УПРАВЛЕНИЕ ИЛИ САМОРЕГУЛИРОВАНИЕ? (МЕЖДУ КУХАРКАМИ И ОЛИГАРХАМИ)

С. В. Жак

Мы и кухарку каждую выучим управлять государством!
В. В. Маяковский

В каждой сложной системе с ценой управления существует оптимальный уровень хаоса.
Н. Н. Моисеев

Проблемы управления экономикой обсуждаются, видимо, столько же времени, сколько существует сама экономика, и это обсуждение приобретает тем большую остроту и злободневность, чем хуже результаты ее (экономики) функционирования.

В течение всего периода «строительства социализма» (вплоть до его «развитого» уровня) декларировалась возможность полного регулирования всех отраслей и характеристик экономики, — от первых пятилеток и всеобъемлющего влияния ГОСПЛАНА до обсуждения на КВН, как планировать производство пуговиц. Объявлялось, что в условиях социализма обычные экономические законы не имеют силы, что цены и объемы производства полностью определяются решениями правительства, и даже природа им подчиняется («Течет вода Кубань-реки, куда велят большевики!», «Горы на пути — своротим горы, вычерпаем реки и моря!»). Даже основные характеристики экономики (прибыль, ее норма и пр.) объявлялись капиталистическими пережитками, и вместо оценки хозяйственных мероприятий по этим параметрам придумывались новые, «социалистические» величины, вроде срока окупаемости и нормативной величины рентабельности. Результатом такой политики явилось обнищание страны, «казарменный» социализм и невероятные диспропорции между производством предметов потребления и средств производства (к которым относились и вооружения).

Когда выяснилось, что природа и экономика упорно не желает подчиняться решениям правительства и прогнозам ГОСПЛАНА (которые к тому же оперировали сплошь «лукавыми цифрами»), и произошел переход к «рыночной экономике», возобладала противоположная точка зрения: ничего не надо планировать «сверху», все сама отрегулирует «невидимая рука» рынка. Однако прошедшие годы показали, что и такой подход отнюдь не ведет к благоденствию: корыстные интересы олигархов и отдельных монопольных отраслей дезорганизуют экономику.

Опыт развития разных стран показал, что необходимо сочетание методов регулирования экономики с учетом внутренних стимулов и пружин развития.

В данной статье предпринята попытка подтвердить необходимость такого комбинированного подхода — не на уровне общих разговоров, а на опыте анализа конкретных моделей экономических процессов на разных уровнях: от внутренних характеристик отдельных фирм до межотраслевых связей и экзогенных характеристик.

1. Внутренние цены подразделений и объединений фирм

В современных условиях широкой кооперации, когда конечная продукция, продаваемая потребителю, является результатом действия многих отдельных предприятий (или их подразделений), возникают проблемы организации системы расчетов между этими предприятиями, которая адекватно учитывала бы вклад каждого участника и стимулировала их заинтересованность в производстве компонент, необходимых для производства конечной продукции. Эти проблемы осложняются необходимостью реагировать на нестабильные, растущие цены покупных изделий, рост (индексацию) собственных затрат и запаздывание (лаг) взаимных расчетов (особенно важен учет такого запаздывания при значительной инфляции).

Ниже рассматриваются модели таких взаиморасчетов, обеспечивающие более или менее “справедливое” распределение прибыли между участниками, в которых управляемыми факторами являются цены P_i, назначаемые i-м участником на свою продукцию, передаваемую для использования другому предприятию, и дополнительные вознаграждения Δ_i, получаемые этим участником после реализации конечной продукции. Рассмотрим n предприятий, связанных между собой (для простоты анализа) линейной технологией производства продукции. Пусть затраты i-го участника на одно изделие равны C_i, объем производства считаем фиксированным.

Если отпускная внутренняя цена единицы продукции для каждого из первых ($n-1$) предприятий равна P_i, то полные затраты S_i каждого участника и прибыль его на единицу продукции равны:

$$S_i = P_i - 1 + C_i,\ P_0 = 0,\ \pi_i = P_i - S_i = P_i - P_{i-1} - C_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Естественное требование безубыточности дает ограничение на цены:

$$\pi_i \geq 0, \text{ то есть } P_i \geq S_i.$$

Цена готовой продукции P_n задается экзогенно (либо антимонопольным законодательством, либо рынком).

Скорректированная прибыль каждого участника $\hat{\pi}_i$ равна его собственной прибыли π_i плюс «дележ» Δ_i, после реализации продукта («добавки» участникам возникают за счет изъятия части прибыли у n-го предприятия):

$$\hat{\pi}_i = \pi_i + \Delta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\Delta_i \geq 0,\ i < n,\ \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0.$$

Область R возможных изменений внутренних цен P_i представляет собой симплекс, определяемый неравенствами:

$$0 \leq P_1 - C_1 \leq P_2 - C_2 - C_1 \leq \ldots \leq P_n - A.$$

Вершины его определяются выбором ($n-1$)-го равенства из этих n неравенств и число различных вариантов равно n.

Для обеспечения «справедливого» распределения прибыли между участниками согласованные действия между ними целесообразно строить на основе выравнивания и максимизации их норм прибыли за счет внутренних цен P_i и дележей Δ_i:

$$\hat{\rho}_i = \frac{\hat{\pi}_i}{S_i} = \frac{\pi_i + \Delta_i}{S_i} = \rho = \frac{\sum_i \hat{\pi}_i}{\sum_i S_i} = \frac{P_n - A}{\sum_{i=1}^{n-1} P_i + A}.$$

Максимизация нормы прибыли ρ эквивалентна минимизации знаменателя, т.е. минимизации суммы внутренних цен P_i ($i = 1, \ldots, n-1$). Внутренние цены P_i ($i = 1, \ldots, n-1$) при этом должны удовлетворять условиям, обеспечивающим неотрицательность прибылей π_i ($i = 1, \ldots, n$), поэтому для первых ($n-1$) предприятий

$$P_i = \underline{P}_i = S_i = \sum_{k=1}^{i} C_k,\ \Delta_i = \rho S_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Для рентабельного в целом объединения (концерна) ($\sum_i \pi_i = \pi \geq 0$) существуют цены P_i ($i = 1, \ldots, n-1$) и перераспределение прибыли «дилера» Δ_i такие, что обеспечивается равенство норм прибыли ρ участников, и эта общая норма прибыли максимальна для всех участников тогда и только тогда, когда внутренние цены определяются по себестоимости.

Если n-му предприятию удастся реализовать изделия (или часть их) по более высокой цене, то дополнительная прибыль подлежит распределению между остальными участниками договора, что создает стимулирование увеличения выпуска продукции для всех предприятий объединения. Распределение необходимо проводить пропорционально затратам каждого на единицу продукции (только при этом сохраняется равенство норм прибыли). Это обстоятельство позволяет проводить расчеты для минимальной отпускной цены, а потом корректировать «дележ». Легко показать [1], что отступление от полученного «рецепта» автоматически ухудшает показатели нарушителя.

Рассмотренная задача (и ряд естественных обобщений ее) подтверждает необходимость управления ценами для организационно связанных участников производства.

2. Защита отечественного производителя (патернализм)

В настоящее время во многих отраслях, и прежде всего, в аграрных, производство испытывает значительные трудности, причин которых достаточно много, но одной из основных является более высокая, чем во многих развитых странах, себестоимость продукции. Следовательно, она не может (без дотаций) конкурировать с импортной даже на внутреннем рынке [2].

Для защиты внутреннего производителя и его стимулирования применяются, в основном, два финансовых рычага: обложение импорта дополнительными налогами и дотация внутреннему производителю. Естественно, фискальные цели способствуют росту доходов, но эти тенденции могут привести к неприятным эффектам: большая величина налога (наценки) приведет к резкому уменьшению импорта, а слишком малая величина дотации — к сокращению собственного производства (в аграрном секторе — к срыву снабжения населения собственными продуктами).

При существующих технологиях, резком росте тарифов на транспорт и энергоносители себестоимость почти всех товаров в сельском хозяйстве оказывается высокой. Поэтому они не только не выдерживают конкуренции с импортной продукцией, но и приводит к убыточности товарного производства. Опыт других стран свидетельствует о том, что даже при прогрессивных технологиях и ограниченных конкуренцией тарифах монополий стимулирование сельскохозяйственного производства невозможно без дотаций.

При этом возникают два основных вопроса: откуда взять эти дотации и какую величину они должны составлять? Очевидно, что выделение дотаций из бюджета (федерального или регионального) обременительно даже при благополучном состоянии экономики и практически невозможно при дефицитном бюджете. Следовательно, дотации должны базироваться на «самообеспечении», черпаться из тех средств, которые государство (или регионы) могут собрать с аналогичных импортируемых товаров, одновременно решая проблему повышения их цены, то есть способствуя сбыту товаров отечественного производства. Субъективно-директивное назначение величин дотации β (как доли себестоимости) и наценки η (на цену импортной продукции) чревато крайне серьезными отрицательными последствиями: малые наценки не обеспечат необходимых дотаций, большие наценки исключат необходимый приток импортных товаров; малые дотации не стимулируют развитие отечественного производства и т. п. Поэтому необходимо сформировать оптимизационную задачу назначения наценок и дотаций, стимулируя как собственное производство, так и приток необходимых (пока, к сожалению) импортных товаров.

Такая оптимизационная задача (двухкритериальная) в безразмерных (масштабированных) переменных имеет вид:

$$X_1 \geq X_{10},\ X_1 + X_2 \geq 1, \tag{1}$$

$$X_1 + \delta X_2 \leq a,\ b + \beta X_1 \leq \delta_1 \eta X_2, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} F_1 = X_1[p_1 + \beta(1 + p_1)] \to \max, \\ F_2 = \delta_0 X_2 p_2 \to \max, \end{gathered} \tag{3}$$

где X_1, X_2 — масштабированные поставки продукции отечественным производителем и импортером; ограничения (1) отражают необходимые величины поставок, (2) — покупательную способность населения и условие конкурентоспособности; целевые функции — прибыль отечественного производства и импортера).

Сформированная двухкритериальная задача имеет трехэтапный характер:

- на первом этапе при фиксированных значениях наценки η и дотации β определяется множество эффективных решений (множество Парето) линейной задачи, то есть часть верхней границы многогранника, определяемого условиями (1)—(2);

- на втором этапе исследуется изменение этого множества при росте параметров β и η

- наконец, на третьем этапе производится выбор точки на множестве Парето (путем максимизации синтезирующей функции полезности — линейной связки двух введенных критериев с весами, задаваемыми ЛПР, или с помощью других принципов оптимальности).

При этом естественные условия неотрицательности экономических характеристик порождают, в силу неравенств (1) и (2), верхние и нижние границы изменения наценки и дотации.

Неравенства (1) определяют верхнюю границу множества альтернатив. Условие (2) отсекает от нее отрезок, который и является множеством Парето при критериях F_1 и F_2 (или X_1, X_2).

Оказывается, что при увеличении β этот отрезок стягивается к своей левой границе.

Остается распорядиться значением η, обеспечивающим дополнительные условия (непустоту множества Парето, безубыточность импортера и отечественного производителя) и максимизирующего взвешенную сумму критериев — функцию полезности.

Построенная математическая модель формирования доли наценки на импортную продукцию и дотации (в долях себестоимости) позволяет обеспечить конкурентоспособность продукции отечественного производства и заинтересованность его и импортера в поставке необходимого количества.

Расчеты показали, что такая модель не только помогает назначать научно обоснованные величины наценки и дотации, но и выявляет причины возникающих противоречий в ценовой политике.

3. Регулирование тарифов естественных монополий

Все мы являемся свидетелями и жертвами непрерывной «войны тарифов» между различными фирмами и отраслями, в первую очередь между энергетиками и транспортниками. Война эта проходит в форме поочередного повышения тарифов и приводит к непрерывному росту цен на потребление электроэнергии и затрат на перевозку товаров. Прямым следствием этой войны является паралич пространственных связей, а нередко и более страшные социальные последствия — «вымораживание» Приморья в 2000—2001 году, срыв «северного завоза» и т. д. В этой ситуации возникает необходимость ответа на два основных вопроса:

- **Кто виноват** в росте тарифов?
- **Что делать**, чтобы прекратить такой рост?

Одно из последних замечаний на эту тему высказано А. Асмоловым: «Мы уже находим пути государственного регулирования рыночной экономики» [3].

Построение и анализ математических моделей, учитывающих связи между отраслями (монополиями), являются столь же необходимыми, сколь и сложными — и в силу малой изученности таких связей, и в силу их существенной нелинейности, и в силу «непрозрачности» российской экономики, невозможности получить более или менее надежные данные для таких моделей.

Ниже на простейшей модели показано, что:

– поочередный рост тарифов может привести к неограниченному росту их, а следовательно, к экономическому коллапсу;

– назначение тарифов «сверху» является более обоснованным и представляет собой элемент необходимого (даже в условиях рыночной экономики) государственного регулирования.

Следует отметить, что предлагаемая модель директивного формирования тарифов вовсе не означает возврата к административному управлению: в целом экономика остается рыночной, но ее фрагмент, связанный с естественными монополиями, требует участия государства в формировании цен (тарифов).

В модели использован упрощенный, линейный характер связей между рассматриваемыми отраслями, но учет нелинейных поправок не представляет принципиальных трудностей, как и повышение размерности модели.

Будем рассматривать несколько отраслей. Прибыль каждой отрасли равна разности между выручкой W_i и затратами Z_i:

$$\Pi_i = W_i - Z_i = \rho_i Z_i$$

ρ_i — норма прибыли отрасли.

При этом $W_i = x_i V_i$ (V_i — объем производства отрасли, x_i — цена единицы производимой продукции, тариф), $Z_i = Z_{i0} + V_i C_i$ (Z_{i0} — постоянная часть издержек, C_i — удельные издержки на единицу продукции в отрасли).

Переменная часть издержек состоит из двух слагаемых, первое из которых зависит от прямых издержек отрасли на единицу продукции a_i, а вторая — от издержек, связанных с оплатой продукции «смежных» отраслей:

$$Z_i = Z_{i0} + V_i \Sigma b_{ij} x_j, \qquad (4)$$

где b_{ij} — объем продукции смежной отрасли j, необходимый для производства единицы продукции в отрасли рассматриваемой).

Рассмотрим процесс поочередного повышения тарифов: каждая отрасль, не удовлетворенная своей прибылью (или ее нормой), повышает тариф на свою продукцию, что вызывает у других отраслей желание (или необходимость) повышения их тарифов и т. д. Иногда этот процесс приводит к стабилизации тарифов (хотя может длиться достаточно долго, дестабилизируя экономику), но нередко спираль повышения цен (тарифов) раскручивается до бесконечности, процесс расходится и ведет к экономическому коллапсу. Тем более, что аппетиты (желательные нормы прибыли) растут. Инфляционный рост прямых затрат и постоянных издержек также способствует этому нежелательному процессу.

Поочередное повышение тарифов представляет собой не что иное, как метод Зейделя [4] решения линейной системы уравнений

$$W(x) - Z(x) = \rho Z(x)$$

или эквивалентной системы уравнений для безразмерных параметров и переменных

$$x = (B + C)x + \beta \qquad (5)$$

(B, C — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы общей матрицы правых частей, включающие b_{ij} и $r_i = 1 + \rho_i$).

Поскольку известны условия сходимости этого метода [4], **вне области сходимости** метод расходится, что и соответствует «войне тарифов», ведущей к экономическому коллапсу.

Можно воспользоваться различными формами достаточных критериев сходимости метода Зейделя, но правильнее использовать **необходимый и достаточный** критерий:

Для уравнения (5) метод Зейделя сводится к итерационному процессу

$$X^{(k)} = BX^{(k)} + CX^{(k-1)} + \beta, \qquad (6)$$

и корни характеристического уравнения $|C - (E - B)\lambda| = 0$ должны быть по модулю меньше 1.

В двумерном случае, если $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r_2\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \alpha = \begin{pmatrix} 0 & r_1\gamma_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ это условие принимает вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & r_1\gamma_1 \\ r_2\gamma_2\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = r_1 r_2 \gamma_1 \gamma_2$$

или

$$\gamma_1(1+\rho_1)\gamma_2(1+\rho_2) < 1$$

На основании анализа системы уравнений в общем случае могут быть сделаны следующие выводы:

I. Государственное регулирование тарифов (цен) естественных монополий **необходимо**. Регулируемые тарифы определяются линейной системой уравнений, решение которой (при фиксированных ρ_i) легко найти методом Гаусса.

II. Область допустимых тарифов R_x определяется условием неотрицательности вектора прибылей:

$$\Pi = W - Z \geq 0$$

и представляет собой конус с единственной вершиной x^0 $\Pi(x^0) = 0$ и n ребрами $s^i = 0$, отвечающими равенству нулю прибыли i-й монополии.

Если не выполнено условие $x^0 \geq 0$, то $R_\pi = \{0, s^1, .., s^n\}$ — пуста, не существует набора тарифов, отвечающих неотрицательности прибыли **всех** монополий.

III. При $x^0 \geq 0$ множества Парето нет, возможен безудержный рост прибылей всех монополий.

Естественное требование $\rho_i \leq \bar{\rho}$ выделяет в пространстве альтернатив вершину $\tilde{x}$, которая и является единственной точкой Парето.

Максимально возможное значение общей нормы прибыли $\bar{\rho}$ определяется условием продуктивности матрицы в правой части уравнения (положительности решений системы уравнений).

4. Обобщение модели Солоу и оптимальная доля инвестиций

Известная модель Солоу [5], развивающая модель Ф. Рамсея (1928), определяет «золотое правило» оптимальной доли инвестиций для единственного устойчивого равновесного состояния, вкладываемых в развитие производства s, которая оказывается равной коэффициенту эластичности а производственной функции Кобба-Дугласа по капиталу.

Следует отметить, что возражения против ориентации на постоянную величину s, связанные с ориентировкой не на точку равновесия, а на переходный процесс, с заменой критерия максимального потребления на душу населения дисконтированным потреблением за время переходного процесса, вряд ли можно считать корректными. Такая модифицированная задача сводится к задаче оптимального управления, и, в силу принципа максимума, при переходном процессе управление s — релейно, то есть принимает значение 0 или 1, то есть оптимальную долю инвестиций не приходится рассматривать.

Несмотря на всю упрощенность модели Солоу, она в последнее время широко применяется для анализа тенденций развития отдельных стран и отраслей, о чем свидетельствует значительное число публикаций на эту тему в INTERNET.

Представляет интерес проанализировать изменение результатов анализа этой модели при различных ее обобщениях и детализациях.

Если в качестве производственной функции выбирается функция Кобба-Дугласа, то она может быть преобразована к виду $F = L\varphi(k)$, $\varphi = Ak^{\alpha}$ где $k = K/L$ — отношение капитала к трудовым ресурсам.

Если для трудовых ресурсов принимается экспоненциальная зависимость $dL/dt = \eta L$ (то есть $L = L_0 e^{\eta t}$ — предположение Мальтуса), то модель Солоу приводится [5] к одному нелинейному дифференциальному уравнению

$$dk/dt = s\varphi(k) - (\mu + \eta)k, \qquad (7)$$

где μ — доля выбывания производственных фондов, капитала.

Экономическая система, описываемая этим автономным (не содержащим времени в явном виде) уравнением имеет единственное **устойчивое** состояние равновесия

$$k^{*} = (As/(\mu + \eta))^{1/\beta}$$

Максимизация удельного потребления $c = C/L = (1-s)\varphi(k^{*}) = B(1-s)s^{\alpha/\beta}$ дает оптимальную долю инвестиций $s^{*} = \alpha$

Отметим, что анализ несколько упрощается, если в уравнении (1) перейти к безразмерным переменным путем выбора масштабов (этим приемом удобно пользоваться в дальнейшем):

$$k = A_1 x,\ t = T\tau,\ A_1 = (As/(\mu + \eta))^{1/\beta}\ \ T = 1/(\mu + h), \qquad (7')$$
$$dx/d\tau = x^{\alpha} - x$$

и устойчивое равновесие отвечает $x^{*} = 1$

Обобщим модель, заменив уравнение экспоненциального роста трудовых ресурсов на рост с насыщением, логистическим уравнением:

$$dL/dt = \eta L(1 - \nu L).$$

При этом зависимость трудовых ресурсов от времени имеет вид:

$$\nu L = f(t) = C_1 e^{\eta t}/(1 + C_1 e^{\eta t}),\ C_1 = \nu L_0/(1 - \nu L_0).$$

При естественном условии $C_1 > 0$ или $\nu L_0 < 1$, $f(t) \to 1$ при $t \to \infty$

Вместо уравнения (7) теперь получим неавтономное уравнение

$$dk/dt = s\varphi(k) - (\mu + \eta - \eta f(t))k, \qquad (8)$$

графический анализ которого более сложен, чем для (7): вместо фиксированной прямой, отвечающей линейному слагаемому правой части имеется прямая, меняющая свой наклон от некоторого начального значения до предельного, равного μ Можно показать, что именно эта точка пересечения предельной прямой и нелинейной части отвечает предельному устойчивому равновесию.

В безразмерных переменных (с теми же масштабами) уравнение принимает вид

$$dx/d\tau = x^{\alpha} - x(1 - \psi(\tau)),\ \psi(\tau) = C_1\rho e^{\rho\tau}/(1 + C_1 e^{\rho\tau}), \qquad (8')$$
$$\rho = \eta/(\mu + \eta).$$

При $C_1 = 0$ имеем то же решение, что в (7), в общем же случае использование леммы Чаплыгина и оценок несобственного интеграла позволяет доказать, что предельное равновесие отвечает уже упомянутому предельному положению прямой для линейного слагаемого правой части.

Наиболее интересный результат заключается в том, что оптимальное значение доли инвестиций и в этом случае равно $s^{*} = \alpha$, так как уравнение для него имеет тот же вид (но с другим значением B). Следовательно, имеет место **устойчивость по модели** (термин, введенный Е. С. Вентцель).

Следующей модификацией модели является изменение вида производственной функции, предложенное Мэнкью [6], при сохранении гипотезы экспоненциального роста трудовых ресурсов:

$$Y = K^{\alpha}[A(t)L]^{\beta}H^{\gamma} \quad \alpha,\beta,\gamma > 0,\ \alpha+\beta+\gamma = 1,$$

где $H(t)$ — human capital, вместе с $A(t)$ учитывающий влияние научно-технического прогресса.

В предположении экспоненциального роста $A(t)$ ($A(t) = A_0e^{gt}$) и одинаковой доли выбывания производственного и «гуманитарного» капитала m уравнения их динамики имеют вид:

$$dK/dt = s_kY - \mu K,\ dH/dt = s_hY - \mu H$$

(s_k, s_h — соответственно доли инвестиций продукта в эти виды ресурсов) и для удельных величин $y = Y/AL = k^{\alpha}h^{\gamma}$, $k=K/AL$, $h=H/AL$ получаются уравнения:

$$dk/dt = s_ky - ak,\ dh/dt = s_hy - ah,\ a = \mu+\eta+\gamma. \quad (9)$$

Эта модель подробно исследовалась на школах по эконометрике с целью оценки ее параметров по эмпирическим данным, при этом использовались приближенные выражения для характеристик равновесия. Здесь покажем возможность точного анализа положения равновесия и оценки оптимальных долей s_k и s_h.

Опять вводя безразмерные переменные:

$$k = A_1x_1,\ h = A_2x_2,\ y = A_3x_3,\ t = T\tau,$$

$$A_3 = (s_k^{\alpha}s_h^{\gamma}/a^{\alpha+\gamma})^{1/\beta},\ A_1 = s_kA_3/a,\ A_2 = s_hA_3/a,\ T = 1/a,$$

представим систему (9) в виде

$$dx_1/d\tau = x_3 - x_1,\ dx_2/d\tau = x_3 - x_2,\ x_3 = x_1^{\alpha}\ x_2^{\gamma}. \quad (9')$$

Ее положение равновесия (steady state) очевидно: $E_1^* = E_2^* = E_3^* = 1$.

Для исследования его устойчивости запишем линеаризованные уравнения:

$$E_1 = 1+\xi,\ E_2 = 1+\zeta,$$

$$E_3 = (1+\alpha\xi+\ldots)(1+\gamma\zeta+\ldots) = 1+\alpha\xi+\gamma\zeta+\ldots,$$

$$d\xi/dt = \alpha\xi+\gamma\zeta-\xi,\quad d\zeta/dt = \alpha\xi+\gamma\zeta-\zeta.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda+1-\alpha)(\lambda+1-\gamma) - \alpha\gamma = 0,$$

и корни его равны $\lambda_1 = -\beta$, $\lambda_2 = -1$ Следовательно, по теореме Ляпунова, рассматриваемое положение равновесия $E_1^* = E_2^* = E_3^* = 1$ и в нелинейной системе — устойчиво.

Обращаясь, как и в предыдущих моделях ко второму этапу — выбору оптимальных долей инвестиций (на этот раз — двух), приходим к задаче

$$c^* = C^*/AL = (1-s_k-s_h)y^* \to \max,\ (y^* = A_3),$$

или

$$\varphi(s_k,s_h) = \ln c\ = \ln(1-s_k-s_h) +$$
$$+\alpha(\ln s_k)/\beta + \gamma(\ln s_h)/\beta - (1/\beta-1)\ln a \to \max.$$

После дифференцирования и решения возникших линейных уравнений получим:

$$s_k = \alpha,\ s_h = \gamma,$$

то есть опять тот же результат, что в исходной модели (с дополнением по инвестициям в «гуманитарный» капитал), опять заключение об **устойчивости** окончательных рекомендаций **по модели**.

Применительно к экономике в целом модель Солоу является сильным упрощением, прежде всего потому, что экономика рассматривается как односекторная система. Возникает вопрос: нельзя ли ее применить к одной из отраслей, в частности, к агропромышленному комплексу (где такое упрощение более адекватно действительности)?

Существенной особенностью при этом является то, что не приходится говорить о **росте** трудовых ресурсов, они либо остаются на прежнем уровне, либо убывают, следовательно, в описанных моделях $\eta \le 0$.

Как в исходной модели, так и в ее модификациях, если при этом $\mu+\eta > 0$ (или $a = \mu+\eta+\gamma > 0$), то ничего в принципе не меняется (хотя положение равновесия и значения констант — изменяются). Если же эти величины — отрицательны (или равны нулю), то **не существует положительного состояния равновесия**, что отвечает наблюдаемой ситуации «черной дыры» АПК, требующей для своего развития все больших инвестиций.

Для исправления этого положения возникает несколько парадоксальная рекомендация: при большой доле выбытия трудовых ресурсов желательно **увеличивать долю выбывания производственных фондов *m***, то есть чаще менять технику! Эта математическая рекомендация в некоторой степени может быть подкреплена и экономическими соображениями.

Другой особенностью модели в применении к АПК является возможность (и необходимость) выдачи бюджетных или иных дотаций, что приводит к появлению в уравнениях для K дополнительного слагаемого D. Величина дотации может быть пропорциональна величине производимого АПК продукта Y, производственным фондам (капиталу) K или трудовым ресурсам. Рассмотрим эти различные варианты.

1) $\Delta = \delta Y$ При этом в уравнениях (7) и (8) величина s заменяется на $s+\delta$, соответственно при оптимизации удельного потребления приходится искать максимум функции $(1-s)(s+\delta)^{\alpha/\beta}$, что дает

$$s = \alpha - \delta\beta < \alpha$$

или

$$s + \delta = \alpha(1+\delta),\ 1 - s = \beta(1+\delta).$$

Вследствие этого оптимальные значения удельных инвестиций y^{*} и потребления c^{**} по сравнению с «бездотационными» значениями y, c — умножаются на положительные степени $1+\delta$ то есть **увеличиваются** (что естественно, так как за счет дотаций увеличиваются инвестиции, а значит и выход продукции).

Возникает вопрос: при каких значениях δ такое увеличение может перекрыть предоставляемую дотацию, то есть

$$y > y^{*} + \delta y\ ?$$

Поскольку $y = y^{*}(1+\delta)^{\alpha/\beta}$, это эквивалентно неравенству:

$$(1+\delta)^{\alpha/\beta}(1-\delta) > 1.$$

Обозначив $\alpha_1 = \alpha/\beta$, запишем это неравенство (при очевидном условии $\delta < 1$) в виде

$$\alpha_1 > \delta_1 = -\ln(1-\delta)/\ln(1+\delta) = f_1(\delta)$$

или

$$\alpha > \delta_1/(1+\delta_1) = f(\delta).$$

Однако нас интересует обратная функция, зависимость допустимых значений δ от α, не имеющая точного аналитического выражения. Табулируя монотонно возрастающую (от 0 до 1) функцию $f(\delta)$ (таблица 1), можем либо непосредственно пользоваться ею для вычисления δ, либо аппроксимировать обратную функцию $\varphi(\alpha)$ (методом наименьших квадратов). С точностью порядка 10^{-4} эта функция имеет вид:

$$\varphi = -4{,}566\alpha^2 + 9{,}118\alpha - 3{,}433,$$

и условие выбора доли дотации записывается в виде $\delta < \varphi(\alpha)$

Таблица 1

δ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(\delta)$	0,525	0,550	0,576	0,603	0,631	0,661	0,694	0,732	0,782

Для модели (8) могут быть проведены аналогичные расчеты, но необходимо учитывать и изменение коэффициента B, и «предельный» характер положения равновесия.

2) Если дотация пропорциональна капиталу ($D = \kappa K$), то основное уравнение для удельного капитала принимает вид:

$$dk/dt = s\varphi(k) - ak,\ a = \mu + \eta - \kappa$$

и, повторяя те же рассуждения, получаем опять (при уже обсуждавшемся условии $a = \mu + \eta - \kappa > 0$) тот же результат $s^{*} = \alpha$, но с изменением констант в выражениях для оптимального производства и потребления. Поскольку $a = \mu + \eta - \kappa < a_0 = \mu + \eta$ при этом опять оптимальные значения удельного производства и потребления оказываются больше, чем без дотации.

Условие, что это увеличение компенсирует дотацию, имеет вид:

$$1 - \kappa > (1 - \kappa/a_0)^{\alpha/\beta}$$

При этом должны выполняться условия $0 < \kappa < 1$, $\kappa < a_0$ Это неравенство также может быть преобразовано к виду

$$\alpha_1 = \alpha/\beta > \ln(1-\kappa)/\ln(1-\kappa/a_0) = \kappa_1$$

или

$$\alpha > \kappa_1/(1+\kappa_1) = f_2(\kappa).$$

Последняя функция опять легко табулируется (при фиксированном значении a_0, в табл. 2 при $a_0 = 1{,}2$) и может быть использована для определения доли дотации κ по α либо обратным интерполированием, либо аппроксимацией обратной функции.

Таблица 2

κ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f_2(\kappa)$	0,548	0,550	0,553	0,558	0,562	0,569	0,579	0,594	0,624

3) Если дотации пропорциональны трудовым ресурсам ($D = \lambda L$), то основное уравнение будет отличаться дополнительным постоянным слагаемым: $dk/dt = s\varphi(k) - a_0 k + \lambda$, $a_0 = \mu + \eta > 0$

Единственное устойчивое положение равновесия и в этом случае существует, но аналитического выражения для него получить нельзя (нужно решать уравнение $s\varphi(k) - a_0 k + \lambda = 0$), а следовательно, нет возможности в общем виде найти оптимальное значение s. Путь численной оптимизации очевиден: изменяя s, решаем уравнение равновесия, находим удельное потребление и выбираем то s, которое отвечает его максимуму.

Переход к безразмерным переменным с теми масштабами, которые использовались ранее, приводит к уравнению $x^{\alpha} - x + b = 0$, содержащему два параметра, и осложненному тем, что s входит и в b, и в масштаб A_1 ($k = A_1 x$). Если выбрать масштаб иначе: $A_1 = \lambda T = \lambda/(\mu + \eta)$, то уравнение равновесия примет вид:

$$q_0 s x^{\alpha} - x + 1 = 0,\ q_0 = A/(\mu + \eta)^{\alpha/\beta}$$

и его численное исследование (и оптимизация удельного потребления) проще. Уравнение легко решать путем сходящейся итерации $x(k) = 1 + q_0 s(x^{(k-)})^{\alpha}$, которая позволяет получить и приближенное асимптотическое выражение для решения.

Рассмотренные обобщения и модификации модели Солоу не только обосновывают «золотое правило» оптимальных (по максимуму удельного потребления) инвестиций, практически инвариантное для всех приведенных вариантов, но и содержат рекомендации по выбору форм дотации АПК и нормативы этой дотации.

Все приведенные модели, несмотря на их формальное разнообразие и разные микро- и макроэкономические задачи, для которых они построены, обладают одним общим свойством: они показывают необходимость «внешнего» управления и согласованного (с интересами участников) назначения экзогенных параметров, определяющих поведение участников и развитие рассматриваемых экономических систем. К рассмотренным моделям могут быть добавлены и эконометрическая теория фирмы, и модели формирования системы наценок и дотаций для дилерской сети сбыта продукции и др. Этот вывод вполне отвечает общим соображениям о необходимости согласованного поведения участников в играх с непротивоположными интересами [7].

Литература

1. *Жак С.В.* Математические модели менеджмента и маркетинга. Ростов н/Д: ЛаПО, 1997

2. *Кактурская М.* Россия на продовольственной игле. АиФ. 2002. № 37

3. Всадники без голов. Беседа с А. Асмоловым. Литературная газета. 2002. № 38.

4. *Демидович В.П. Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1978.

5. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М., Наука, 1984.

6. *Mankiw N.G.* Macroeconomics. N.Y., Worth Publishers, 1992. М.: МГУ, 1994).

7. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.