^*)).$$

В частности, т.к. $\bar{p}^*$ — вектор равновесия, то $0 \in F(\bar{p}^*)$. Поэтому для $\bar{z}^* = 0$ можем записать

$$(\bar{p}, 0 - \bar{z}) = 0 \ (\forall \bar{z} \in F(\bar{p})).$$

Тогда по (слабой) аксиоме выявленного предпочтения получим

$$(\bar{p}^*, 0 - \bar{z}) = -(\bar{p}^*, \bar{z}) < 0 \quad (\forall \bar{z} \in F(\bar{p})).$$

Последнее означает выполнение условия (A).

Условие (A) в соответствии с леммой 3 можно назвать (слабой) аксиомой выявленного предпочтения при равновесных ценах.

Лемма 4. *Пусть выполнены основные предположения на функцию избыточного спроса F и закон Вальраса (6). При выполнении условия (A) множество Q_- всех возможных неотрицательных векторов равновесия выпукло и замкнуто в E^{r-1}.*

Доказательство. Непустота множества Q_- и его замкнутость обеспечивается леммой 1. Пусть $\bar{p}$ и $\bar{q}$ любые элементы из Q_- и

$$\bar{w} = \lambda \bar{p} + (1 - \lambda)\bar{q},$$

где $\lambda \in (0,1)$. Тогда $\bar{w} \in E_+^{r-1}$. Если $\bar{w}$ не является равновесным вектором, а условие (A) выполнено, то

$$(\bar{p}, \bar{z}) > 0, \ (\bar{q}, \bar{z}) > 0 \ (\forall \bar{z} \in F(\bar{w})).$$

Следовательно, для $\forall \bar{z} \in F(\bar{w})$ имеем

$$(\bar{w}, \bar{z}) = \lambda(\bar{p}, \bar{z}) + (1 - \lambda)(\bar{q}, \bar{z}) > 0,$$

что противоречит закону Вальраса (6).

Таким образом, $\bar{w}$ есть равновесный вектор и поэтому множество Q_+ выпукло.

Утверждение леммы 4 позволяет ввести элемент регулирования в модель рынка. Выбрать положение равновесия из множества Q_+ в соответствии с заданным критерием оптимальности. По этому поводу имеются результаты в [6]. Общие подходы по этой теме изложены в [7].

Теорема 1. *Пусть выполнены основные условия на функцию избыточного спроса, закон Вальраса (6) и (слабая) аксиома выявленного предпочтения (A) при равновесных ценах. Пусть, кроме того, имеет место единственность вправо решения задачи (1), (7). Тогда рынок устойчив.*

Доказательство. Если решение $\bar{p}(t)$ задачи (1), (7) в некоторый момент времени (например, начальный) совпадает с каким-либо равновесным вектором, то в силу единственности вправо это решение и при всех $t > 0$ будет равно этому равновесному вектору. Пусть теперь $\bar{p}(t)$ — некоторое решение задачи (1), (7) не являющееся равновесным вектором ни при каких $t \ge 0$, а $\bar{p}^*$ — некоторый вектор цен равновесия. Рассмотрим расстояние

$$\upsilon(t) = \left\| \bar{p}(t) - \bar{p}^* \right\|^2.$$

Дифференцируя эту функцию и используя закон Вальраса (6) и условие (A), получим почти при всех $t \in (0, \infty)$

$$\frac{dv}{dt} = 2(\bar{p}(t) - \bar{p}^*, z) = -2(\bar{p}^*, \bar{z}) < 0,$$

где $\bar{z} \in F(\bar{p}(t))$. Тогда $v(t)$ монотонно убывает и при этом остается положительной функцией. Следовательно, $v(t)$ сходится к неотрицательному пределу при $t \to +\infty$. Поэтому скорость изменения $\frac{dv}{dt}$ должна стремиться к нулю на некоторой подпоследовательности точек $t_n \to +\infty$. Значит, найдутся элементы $\bar{z}^n \in F(\bar{p}(t_n))$ такие, что

$$(\bar{p}, \bar{z}^n) \to 0 \text{ при } t_n \to +\infty. \quad (11)$$

Кроме того, поскольку значения $\bar{p}(t_n)$ лежат в замкнутом ограниченном множестве (шаре см. (8)), то найдется сходящаяся подпоследовательность из $\{\bar{p}(t_n)\}$. Без ограничения общности можно считать, что такова сама эта последовательность. Пусть

$$\bar{p}(t_n) \to \bar{q} \text{ при } t_n \to +\infty.$$

В условиях теоремы многозначная функция F полунепрерывна сверху и обладает компактными образами. Поэтому она локально ограничена в окрестности точки $\bar{q}$. Тогда последовательность $\{\bar{z}^n\}$ ограничена и значит содержит сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что сама последовательность $\{\bar{z}^n\}$ сходится к некоторому элементу $\bar{w}$ при $n \to \infty$.

Опять, воспользовавшись полунепрерывностью сверху функции F, заключим, что $\bar{w} \in F(\bar{q})$. Теперь, на основании (11) можно сделать вывод, что

$$(\bar{p}^*, \bar{w}) = 0.$$

Тогда по условию (А) получаем, что $\bar{q}$ равновесный вектор.

Для заданного решения $\bar{p}(t)$ задачи (1), (7) рассмотрим теперь другую функцию

$$v_1(t) = \|\bar{p}(t) - \bar{q}\|^2.$$

Согласно предыдущим рассуждениям, расстояние $v_1(t)$ между $\bar{p}(t)$ и $\bar{q}$ монотонно убывает и для некоторой подпоследовательности t_n оно стремится к нулю. Следовательно, расстояние между $\bar{p}(t)$ и $\bar{q}$ должно стремиться к нулю, т.е.

$$\bar{q} = \lim_{t \to \infty} \bar{p}(t).$$

Это доказывает устойчивость.

Заключение. Таким образом, в работе установлена глобальная устойчивость математической модели конкурентного рынка в условиях многозначных функций спроса и предложения при выполнении (слабой) аксиомы выявленного предпочтения. Такой результат ранее был установлен лишь для однозначных функций спроса и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашманов, С.А.* Введение в математическую экономику / С. А. Ашманов. — М. : Наука, 1984. — 293 с.

2. *Никайдо, Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. — М. : Мир, 1972. — 514 с.

3. *Samuelson, P.A.* Foundations of economic analysis / P. A. Samuelson. — Cambrige : Massachusetts, 1948.

4. *Arrow, K.J. Hurwicz, L.* On the Stability of the competitive equilibrium I, Econometrica 1958. V. 26. P. 522—552.

5. *Филиппов, А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985.

6. *Хацкевич, В.Л.* Математическое моделирование процессов динамики и управления в экономике : монография / В. Л. Хацкевич. Воронеж : Центрально-Черноземное книжное издательство, 2003. — 117 с.

7. *Макаров, В.Л.* Математическая теория экономической динамики и равновесия / *В. Л. Макаров, А. М. Рубинов.* — М. : Наука, 1973. — 335 с.