УДК 332.1+330.41

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЕДИНЫХ ГОСУДАРСТВЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ В РОССИЙСКИХ РЕГИОНАХ

В. А. Силаева, А. М. Силаев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород)

Поступила в редакцию 13 августа 2018 г.

Аннотация: *для сравнения результатов Единых государственных экзаменов (ЕГЭ) предлагается использовать алгоритмы коррекции, которые устраняют различие статистических характеристик баллов по разным предметам. При этом выбираются стандартные распределения вероятностей, в зависимости от параметров которых производится пересчет баллов. После проведения процедуры коррекции можно сопоставлять баллы ЕГЭ (межрегиональные, межпредметные, по годам), а также делать выводы о привлекательности различных образовательных программ для абитуриентов. Предложенные алгоритмы коррекции баллов применяются для анализа результатов ЕГЭ по математике и русскому языку в российских регионах в 2013 г. Показывается, что количество высоких оценок в регионах растет быстрее, а количество низких оценок медленнее, чем число участников экзамена в каждом регионе.*

Ключевые слова: *Единый государственный экзамен, коррекция баллов, кривые спроса.*

Abstract: *to compare the results of the Unified State Exams (USE) correction algorithms are proposed to use, which eliminate the difference of statistical characteristics of scores for different subjects. These algorithms are based on the standard probability distributions and the scores are recalculated depending on distributions parameters. After the correction can be more justified to compare the exam scores (interregional, interdisciplinary, in different years), as well as to draw conclusions about the attractiveness of the various educational programs for students. Proposed correction algorithms are used to analyze the results of the exam in mathematics and Russian language in Russion regions in 2013. It is shown that the amount of the highest ratings in the region is growing faster, and the number of low ratings slowly than the number of participants in the examination in each region.*

Key words: *Unified State Exam, correction of scores, demand curves.*

Введение

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) с 2009 г. является основной формой обязательной итоговой аттестации программ среднего общего образования в нашей стране, а баллы ЕГЭ используются вузами для конкурсного отбора абитуриентов на различные образовательные программы. Форма проведения и задания ЕГЭ являются стандартизированными, что позволяет применять результаты ЕГЭ для оценки качества образования выпускников школ по разным предметам, оценки привлекательности образовательных программ для абитуриентов и эффективности деятельности вузов. Например, средние баллы ЕГЭ зачисленных в вуз студентов рассматриваются в качестве одного из показателей для оценки вузов Министерством образования и науки Российской Федерации в мониторингах эффективности[1]. По среднему баллу ЕГЭ в расчете на один предмет оценивается качество приема в вузах студентов первого курса, поступивших на бюджетные и платные места, в мониторингах качества образования НИУ ВШЭ[2].

Исследования в области экономики образования связаны с анализом социально-экономического развития регионов, с проблемами развития человеческого и социального капитала, с изучением факторов, оказывающих положительное влияние на экономический рост и благосостояние [1; 2]. В работах [3–5] с использованием результатов международных тестов, проводимых для учащихся школ разных стран, показано, что показатели качества образования существенно

[1] URL: минобрнауки.рф/пресс-центр/2774/файл/1265/12.10.31-Мониторинг_Результаты.pdf; indicators.miccedu.ru/monitoring/

[2] URL: https://ege.hse.ru/

влияют на темпы экономического роста. В ряде работ баллы ЕГЭ используются для оценки инвестиций в человеческий капитал. В статьях [6; 7] изучается связь баллов ЕГЭ с успеваемостью студентов на первых курсах бакалавриата и исследуется проявление эффектов сообучения в студенческой группе, при этом результаты ЕГЭ по русскому языку и математике используются для оценки способностей студентов. В [8] исследуется отдача от инвестиций в дополнительную подготовку школьников к поступлению в вуз в баллах ЕГЭ. В статье [9] установлено, что успеваемость, оцениваемая по результатам ЕГЭ по русскому языку и математике, является важным фактором зарплатных ожиданий студентов.

В силу того, что при проведении экзаменов на всей территории России применяются однотипные задания и единые методы оценки, баллы ЕГЭ позволяют оценить качество образования в разных регионах. Вместе с тем к настоящему времени практически нет работ, посвященных анализу статистической информации о баллах ЕГЭ и сопоставлению результатов экзаменов по разным предметам в российских регионах. Как правило, в исследованиях, опубликованных к настоящему времени, ограничиваются рассмотрением средних баллов ЕГЭ по отдельным предметам и их изменениям во времени. Более полную информацию содержат эмпирические вероятностные распределения баллов ЕГЭ. Поэтому их анализ представляется актуальным, учитывая внимание к ЕГЭ со стороны общества и важность результатов для учащихся. В настоящей работе исследуются результаты ЕГЭ по математике и русскому языку в регионах России в 2013 г. Оцениваются эконометрические модели для количества участников ЕГЭ, набравших различные баллы по русскому языку и математике. Делается вывод, что основным фактором, объясняющим число различных оценок по предметам в регионах, является количество учащихся, сдававших экзамен по рассматриваемому предмету.

Сравнение результатов ЕГЭ по различным предметам

Статистические данные по результатам сдачи ЕГЭ в Российской Федерации, которые до 2016 г. публиковал официальный информационный портал ЕГЭ, демонстрируют неоднородность оценок – различие статистических характеристик для баллов по разным предметам и для разных лет. Во многих работах (см., например, [10; 11]) отмечается, что использование только средних баллов при сравнении результатов ЕГЭ не вполне корректно из-за того, что баллы по разным предметам имеют разное распределение, невозможно гарантировать одинаковую сложность экзаменационных заданий, есть различия и непостоянство во времени оценочных процедур. Поэтому, чтобы сопоставлять баллы ЕГЭ, необходимо выравнивать статистические характеристики оценок для разных предметов и по годам, а также учитывать число учащихся, сдающих экзамены.

Оценке результатов приема на образовательные программы в вузах по результатам ЕГЭ посвящена статья [12], в которой предлагается использовать для анализа кривые спроса, полученные в результате сортировки по убыванию суммы баллов ЕГЭ студентов, зачисленных на программы обучения, а также рассчитываемые на их основе количественные характеристики. Существенной проблемой при сопоставлении результатов приема в вузы является разный набор или разное количество предметов, которые по требованию министерства или по решению вуза должны учитываться при поступлении на разные направления обучения. В [13] для сравнения качества приема в вузы на различные образовательные программы используются скорректированные кривые спроса, полученные по результатам ЕГЭ зачисленных на бюджетные места студентов с учетом поступивших без вступительных экзаменов победителей и призеров олимпиад. Предлагаются два метода коррекции баллов ЕГЭ принятых на бюджетные места студентов, чтобы устранить влияние структуры и количества предметов ЕГЭ на различные направления обучения. Первый метод предполагает линейную коррекцию суммарного балла ЕГЭ отдельного школьника с учетом известных средних значений и среднеквадратических отклонений баллов по отдельным предметам всех школьников в России. Во втором методе производится нелинейная коррекция баллов по каждому отдельному предмету в суммарном результате. При этом выбирается заданное стандартное распределение, в зависимости от параметров которого производится пересчет баллов ЕГЭ. Для примера в качестве такого стандартного распределения используется бета-распределение.

В случае сравнения результатов ЕГЭ по отдельным предметам первый метод предполагает, что скорректированная оценка W находится с помощью линейного преобразования фактической оценки V по выбранному предмету по формуле

$$W = kV + b. \qquad (1)$$

При этом коэффициенты k и b выражаются через средние значения и среднеквадратичные отклонения случайных величин V и W:

$$k = \sigma_W / \sigma_V,\ b = E(W) - kE(V). \qquad (2)$$

На практике вместо истинного среднего значения $E(V)$ и среднеквадратичного отклонения σ_V в (2) подставляются их оценки, вычисленные по известным статистическим данным о результатах ЕГЭ по данному предмету для всей России. А для скорректированной оценки W среднее значение и среднеквадратичное отклонение можно выбирать заранее заданными (стандартными), например, такими: $E(W) = 50$, $\sigma_W = 10$. Подобная стандартизация шкал оценок, выравнивающая средние значения и среднеквадратичные отклонения по предметам и по годам, используется во многих работах (см., например, [4; 5; 14]).

Во втором методе при нелинейной коррекции баллов по каждому предмету необходима информация о вероятностном распределении тестовых баллов для всех школьников в России. Предположим, что известны баллы $x_1, x_2,\ldots, x_m$, упорядоченные по возрастанию из интервала [0; 100], и количество учащихся $n_1, n_2,\ldots n_m$, набравших соответствующие баллы для какой-либо отдельной дисциплины в России. Можно вычислить эмпирические оценки вероятностей получения того или иного балла

$$p_i = n_i / n,\ i = 1, 2,\ldots, m. \qquad (3)$$

Здесь $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$ – общее число учащихся, сдававших данный предмет.

Введем вспомогательную случайную величину X такую, что она имеет непрерывную интегральную функцию распределения $F(x)$ со значениями в точках $x_1, x_2,\ldots, x_m$, равными

$$F\left(x_k\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i\ ,\ k = 1, 2,\ldots m. \qquad (4)$$

Функцию распределения $G(y)$ случайной величины Y можно выбрать на интервале баллов $0 \le y \le 100$ произвольной, но с условием, чтобы существовала обратная функция $y = G^{-1}(i)$ при $0 \le t \le 1$. Метод нелинейной коррекции баллов для каждой отдельной дисциплины основан на следующем известном свойстве нелинейных преобразований случайных величин: если две случайные величины X и Y имеют функции распределения вероятностей $F(x)$ и $G(y)$, то третья случайная величина Z, полученная с помощью нелинейного преобразования $Z = G^{-1}(F(X))$, будет распределена как случайная величина Y. Используем данное нелинейное преобразование для коррекции баллов в соответствии с формулой:

$$x_k^c = G^{-1}\left(F\left(x_k\right)\right) = G^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right), k = 1, 2,\ldots m. \qquad (5)$$

Эта формула дает для каждой фактической оценки ЕГЭ x_k по предмету в интервале от 0 до 100 соответствующую скорректированную оценку x_k^c. В целом для всех школьников в России оценки пересчитываются так, что значения $x_1^c, x_2^c, \ldots, x_m^c$ и их вероятности $p_1, p_2,\ldots p_m$ описывают случайную величину Z, функция распределения которой в точках x_k^c совпадает с функцией распределения случайной величины Y:

$$P\left(Z \le x_k^c\right) = G\left(x_k^c\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i\ ,\ k = 1, 2,\ldots m. \qquad (6)$$

Если пересчитывать оценки ЕГЭ по разным предметам или для разных лет, применяя одну и ту же функцию распределения $G(y)$, то скорректированные оценки будут описываться одинаковыми вероятностными распределениями. Поэтому их можно сравнивать между собой, сопоставляя результаты ЕГЭ. На практике тестовые баллы ЕГЭ по каждому предмету определяются на основе первичных баллов по таблицам соответствия. И вследствие того, что количество первичных баллов неодинаково для разных предметов, можно ожидать небольшого различия статистических характеристик скорректированных оценок для разных предметов, несмотря на выполнение равенства (6).

Отметим, что при вычислении оценок x_k^c не требуется делать предпосылок об одинаковых способностях школьников по разным предметам и в разные годы или об одинаковой трудности экзаменов. Из формулы (5) видно, что формируемые оценки x_k^c зависят от распределения вероятностей $p_1, p_2,\ldots p_m$ и не зависят от величины исходных баллов $x_1, x_2,\ldots x_m$, если только функции распределения $F(x)$ и $G(y)$ не совпадают друг с другом. Фактические индивидуальные баллы x_k учащиеся получают вне зависимости от результатов других школьников, а скорректированные оценки x_k^c характеризуют относительные показатели учащихся при сдаче экзамена. Относительная система оценивания находит свое применение на практике и рекомендуется, например, общеевропейской системой ECTS для выставления оценок студентам при освоении образовательной программы или курса (см., например, ECTS Users' Guide 2015[3]).

[3] URL: europass.cedefop.europa.eu/sites/default/files/ects-users-guide_en.pdf

Рассмотрим некоторые возможные функции распределения $G(y)=\int_0^y g(y)dy$, где введено обозначение $g(y)$ для плотности вероятности случайной величины Y.

1. Равномерное распределение вероятности:

$$g_u(y) = 0{,}01,\ G_u(y) = 0{,}01,\ 0 \le y \le 100. \quad (7)$$

При такой функции распределения предполагается, что скорректированные баллы могут принимать произвольные (не обязательно целые) значения из интервала от 0 до 100 баллов. В этом случае согласно (5) скорректированные баллы вычисляются по правилу

$$x_k^c = G_u^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right) = 100F(x_k) = 100\sum_{i=1}^{k} p_i,$$

$$k = 1, 2,\dots m. \quad (8)$$

Здесь p_i – вероятность получения балла x_i по рассматриваемому предмету.

Скорректированные оценки с использованием равномерной плотности вероятности имеют простой смысл. Если оценка отдельного учащегося при таком способе оценивания равна x^c баллов, то x^c процентов учащихся сдали экзамен не лучше, чем данный учащийся, а более высокие оценки получили остальные $(100 - x^c)$%.

2. Распределение вероятности для дискретных величин:

$$g_d(y)=\sum_{i=1}^{r} q_i\delta(y-y_i),\ G_d(y)=\sum_{i=1}^{r} q_i I(y-y_i), \quad (9)$$

где параметры ограничены значениями $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{r} q_i = 1$, а также введены обозначения: $\delta(y - y_i)$ – дельта-функция Дирака; $I(y-y_i)=\begin{cases}0, & y-y_i<0\\ 1 & y-y_i\ge 0\end{cases}$ – индикаторная функция. Предполагается, что скорректированные баллы могут принимать ряд дискретных значений $y_1, y_2,\dots y_r$. В этом случае формула (5) для вычисления скорректированных баллов не работает, так как не существует однозначной обратной функции распределения $G_d^{-1}(y)$. Необходимо специально доопределить значения скорректированных оценок.

Для примера рассмотрим частный случай:

$$G_d(y) = 0{,}25[I(y-2) + I(y-3)\ I(y-4) + I(y-5)]. \quad (10)$$

Тогда правило вычисления скорректированных оценок может быть следующим:

$$x_k^c=\begin{cases}2, & F(x_k)<0{,}25;\\ 3, & 0{,}25\le F(x_k)<0{,}5;\\ 4, & 0{,}5\le F(x_k)<0{,}75;\\ 5, & 0{,}75\le F(x_k)\le 1;\end{cases} \quad (11)$$

где $F(x_k)=\sum_{i=1}^{k} p_i$, $k = 1, 2,\dots m$. Таким образом, все учащиеся, сдававшие экзамен, разбиваются на 4 квартиля каждый по 25 % общей численности. Попадание в тот или иной квартиль зависит от набранного балла ЕГЭ и приводит к соответствующей оценке – в данном примере от 2 до 5. Другие примеры градаций оценок при использовании кредитно-рейтинговой системы оценок ECTS приведены, например, в (ECTS Users' Guide 2015).

Сравнение результатов ЕГЭ по математике и русскому языку в 2013 г.

Применим алгоритмы коррекции баллов для анализа результатов ЕГЭ по математике и русскому языку в России в 2013 г. Статистика результатов ЕГЭ по математике и русскому языку в 2013 г. по федеральным округам и субъектам Российской Федерации представлена на сайтах ФГБУ «Федеральный центр тестирования» и информационного портала ЕГЭ[4]. Информация в виде значений тестовых баллов x_i и количества учащихся n_i, получивших эти баллы по каждому предмету, имеется для всех субъектов федерации, что позволяет воспользоваться нелинейной стандартизацией шкал оценок, выравнивающей вероятностные распределения по предметам, а затем сравнить результаты экзаменов в федеральных округах и отдельных регионах между собой.

В табл. 1 и 2 приведены значения фактических и скорректированных баллов для русского языка и математики, вычисленных с помощью нелинейного алгоритма коррекции баллов при равномерном распределении вероятностей по формуле (8).

Чтобы сравнить между собой результаты экзаменов в разных регионах, удобно перейти к эмпирическим функциям распределения баллов ЕГЭ по выборке учащихся из рассматриваемого региона, нормированным на количество учащихся. При этом количество учащихся будем откладывать по горизонтальной оси, а полученные баллы за экзамен, отсортированные по убыванию от 100 до 0, по вертикальной оси. В итоге получим несколько модифицированные варианты «кривых спроса» [12]. Данное название отражает убывающий характер кривых и возможность сложения «по горизонтали» при агрегировании результатов экзаменов, т. е. сложения количества школьников с одним и тем же значением балла, как при сумми-

[4] URL: www.rustest.ru/ege/statistics/results/; www.ege.edu.ru/common/upload/docs/app3.xls

Т а б л и ц а 1

Фактические (Ф) и скорректированные (С) баллы ЕГЭ по русскому языку

Ф	**0**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**20**	**22**
С	0,018	0,023	0,03	0,04	0,06	0,09	0,13	0,2	0,3	0,4	0,6
Ф	**24**	**26**	**28**	**30**	**32**	**34**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
С	0,7	0,9	1,2	1,4	1,6	1,9	2,5	3,1	3,7	4,4	5,2
Ф	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**
С	6,1	7,1	8,1	9,3	10,6	12,0	13,5	15,1	16,8	18,6	20,5
Ф	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**
С	22,5	24,5	26,7	29,0	31,4	33,8	36,3	38,9	41,6	44,3	47,1
Ф	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**
С	49,9	52,9	55,9	58,9	62,0	65,1	68,3	71,5	74,7	77,8	80,9
Ф	**76**	**79**	**82**	**84**	**87**	**90**	**92**	**95**	**98**	**100**	
С	83,8	86,7	89,4	91,9	94,1	96,1	97,7	99,0	99,7	100	

Т а б л и ц а 2

Фактические (Ф) и скорректированные (С) баллы ЕГЭ по математике

Ф	**0**	**5**	**10**	**15**	**20**	**24**	**28**	**32**	**36**	**40**	**44**
С	0,6	2,1	3,5	4,9	6,2	11,0	16,8	22,8	29,1	35,4	41,7
Ф	**48**	**52**	**56**	**60**	**63**	**66**	**68**	**70**	**72**	**74**	**77**
С	48,4	55,8	64,6	74,7	80,9	86,5	89,7	92,0	93,8	95,2	96,2
Ф	**79**	**81**	**83**	**85**	**87**	**90**	**92**	**94**	**96**	**98**	**100**
С	97,1	97,7	98,3	98,7	99,0	99,3	99,6	99,7	99,86	99,93	100

ровании спроса на однородные товары при совершенной конкуренции. Кривые спроса являются зеркальным отображением эмпирических функций распределения баллов ЕГЭ по выборке учащихся и поэтому содержат в себе больше информации, чем отдельные статистические характеристики, какими являются, например, средние значения.

На рис. 1 для примера приведены кривые спроса для учащихся Центрального федерального округа (ЦФО), Приволжского федерального округа (ПФО) и Северо-Кавказского федерального округа (СКФО), построенные по результатам ЕГЭ 2013 г. по русскому языку (сплошная линия) и математике (пунктирная линия) без коррекции баллов (рис. 1 *а*) и с использованием коррекции баллов к равномерному (рис. 1 *б*) распределению. По кривым на рис. 1 *а* можно сравнивать результаты для разных федеральных округов по одному экзамену – по математике или по русскому языку, но нельзя сравнивать результаты разных экзаменов из-за их неоднородности – разных статистических характеристик оценок. Соответственно по кривым на рис. 1 *б* можно сравнивать между собой результаты всех экзаменов, так как коррекция баллов устранила неоднородность оценок.

Из рисунков видно, что имеет место доминирование первой степени (см. подробнее в [12]) – одни кривые спроса расположены выше и правее, чем другие. В этом случае для каждого учащегося, результат которого представлен на более низкой кривой спроса, найдется учащийся с тем же порядковым номером на более высокой кривой спроса, имеющий более высокий балл ЕГЭ, т. е. лучше подготовленный по данному предмету или получивший более высокий результат относительно другого предмета.

Можно констатировать, что чем больше учащихся в регионе, тем выше и правее на рисунках расположены кривые спроса. В ЦФО каждый экзамен сдавали примерно 200 тыс. чел., в ПФО – около 170 тыс. чел., в СКФО – примерно 80 тыс. чел. (по русскому языку больше, чем по математике в каждом округе). Соответственно для ЦФО кривые спроса на рис. 2 проходят выше, чем для других округов. Эта закономерность в целом прослеживается также для других федеральных округов и для отдельных субъектов федерации (см., например, рис. 2).

Можно также отметить, что в СКФО результаты по математике были относительно лучше, чем результаты по русскому языку. Для всех других округов результаты по русскому языку лучше, чем по математике, хотя, как видно из рис. 1 *б*, для высоких значений баллов кривые для разных экзаменов близки друг к другу.

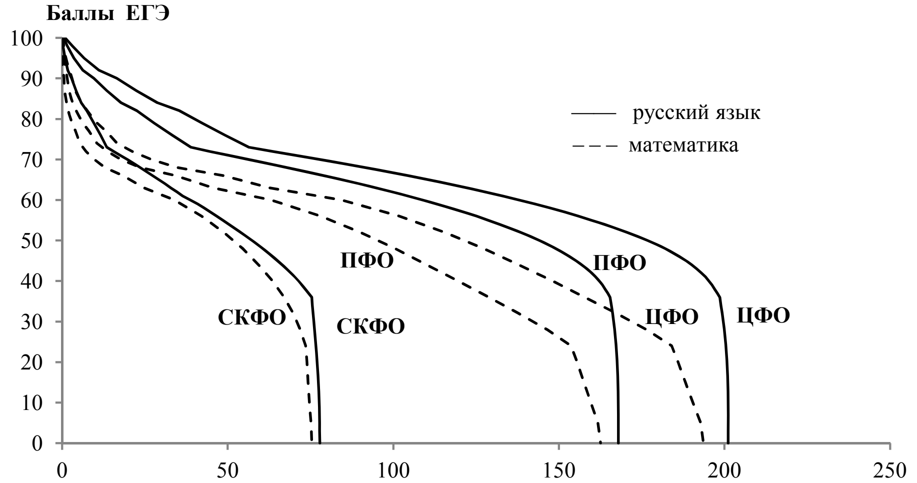


Рис. 1 а. Кривые спроса для экзаменов по русскому языку и математике в 2013 г., построенные по фактическим (нескорректированным) баллам ЕГЭ

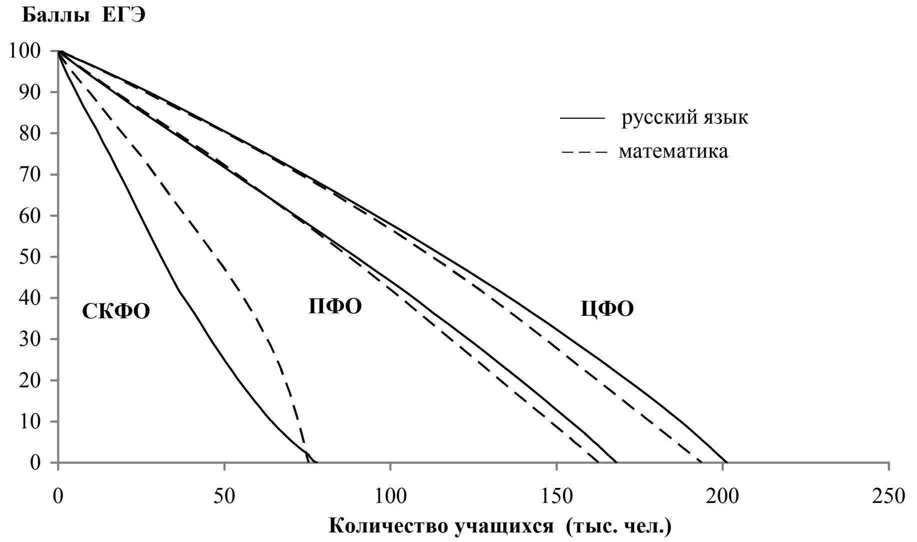


Рис. 1 б. Кривые спроса для экзаменов по русскому языку и математике с использованием равномерного распределения для коррекции баллов по формуле (8)

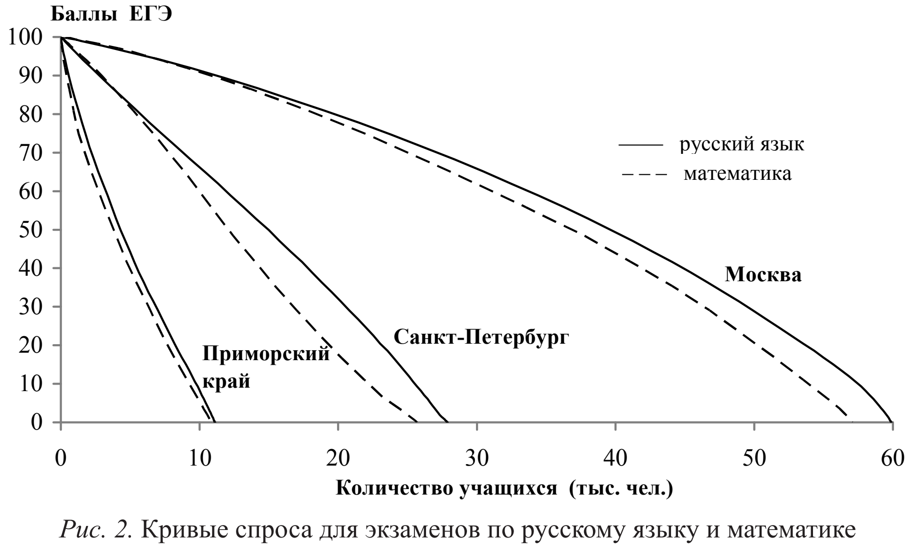


Рис. 2. Кривые спроса для экзаменов по русскому языку и математике в Москве, Санкт-Петербурге и Приморском крае, найденные с использованием равномерного распределения для коррекции баллов по формуле (8)

На рис. 3 представлены суммарные кривые спроса для всех федеральных округов, полученные путем «горизонтального суммирования» кривых спроса по русскому языку и математике для отдельных округов с использованием равномерного распределения для коррекции баллов по формуле (8).

Графики демонстрируют, что количество как хороших, так и плохих оценок по ЕГЭ в том или ином регионе в основном зависит от количества учащихся в этом регионе. Чем больше было учащихся, сдававших экзамен, тем больше было в этом округе высоких оценок, но также тем больше и низких оценок. Кривые спроса на рис. 3 ранжируются в четком порядке в зависимости от суммарного числа сдававших экзамены в каждом федеральном округе: ЦФО, ПФО, Сибирский (СФО), СКФО, Северо-Западный (СЗФО), Южный (ЮФО), Уральский (УрФО), Дальневосточный (ДФО).

Кривые спроса для всех учащихся России получаются в результате суммирования кривых спроса для всех федеральных округов. В случае использования равномерного распределения для коррекции баллов (8) они имеют линейный вид в соответствии с линейностью (7) функции вероятностного распределения $G_u(y)$ как для отдельных предметов, так и для совокупности предметов.

Аналитическое описание кривых спроса

Важной особенностью графиков для скорректированных баллов на рис. 1 *б* и рис. 2 является их относительно «гладкий характер», что позволяет найти для них приближенные аналитические описания. Будем искать выражения для величин скорректированных баллов ЕГЭ x (при использовании равномерного распределения для коррекции баллов) в зависимости от количества учащихся n (в тыс. чел.) для каждого федерального округа и для каждого субъекта федерации отдельно для экзаменов по русскому языку и по математике. Вид графиков на рис. 1 *б* и рис. 2 подсказывает, что хорошей аппроксимацией может быть квадратичная зависимость. Учитывая, что кривая спроса должна пересекать вертикальную ось в точке с координатой 100 (максимальное количество баллов за экзамен), а горизонтальную ось в точке с координатой N (количество учащихся в регионе в тыс. чел., сдававших экзамен), искомую зависимость представим в виде

$$x = 100 - C\frac{n}{N} + \left(C - 100\right)\left(\frac{n}{N}\right)^2, \qquad (12)$$

где C – параметр, характеризующий отдельный регион и экзамен.

Поскольку другой параметр N для каждого региона заранее известен, то задача заключается в том, чтобы по известным точкам на кривых спроса найти оценку неизвестного параметра C (для экзамена по русскому языку известны 65 наблюдений, для экзамена по математике – 33 наблюдения в соответствии с градациями табл. 1 и 2). Используя метод наименьших квадратов, найдем оценки параметра отдельно для каждого федерального округа и для всех субъектов федерации для экзаменов по русскому языку и математике и изобразим полученные оценки на диаграммах рассеяния вместе с числом учащихся, сдававших экзамен (рис. 4, 5).

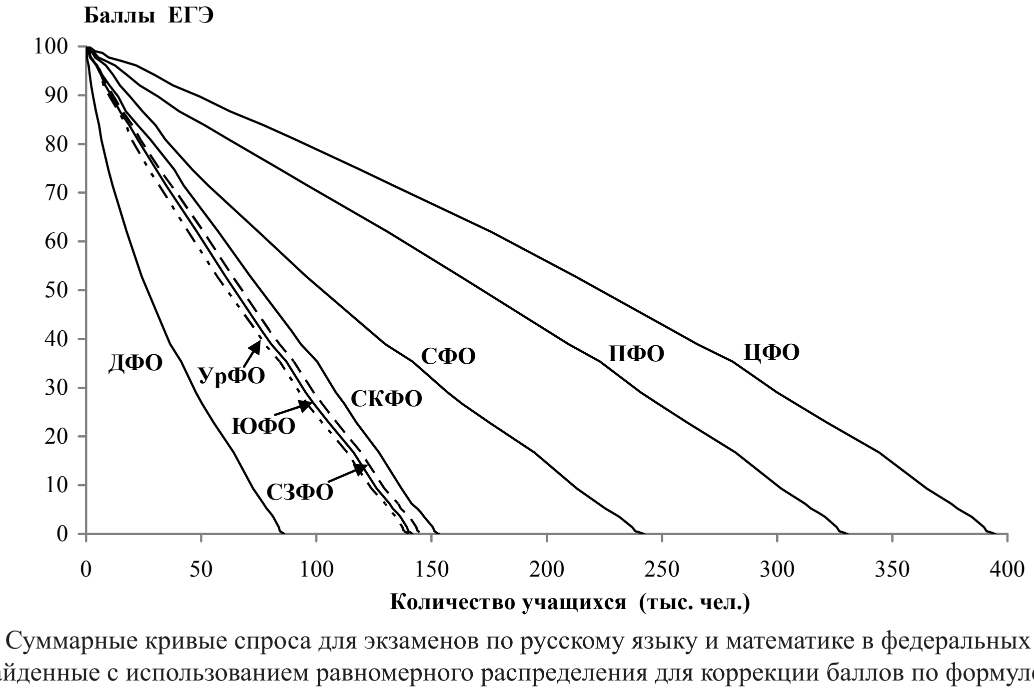
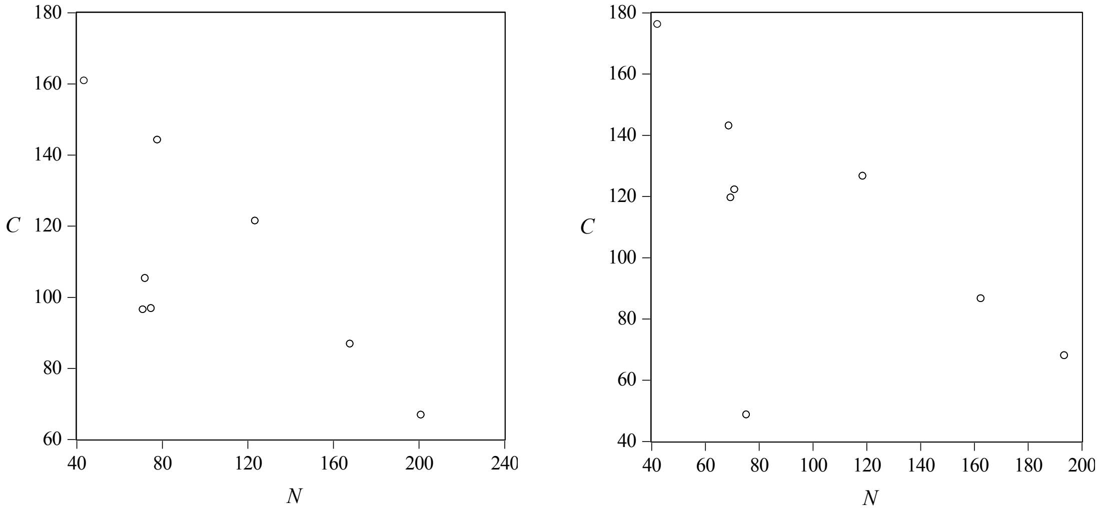
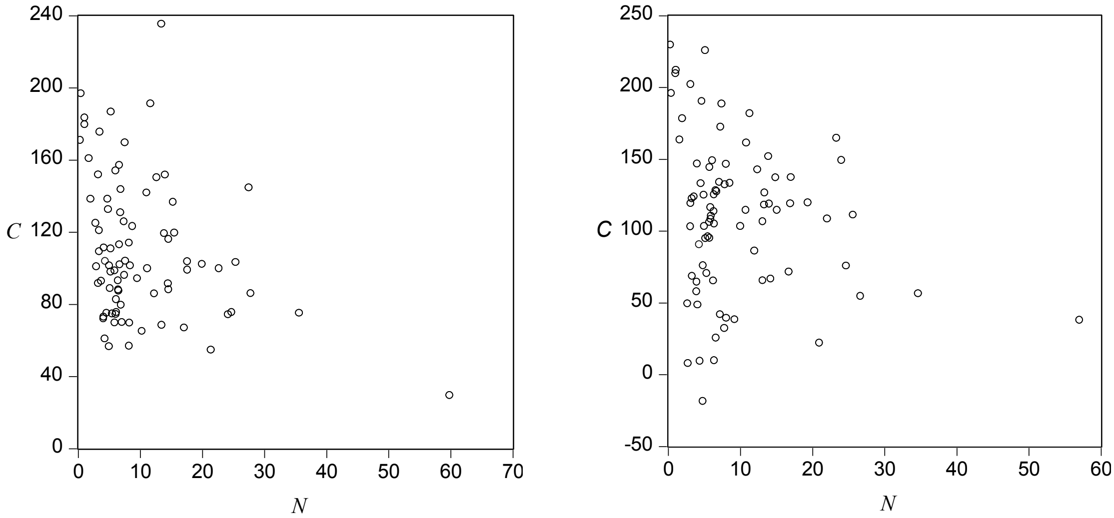


Рис. 3. Суммарные кривые спроса для экзаменов по русскому языку и математике в федеральных округах, найденные с использованием равномерного распределения для коррекции баллов по формуле (8)



а) *б*)

Рис. 4. Диаграммы рассеяния для оценок параметра *C* и количества учащихся *N* (в тыс. чел.), сдававших экзамен в федеральных округах, для экзаменов по русскому языку (*а*) и математике (*б*)



а) *б*)

Рис. 5. Диаграммы рассеяния для оценок параметра *C* и количества учащихся *N* (в тыс. чел.), сдававших экзамен, в субъектах федерации для экзаменов по русскому языку (*а*) и математике (*б*)

На рис. 4 показаны диаграммы рассеяния для федеральных округов (8 точек по числу округов), на рис. 5 изображены диаграммы рассеяния для субъектов федерации (83 точки). Отметим, что практически для всех случаев оценки параметров *C* сопровождаются небольшими стандартными ошибками, так что *P*-значения меньше, чем 10^{-4}. Согласно уравнению (12) от значения параметра *C* зависит вид кривой спроса для рассматриваемого региона: строго выпуклым кривым соответствуют значения $C > 100$, а строго вогнутым соответствуют значения $C < 100$. При $C = 100$ кривые спроса принимают линейный убывающий вид. Например, для кривых спроса на рис. 3 для Москвы, Санкт-Петербурга и Приморского края получаются следующие оценки: по русскому языку $C_{\text{М}} = 29{,}35$, $C_{\text{СПб}} = 85{,}83$, $C_{\text{ПК}} = 141{,}56$; по математике $C_{\text{М}} = 37{,}76$, $C_{\text{СПб}} = 110{,}95$, $C_{\text{ПК}} = 161{,}19$. Для суммарных кривых спроса по каждому предмету для Российской Федерации в целом $C = 100$, как и должно быть при использовании равномерного распределения для коррекции баллов.

Формуле (12) соответствует представление плотности вероятности учащихся по скорректированным баллам ЕГЭ в виде:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{(200 - !\ )^2 + 4(!\ - 100)x}}, 0 \le \text{x} \le 100. \quad (13)$$

На рис. 6 изображены графики плотностей вероятности учащихся для Москвы, Санкт-Петер-

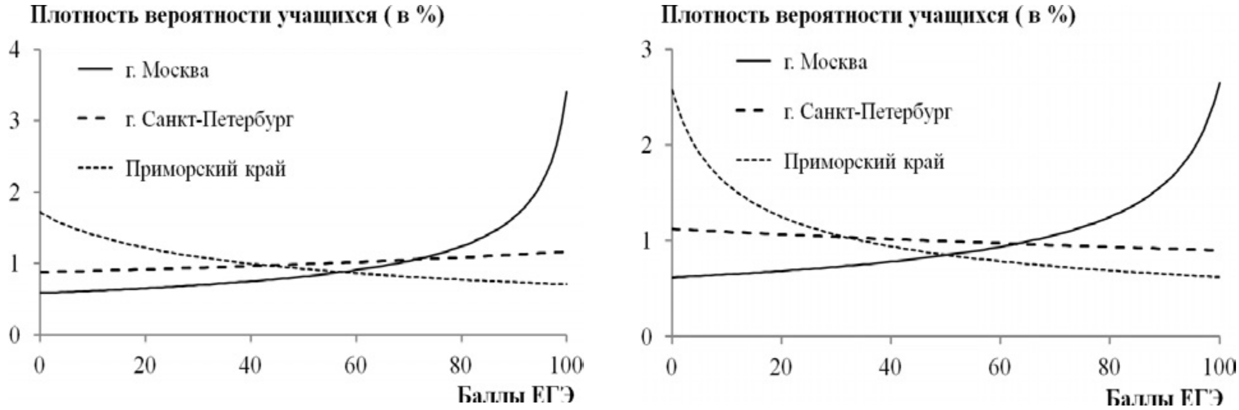


Рис. 6. Плотности вероятности учащихся в Москве, Санкт-Петербурге и Приморском крае, найденные по формуле (13) для ЕГЭ по русскому языку (*а*) и математике (*б*) в 2013 г.

бурга и Приморского края, полученные с помощью подстановки в (13) вышеприведенных оценок параметра C для экзаменов по русскому языку и математике.

Из сопоставления графиков на рис. 6 и кривых спроса на рис. 2 следует, что вогнутые кривые спроса (с оценками параметра $C < 100$) соответствуют возрастающим по x плотностям вероятности $W(x)$. Выпуклые кривые спроса на рис. 2 приводят к оценкам параметра $C < 100$ и к убывающим по x плотностям вероятности $W(x)$ на рис. 6. При этом, чем больше значение параметра C, тем относительно меньше количество высоких баллов по рассматриваемому предмету в регионе и больше число низких баллов по сравнению с общероссийскими показателями.

Из диаграмм рассеяния на рис. 4, 5 можно увидеть, что имеется отрицательная корреляция между значениями параметра C и количеством учащихся в регионе N (в тыс. чел.). Для результатов по русскому языку для федеральных округов оценка коэффициента корреляции равна $\rho = -0{,}71$, для субъектов федерации $\rho = -0{,}31$. Для результатов по математике для федеральных округов оценка коэффициента корреляции между C и N равна $\rho = -0{,}59$, для субъектов федерации $\rho = -0{,}21$. Можно найти следующие уравнения линейных регрессий для параметров C с помощью метода наименьших квадратов по данным для субъектов федераций: для экзамена по русскому языку

$$C_R = \underset{(5,87)}{123{,}15} - \underset{(0,33)}{1{,}33}\,N \qquad (14)$$

и для экзамена по математике

$$C_M = \underset{(9,22)}{121{,}88} - \underset{(0,52)}{1{,}27}\,N. \qquad (15)$$

Здесь в скобках приведены оценки стандартных ошибок для коэффициентов регрессии в форме Уайта, так как в этом случае диагностируется гетероскедастичность остатков регрессии. Отмечая близость друг к другу значений коэффициентов моделей регрессии (14), (15), можно выдвинуть гипотезу об их совпадении, которая не отвергается тестом Чоу на структурные изменения (F-статистика равна 0,0075; P-значение равно 0,9925) и тестами Вальда. Уравнение регрессии для расширенной модели, составленной из объединенных результатов по русскому языку и математике из 166 наблюдаемых данных, имеет вид

$$C = \underset{(5,43)}{122{,}51} - \underset{(0,30)}{1{,}30}\,N. \qquad (16)$$

Рассматривая диаграммы рассеяния на рис. 4, 5 и коэффициенты в уравнениях регрессий (14), (15), можно сделать вывод, что модели для скорректированных баллов для экзаменов по русскому языку и математике близки друг к другу для большинства регионов. Но в некоторых регионах результаты по одному из экзаменов были относительно лучше, чем по другому.

Заключение

В работе предлагается использовать алгоритмы коррекции баллов ЕГЭ по разным предметам для устранения различий статистических характеристик. По скорректированным баллам можно делать выводы о привлекательности различных программ для абитуриентов и эффективности деятельности вузов, избегая искажений, связанных с различиями в структуре вступительных испытаний на различных направлениях обучения.

Для сравнения результатов экзаменов в разных регионах применяются кривые спроса для скорректированных баллов ЕГЭ. Несмотря на существенное различие экзаменов по разным предметам, с помощью алгоритмов коррекции баллов удается выявить некоторые общие для этих предметов закономерности, которые характеризуют ЕГЭ в России в 2013 г. При использовании равномерного распределения вероятности для коррекции баллов получены аппроксимации кривых спроса для федеральных округов и субъектов федерации в виде квадратичных зависимостей от количества учащихся, принимавших участие в экзаменах по русскому языку и по математике. Основным фактором, объясняющим количество различных оценок по русскому языку и математике, является количество учащихся, сдававших экзамен по рассматриваемому предмету. При этом количество высоких оценок в регионах растет быстрее, а количество низких оценок медленнее, чем число учащихся, сдававших экзамен в каждом регионе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азарнова Т. В.* Эмпирический анализ хозяйственного комплекса Воронежской области в контексте оптимизационной модели распределения ресурсов и содействия эффективной занятости / Т. В. Азарнова, Т. Н. Гоголева, И. Ю. Ляшенко, В. Н. Ярышина // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Экономика и управление. – 2016. – № 3. – С. 137–144.

2. *Гоголева Т. Н.* Разработка методики анализа поселений на основе комплексного использования баз данных региональной и муниципальной статистики / Т. Н. Гоголева, И. Н. Петрыкина, М. И. Солосина, И. Н. Щепина // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Экономика и управление. – 2016. – № 4. – С. 166–177.

3. *Barro R. J.* Human Capital and Growth / R. J. Barro // American Economic Review. – 2001. – Vol. 91. – № 2. – P. 12–17.

4. *Hanushek E. A.* Schooling, labor force quality, and the growth of nations / E. A. Hanushek, D. D. Kimko // American Economic Review. – 2000. – Vol. 90. – № 5. – P. 1184–1208.

5. *Hanushek E. A., Ruhose J., Woessmann L.* Economic Gains for U.S. States from Educational Reform. NBER Working Paper № 21770. 57 p. Cambridge, MA, National Bureau of Economic Reasearch. – 2015.

6. *Польдин О. В.* Прогнозирование успеваемости в вузе по результатам ЕГЭ / О. В. Польдин // Прикладная эконометрика. – 2011. – № 21 (1). – С. 56–69.

7. *Андрущак Г. В.* Эффекты сообучения в административно формируемых студенческих группах / Г. В. Андрущак, О. В. Польдин, М. М. Юдкевич // Прикладная эконометрика. – 2012. – № 26 (2). – С. 3–16.

8. *Прахов И. А.* Динамика инвестиций и отдача от дополнительной подготовки к поступлению в вуз / И. А. Прахов // Прикладная эконометрика. – 2015. – № 37 (1). – С. 107–124.

9. *Прахов И. А.* Детерминанты ожидаемой отдачи от высшего образования в Москве / И. А. Прахов // Вопросы образования. – 2017. – № 1. – С. 25–57.

10. *Боченков С. А.* Интерпретация и представление результатов ЕГЭ : проблемы и возможные решения / С. А. Боченков, И. А. Вальдман // Вопросы образования. – 2013. – № 3. – С. 5–27.

11. *Агранович М. Л.* Можно ли сопоставить результаты ЕГЭ и ГИА : сравнение показателей, рассчитанных на основе разных тестовых испытаний / М. Л. Агранович // Вопросы образования. – 2014. – № 1. – С. 80–91.

12. *Польдин О. В.* Сравнение образовательных программ по результатам ЕГЭ зачисленных студентов / О. В. Польдин, А. М. Силаев // Вопросы образования. – 2011. – № 3. – С. 192–209.

13. *Польдин О. В.* Сравнение приема на образовательные программы в вузе по результатам олимпиад и баллов ЕГЭ / О. В. Польдин, В. А. Силаева, А. М. Силаев // Прикладная эконометрика. – 2014. – № 36 (4). – С. 118–132.

14. *Winters R. S.* Score Normalization as a Fair Grading Practice / R. S. Winters // ERIC Digest. 4 p. ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, University of Maryland, College Park, MD. – 2002. – Mode of access: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED470592.pdf

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород)

Силаева В. А., старший преподаватель кафедры математической экономики
E-mail: vasilaeva@hse.ru

Силаев А. М., доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической экономики
E-mail: asilaev@hse.ru
Тел.: +7 (831) 416-95-29

National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod)

Silaeva V. A., Senior Lecturer of the Mathematical Economics Department
E-mail: vasilaeva@hse.ru

Silaev A. M., Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Head of the Mathematical Economics Department
E-mail: asilaev@hse.ru
Tel.: +7 (831) 416-95-29