УДК 519.86

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ПРЕМИАЛЬНЫХ И ЗАРПЛАТЫ

Е. А. Уткина

Казанский федеральный университет

М. С. Матвейчук

Казанский научно-исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева

Поступила в редакцию 21 декабря 2015 г.

Аннотация: *в статье предлагается вариант математически обоснованного расчета распределения заданной денежной суммы на вознаграждение и премиальные по различным группам работников.*
Ключевые слова: *расходы на вознаграждение, премиальные.*

Abstract: *the article suggests mathematically sound option for calculating the distribution given a sum of money to pay and bonuses for different groups of employees.*
Key words: *cost of remuneration, bonuses.*

Данная статья посвящена частной задаче расчета премиальных и заработной платы с использованием метода и алгоритма математически обоснованного расчета распределения заданной денежной суммы на вознаграждение и премиальные по различным группам работников. Задачи такого типа возникают на многих предприятиях и требуют обоснованных решений.

Постановка задачи

Имеется n групп рабочих. Известны плановые расходы по каждой группе на постоянные выплаты и компенсационные выплаты. С помощью этих известных расходов и плановых расходов на стимулирующие выплаты (неизвестные) требуется рассчитать плановые расходы на вознаграждение на всех работников. Плановые расходы на стимулирующие выплаты определяются при этом применением плановых расходов на постоянные выплаты и двух наборов коэффициентов. Эти коэффициенты полезны, когда требуется стимулировать работников с помощью разных видов премий (например, квартальные и за внеурочную работу и т.д.). О последних известно, что они находятся в интервалах: первые – между 0 и α_i, а вторые – между 0 и β_i, где $1 \le i \le n$ – число групп работников, а α_i, β_i – известные, определяемые экономистами предприятия предельные значения выплат. Требуется определить упомянутые наборы коэффициентов.

Решение

Зададим два числовых вектора, каждый с одиннадцатью координатами. Координаты первого из них означают темп изменения средних расходов на вознаграждение на одного работника в среднем, координаты второго означают темп изменения производительности труда одного рабочего. При этом координаты изменяются последовательно от 1 до 2 с шагом 0.1. С помощью этих векторов построим ***матрицу*** M_1.

Координаты первого вектора записаны в первой строке M_1 (считаем ее нулевой), а второго – в первом столбце (его номер тоже нулевой).

Элементы (m_{ij}) заполняем по следующему правилу: $m_{ij} = m_{0j} / m_{i0}$ $(i, j \ge 1)$. Элементы главной диагонали будут равны единице. Элементы, расположенные выше главной диагонали, будут больше 1, а ниже – меньше. Элементы, меньшие или равные 1, подходят для наших последующих рассуждений, большие 1 – не подходят, так как они приведут предприятие к убыточности. Поэтому преобразуем M_1 к матрице M_2. Элементы матрицы M_2, расположенные ниже главной диагонали, а также на ней, остаются неизменными. Те же, что расположены выше главной диагонали, заменим на 1.

Матрица M_1

	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
1	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
1.1	0,91	1	1,09	1,81	1,27	1,36	1,45	1,55	1,64	1,73	1,82
1.2	0,83	0,92	1	1,08	1,17	1,25	1,33	1,42	1,5	1,58	1,67
1.3	0,77	0,85	0,92	1	1,08	1,15	1,23	1,31	1,38	1,46	1,54
1.4	0,71	0,79	0,86	0,93	1	1,07	1,14	1,21	1,29	1,36	1,43
1.5	0,67	0,73	0,8	0,87	0,93	1	1,07	1,13	1,2	1,27	1,33
1.6	0,63	0,69	0,75	0,82	0,88	0,94	1	1,06	1,13	1,19	1,25
1.7	0,59	0,65	0,71	0,76	0,82	0,88	0,94	1	1,06	1,12	1,18
1.8	0,56	0,61	0,67	0,72	0,78	0,83	0,89	0,94	1	1,06	1,11
1.9	0,53	0,58	0,63	0,68	0,74	0,79	0,84	0,89	0,95	1	1,05
2	0.5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1

Матрица M_2

	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.1	0,91	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.2	0,83	0,92	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.3	0,77	0,85	0,92	1	1	1	1	1	1	1	1
1.4	0,71	0,79	0,86	0,93	1	1	1	1	1	1	1
1.5	0,67	0,73	0,8	0,87	0,93	1	1	1	1	1	1
1.6	0,63	0,69	0,75	0,82	0,88	0,94	1	1	1	1	1
1.7	0,59	0,65	0,71	0,76	0,82	0,88	0,94	1	1	1	1
1.8	0,56	0,61	0,67	0,72	0,78	0,83	0,89	0,94	1	1	1
1.9	0,53	0,58	0,63	0,68	0,74	0,79	0,84	0,89	0,95	1	1
2	0.5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1

Используем далее элементы матрицы M_2 для вычисления плановых расходов на вознаграждение рабочих. При этом напомним, что

$$\frac{\text{Темп изм. расходов}}{\text{на вознагр.1 раб-ка}} = \frac{\text{план. расх-ды на вознагр.1 раб-ка}}{\text{факт. расх-ды на вознагр.1 раб-ка}}, \tag{1}$$

$$\frac{\text{Темп изм. произв.}}{\text{труда раб-ка}} = \frac{\text{план. производит. труда 1 раб-ка}}{\text{факт. производит. труда 1 раб-ка}}.$$

Таким образом, элемент

$$\alpha_{ij} = \frac{\text{Темп изм. ср. расх. на вознагр.}}{\text{Темп изм. производит. труда}}.$$

Тогда

Темп изм. ср. расх. на вознагр. =
= α_{ij} × *Темп* изм. производит. труда. (2)

Следовательно, из формулы (1) с учетом (2) следует, что

План. расх-ды на вознагр. 1 раб-ка =
= Темп изм. расходов на вознагр.1 раб-ка × (3)
× Факт. расх-ды на вознагр. 1 раб-ка

полностью известны. Умножая левую часть (3) на общее число работающих, вычислим плановые расходы на вознаграждение для всех работающих предприятия (подразделения). При этом данный результат мы можем получить с помощью другой формулы:

Планов. расх. на вознагр. на всех работающих =
= Планов. расх. постоянная часть +
+ Планов. расх. на компенс. выпл. + (4)
+ Планов. расх. на стимул. выплаты

В формуле (4) два первых слагаемых в правой части являются известными, а последнее вычисляется как линейная комбинация расходов на постоянную часть на каждого работника, а в качестве коэффициентов используются коэффициенты расходов на стимулирующие выплаты (пока неизвестные). Понятно, что мы можем несколько облегчить себе задачу, поскольку постоянная часть является одинаковой для групп работников (в группу может входить как один, так и несколько работников с одинаковой постоянной частью выплат). В общем случае эти коэффициенты представляют собой два n-мерных вектора, где n – есть число групп работников. Обозначим их $X = (x_1,...,x_n)$, $Y = (y_1,...,y_n)$. При этом известно, что все элементы вектора X находятся в интервале $0 \le x_i \le \alpha_i$, а элементы вектора Y находятся в интервале $0 \le y_i \le \beta_i$ ($i = 1,\ldots,n$). Значения 0 эти коэффициенты могут достигать только в случае, когда

А = Планов. расх. на вознагр. на всех работающих – – (Планов. расх. постоянная часть + Планов. расх. на компенс. выпл.) = 0.

Ранее рассматривались задачи линейного программирования, в которых требовалось определить минимум или максимум функционала при дополнительных ограничениях типа неравенств на искомые переменные. Однако в данном случае этот метод не применим, поскольку требуется найти минимум $|A|$. И кроме того, нам достаточно определить некоторый (возможно, не оптимальный) набор коэффициентов X и Y, удовлетворяющий заданным условиям. Таким образом, нам требуется решить систему

$$L(X,Y) = (x_1 + y_1)a_1 + (x_2 + y_2)a_2 + \ldots + (x_n + y_n)a_n - A = 0, \quad (5)$$

$$0 \le x_i \le \alpha_i,\ 0 \le y_i \le \beta_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

где α_i – постоянная часть плановых расходов на i-ю группу работников. Таким образом, мы имеем гиперплоскость в пространстве $2n$ измерений и гиперкуб в этом же пространстве. Если эти множества пересекаются, нам требуется найти хотя бы одну точку пересечения. При этом под точкой мы понимаем некоторый фиксированный набор x_i, y_i.

I. Частный случай

Поясним, как мы будем решать эту задачу на примере пространства $n = 1$. Для определенности будем считать, что $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0{,}3$. Поскольку независимых переменных у нас 2, то мы имеем дело с декартовой системой координат на плоскости. Областью отыскания решения является прямоугольник со сторонами, параллельными осям $0x$ и $0y$, причем две стороны совпадают с этими осями. Наша гиперплоскость в данном случае является прямой, заданной уравнением

$$L(x_1, y_1) = x_1\alpha_1 + y_1\alpha_1 - \mathrm{A} = 0. \quad (6)$$

Вычислим значения выражения в левой части (6) в точках вершин нашего прямоугольника, а именно: в точках с координатами B(0,0), C(1,0), D(0, 0.3), E(1, 0.3). Здесь возможны несколько случаев:

1) значения L(B),…, *L(E)* имеют одинаковый знак (не важно, положительный или отрицательный);
2) имеется значение L, равное 0;
3) хотя бы два значения L имеют противоположные знаки.

Случай 1 означает, что решения данная задача не имеет. Случай 2 означает, что решение нами найдено. Решением является та вершина прямоугольника, подстановка которой в L дала 0. В случае 3 поступим следующим образом. Составим уравнение прямой, проходящей через вершины прямоугольника с противоположными значениями L, и найдем точку пересечения (6) с найденной прямой. Это и будет искомое решение. Здесь мы использовали тот факт, что область является выпуклой.

II. Общий случай

Здесь воспользуемся алгоритмом предыдущего случая. А именно, сначала вычислим значения $L(X,Y)$ в вершинах гиперкуба $\prod_{i=1}^{n} [0,\alpha_i] \times \prod_{i=1}^{n} [0,\beta_i]$. Далее необходимо проверить, какой из случаев 1–3 имеет место. Выводы здесь те же. Для последнего случая поступим так. Пусть в точках с координатами $(x_1',\ldots,x_n';y_1',\ldots,y_n')$, $(x_1'',\ldots,x_n'';y_1'',\ldots,y_n'')$ функционал L имеет разные знаки. Составим уравнение прямой в $2n$-мерном пространстве. Оно имеет вид

$$\frac{x_1 - x_1'}{x_1'' - x_1'} = \frac{x_2 - x_2'}{x_2'' - x_2'} = \ldots = \frac{x_n - x_n'}{x_n'' - x_n'} = \frac{y_1 - y_1'}{y_1'' - y_1'} = \\ = \frac{y_2 - y_2'}{y_2'' - y_2'} = \ldots = \frac{y_n - y_n'}{y_n'' - y_n'}. \quad (7)$$

Решим теперь систему уравнений (5), (7). Преобразуем для этого (7) к параметрическому виду

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + t(x_1'' - x_1'), \\ &\ldots \\ x_n &= x_n' + t(x_n'' - x_n'), \\ y_1 &= y_1' + t(y_1'' - y_1'), \\ &\ldots \\ y_n &= y_n' + t(y_n'' - y_n'). \end{aligned} \quad (8)$$

Выберем в качестве наборов координат

$(x_1',\ldots x_n', y_1',\ldots,y_n') = (0,\ldots,0)$,

$(x_1'',\ldots x_n'', y_1'',\ldots,y_n'') = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

Тогда $x_1 = t\alpha_1, \ldots, x_n = t\alpha_n, y_1 = t\beta_1, \ldots, y_n = t\beta_n$.

Подставим полученные значения в (5) и найдем значение t:

$$t = A/((\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)a_n).$$

Подставим затем его в (8) и получим искомые значения коэффициентов x и y:

$$x_1 = A\alpha_1 /((\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)a_n),$$

$$\dots$$

$$x_n = A\alpha_n /((\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)a_n),$$

$$y_1 = A\beta_1 /((\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)a_n),$$

$$\dots$$

$$y_n = A\beta_n /((\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + ... + (\alpha_n + \beta_n)a_n).$$

Эти коэффициенты для всей группы.

Чтобы получить коэффициенты выплаты для каждого конкретного работника группы i, требуется разделить коэффициенты x_i, y_i на число работников в группе.

Таким образом, представленный подход к расчету премиальных и заработной платы является новым. Он может быть использован на практике в конкретных предприятиях.

Казанский федеральный университет

Уткина Е. А., доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем

E-mail: eutkina1@yandex.ru
Тел.: 8-905-316-43-28

Казанский научно-исследовательский технический университет имени А. Н. Туполева

Матвейчук М. С., доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики КНИТУ– КАИ

E-mail: marjan.matvejchuk@ksu.ru
Tel.: 8-987-267-81-19

Kazan Federal University

Utkina E. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Information Systems Department

E-mail: eutkina1@yandex.ru
Tel.: 8-905-316-43-28

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev

Matvejchuk M. S., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of High Mathematics Department of KNRTU-KAI