УДК 517.977.55, 519.868, 658.783

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ КАК ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Л. А. Сазанова

Уральский государственный экономический университет

Поступила в редакцию 16 августа 2017 г.

Аннотация: *рассматривается модель управления товарными запасами. Проблема сводится к решению соответствующей задачи управления линейной дискретной системой. Обосновано построение оптимального управляющего воздействия, приводящего линейную дискретную систему в желаемое конечное состояние при заданных начальных условиях.*
Ключевые слова: *управление запасами, дискретная модель, линейная управляемая система, оптимальное программное управление.*

Abstract: *we consider the inventory management model. The problem is reduced to solving the corresponding control task of linear discrete system. Justified construction of the optimal control action, resulting a linear discrete system to a desired final state of the given initial conditions.*
Key words: *inventory control, discrete model, linear control system, optimal program control.*

Задача управления запасами [1; 2] обычно возникает, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени. В любой задаче управления запасами, как правило, требуется определить количество заказываемой продукции и сроки размещения заказов. Среди прочих приходится давать ответ на два основных вопроса:

1. Какое количество продукции заказывать?
2. Когда заказывать?

Ответ на первый вопрос выражается через размер заказа, определяющий оптимальное количество ресурсов, которое необходимо поставлять всякий раз, когда происходит размещение заказа. В зависимости от рассматриваемой ситуации, размер заказа может меняться во времени. Ответ на второй вопрос зависит от типа системы управления запасами. Например, различают периодический контроль за состоянием запасов (через известные промежутки времени) или непрерывный, когда точка заказа определяется текущим уровнем запаса. Ниже в предлагаемой дискретной модели рассмотрен первый случай.

Величина заказа обычно рассчитывается из условий минимизации суммарных затрат системы управления запасами, которые можно выразить в виде функции известных переменных (количество имеющихся на складе товаров на момент расчета, ресурсы, необходимые для пополнения запаса). Хотя характер спроса является одним из основных факторов при построении модели управления запасами, имеются и другие факторы, влияющие на выбор типа модели: запаздывание поставок, сроки выполнения заказов, число пунктов накопления запасов, число видов продукции (между которыми возможна зависимость, например, взаимозаменяемость).

Показатели, относящиеся к спросу на продукцию, процессу пополнения запаса, оформлению заказа, могут носить как детерминированный, так и случайный характер [2]. Например, спрос может колебаться с переменной интенсивностью в известных границах, заказ формироваться в случайные моменты времени, может возникнуть необходимость создания и хранения страховых резервов и т. д. По этой причине достаточно трудно построить универсальную обобщенную модель управления запасами, которая учитывала бы все разновидности условий, наблюдаемых в реальных системах. В данной работе обсуждается дискретная модель управления запасами [3], для анализа которой поставлена и решена соответствующая задача отыскания соответствующего оптимального программного управления.

Дискретные управляемые процессы [4] занимают важное место в теории и практике оптимального управления. Это связано с тем, что многие задачи экономического планирования, в том числе и упомянутая выше задача управления запасами, описываются уравнениями с дискретным временем. В таких моделях информация о состоянии процесса поступает в фиксированные моменты времени (конец недели, месяца и т. д.), и само управление (принятие соответствующего решения о величине запаса в последующий период) осуществляется дискретно.

Постановка и решение задачи. Рассматривается дискретная модель задачи управления запасами продукции (постановка соответствующей задачи была предложена в [3]) на складе некоторой фирмы, выпускающей n видов товаров. Пусть

$$x(k) = \{x_1(k), \ldots, x_n(k)\}$$

– вектор количества товаров всех видов, имеющихся на складе к концу k-го периода,), $k = 0,1,\ldots, N–1$.

Обозначим через $B_{n\times m}$ технологическую матрицу, через

$$u(k) = \{u_1(k), \ldots, u_m(k)\} \qquad (1)$$

– вектор ресурсов, затрачиваемых на производство единицы, через

$$w(k) = \{w_1(k), \ldots, w_n(k)\}$$

– вектор количества товаров, поставленных со склада в k-й период. Тогда уравнения, описывающие процесс, имеют вид:

$$x(k+1) = x(k) + Bu(k) - w(k),\ k = 0,1,\ldots, N–1. \qquad (2)$$

Далее будем считать, что количество поставленных со склада товаров зависит от количества имеющихся в наличии следующим образом:

$$w_i(k) = a_i(k)x_i(k),\ 0 \le a_i(k) \le 1. \qquad (3)$$

Здесь коэффициенты $a_i(k)$ показывают, какая часть имеющегося запаса i-го товара реализуется в следующий период.

В нашем случае система (2) в матричном виде может быть записана как линейная дискретная управляемая система

$$x(k+1) = A(k)\, x(k) + Bu(k),\ k = 0,1,\ldots,N–1, \qquad (4)$$

где $$A_{n\times n}(k) = \begin{bmatrix} 1-a_1(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-a_2(k) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a_n(k) \end{bmatrix}.$$

В системе (4) вектор ресурсов $u(k)$ (1), $k = 0,1\ldots N–1$ представляет собой набор управляющих воздействий, необходимых для планирования производства товаров и пополнения запасов в течение всего рассматриваемого периода $k = 0,1\ldots N$.

Пусть качество работы системы за плановый период N оценивается величиной

$$J[u] = \sum_{k=0}^{N} u^2(k). \qquad (5)$$

Отметим, что показатель качества подобного вида, квадратичный по управлению, часто используется в задачах оптимального управления как в дискретных системах, так и в системах с непрерывным временем [4; 5]. Обычно величина $J[u]$ (5) выражает суммарные затраты на весь плановый период. Для задач управления с критериями типа (5) разработаны и обоснованы соответствующие методы поиска оптимальных управлений [4; 7], удовлетворяющие заданным граничным условиям.

Будем считать, что система (4) является вполне управляемой [5] на отрезке $[0; N – 1]$. Согласно [7], это означает, что выполняется следующее условие: ранг матрицы $[B, AB, \ldots A^{N–1}B]$ равен n. Последнее условие, как показано в [8], справедливо при $N – 1 \ge n$.

В нашей задаче требуется выбрать управляющие воздействия $u(k)$ ($k = 0,1, \ldots, N–1$) таким образом, чтобы величина показателя качества (5) была минимальной (наименьшая квадратичная интенсивность управления) и чтобы при известном начальном запасе товаров $x(0)$ при $k = 0$ в момент $k = N$ количество товаров равнялось желаемому $x(N) = x_1$. В [8] обоснован метод поиска соответствующего управляющего воздействия для линейной дискретной управляемой системы (4) с квадратичным показателем качества (5). А именно оптимальное программное управление в условиях полной управляемости [5] системы (4) определяется формулами:

$$u^0(k) = S^T(k)D^{-1}c,\ k = 0,1,\ldots, N–1, \qquad (6)$$

где $S^T(k) = \prod_{k=0}^{N-1} A_{n\times n}(N-k-1)B,$

$$D = \sum_{k=0}^{N-1} S(k)S^T(k), \qquad (7)$$

$$c = x(N) - \prod_{k=0}^{N-1} A_{n\times n}(N-k-1)x(0).$$

Следует заметить, что в предположении полной управляемости системы (4) матрица D (7) является обратимой [8].

Пример. Рассмотрим решение задачи при следующих условиях. Количество видов продукции $n = 3$, видов используемых ресурсов (сырья), соответственно, $m = 2$, число рассматриваемых периодов времени (месяцев) $N = 5$. Начальный запас товаров на складе составляет

$$x(0) = [100; 50; 150].$$

Коэффициенты (доли реализуемой продукции) $a_i(k)$, (3) изменяются со временем согласно табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты реализации в соответствующие периоды

ai(k)	Период времени				
	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$a_1(k)$	0,5	0,65	0,8	0,85	0,9
$a_2(k)$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85
$a_3(k)$	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95

Матрицы системы (4) в данном случае являются диагональными. Например, $A(0)$ имеет следующий вид:

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Пусть задана матрица затрачиваемых ресурсов

$$B = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,05 \\ 0,04 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить величины ресурсов (1), удовлетворяющие критерию качества (5) и необходимые для такой организации производства продукции, чтобы к концу пятого периода на складе имелось $x(5) = [1000; 1800; 2000]$ единиц продукции каждого вида соответственно.

Заметим, что реально для планирования будут использоваться близкие к найденным оптимальным (6) величины $u(k)$ (1). Термин «близкие к оптимальным» означает, что мы немного жертвуем величиной критерия качества (5) в пользу выполнения условия целочисленности компонент вектора x (во многих моделях естественным является предположение, что единицы продукта неделимы), округляя $u_i(k)$, $x_j(k)$.

Используя процедуру (6), получаем управляющие воздействия на весь период. Подставляя соответствующие управления в систему (4), с учетом известного начального состояния системы $x(0)$, можем найти все последующие ее состояния. В табл. 2 представлены векторы управлений и определяемых ими состояний складских запасов.

Следует отметить, что задачи управления запасами среди группы управленческих (экономических) задач являются одними из самых сложных в математическом смысле. Данное обстоятельство открывает широкий простор для создания разнообразных моделей и анализа множества конкретных ситуаций в зависимости от факторов и параметров, включенных в ту или иную модель.

В частности, при большом количестве периодов времени вместо программного управления целесообразно использовать управление по принципу обратной связи [5]. В этом случае, решая соответствующую задачу синтеза оптимального управления $u(k, x(k))$ [8], можно оперативно корректировать план на каждом последующем шаге, если в некоторый момент вектор состояния процесса $x(k)$ будет существенно отклоняться от точки рассчитанной оптимальной «программной» траектории [9], например, в силу форс-мажорных обстоятельств. Сказанное выше относится и к случаю, когда в каналах обратной связи присутствует запаздывание (например, информация о количестве оставшихся на удаленном складе товаров к концу периода обновляется в «головном» офисе несвоевременно по ряду причин).

Таблица 2

Векторы оптимальных управлений и состояний

Период времени, k	Вектор ресурсов (управляющее воздействие), $u(k)$	Вектор состояния системы (кол-во продукции каждого вида), $x(k)$
0	[113; 22]	[1000; 1800; 2000]
1	[306; 73]	[62; 32; 96]
2	[1617; 592]	[56; 32; 128]
3	[8251; 3747]	[203; 134; 570]
4	[632; 16650]	[1043; 732; 2907]
5	–	[1000; 1800; 2000]

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стерлигова А. Н.* Управление запасами в цепях поставок : учебник / А. Н. Стерлигова. – М. : ИНФРА-М, 2008.– 430 с.

2. *Просветов Г. И.* Управление запасами : задачи и решения : учеб.-практ. пособие / Г. И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2009. – 192 с.

3. *Моисеев Н. Н.* Математические модели экономической науки : учебник / Н. Н. Моисеев. – М. : Знание, 1973. – 64 с.

4. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами : учебник / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1965. – 474 с.

5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением : учебник / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1968. – 476 с.

6. *Альбрехт Э. Г.* Синтез систем управления с минимальной энергией / Э. Г. Альбрехт, О. Н. Соболев // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 10. – С. 1611–1616.

7. *La Salle J. P.* The Stability and Control of Discrete Processes / J. P. La Salle. – N.Y. Springer-Verlag Inc., 1986. –148 p.

8. *Альбрехт Э. Г.* Синтез оптимального управления в линейных дискретных системах / Э. Г. Альбрехт, Л. А. Сазанова // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2000. – Т. 6. – № 1–2. – С. 477–496.

9. *Сазанова Л. А.* Применение оптимизации линейной дискретной системы к задаче управления запасами / Л. А. Сазанова // Сборник статей XXIV Международной научно-технической конференции «Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании». – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2009. – С. 129–132.

Уральский государственный экономический университет

Сазанова Л. А., доцент кафедры статистики, эконометрики и информатики

E-mail: sazanovalarisa@rambler.ru

Тел.: (343) 261-39-55

Ural State University of Economics

Sazanova L. A., Associate Professor of Statistics, Econometrics and Informatics Department

E-mail: sazanovalarisa@rambler.ru

Tel.: (343) 261-39-55