УДК 338

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. В. Холодкова

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 21 января 2016 г.

Аннотация: *статья посвящена проблеме решения управленческих задач по принятию решения об оптимальном объеме производства и затратах на производство продукции в целях достижения эффективности деятельности предприятия. Задача рассматривается как задача линейного программирования при условии наличия в векторе ресурсных ограничений параметра.*
Ключевые слова: *оптимизационные задачи, симплекс-метод, линейное программирование, параметрическое линейное программирование.*

Abstract: *this article is devoted to the solving of the managerial problem of the optimal production volume and production costs decision making in order to achieve the efficiency of the company. The problem is considered as a linear programming problem provided that the vector of resource constraints contains a parameter.*
Key words: *optimization problems, simplex method, linear programming, parametric linear programming.*

Любой менеджер при управлении предприятием стремится к достижению эффективности производственной деятельности. Понятие «эффективность» тесно связано с различными характеристиками деятельности компании как внутри нее, так и во внешних отношениях.

Говоря об эффективности производственной деятельности предприятия, необходимо упомянуть, об изменении соотношения характеристик предприятия во времени. Существует несколько подходов к анализу и моделированию показателей деятельности предприятия. В первую очередь это сбалансированная система показателей (Balanced Scorecard), разработанная профессором Робертом Капланом [1], также это подход с точки зрения теоретико-игровых моделей, моделей экономического роста и др. В данной статье предлагается рассмотреть возможность применения к оценке эффективности деятельности предприятия оптимизационного подхода, который широко освещен в книге Х. Таха «Введение в исследование операций» [2].

Понятие эффективности рассматривается менеджером в данном случае как увеличение объемов производства от базового периода в следующем периоде при условии общего снижения издержек на производства на предприятии в целом или в каждом конкретном подразделении.

Таким образом, при оценке изменчивости объемов производства менеджера будет интересовать соотношение [3]:

$$p = \frac{P_1 - P_0}{P_0}, \tag{1}$$

где P_0 – объем производства в 0 (базовом) периоде; P_1 – объем производства в 1 (текущем) периоде.

Если за определенный период деятельности предприятие увеличило объем предложения своих товаров на рынке – это, безусловно, положительный факт. Не нужно забывать о том, что сам рынок также мог увеличить за этот период времени. Следовательно, для оценки эффективности необходимо установить, как в то же время менялся рынок, и на сколько при этом возросли издержки предприятия.

Если предприятие имеет несколько подразделений или производит несколько видов продукции $j \in \{1...N\}$, то для эффективности необходимо определять положительность соотношений для каждого подразделения:

$$p_j = \frac{P_1^j - P_0^j}{P_0^j}. \tag{2}$$

Таким образом, бизнес или подразделение считается успешно развивающимся при устойчивом положительном значении p_j. Причины появления отрицательных значений p_j необходимо анализировать.

В рамках предложенной терминологии рассмотрим задачу оценки эффективности деятельности предприятия с использованием моделей параметрического линейного программирования. Механизм ее решения включает в себя несколько взаимосвязанных этапов:

1. Предприятие обладает исходной информацией об объемах производства P_0.

2. Для нахождения оптимального значения объемов производства продукции на следующий временной период P_1 решается задача линейного программирования.

3. После получения значения P_1 оценивается значение параметра P и принимается решение об оптимизации структуры производства компании.

Задачу по определению изменчивости производственных показателей можно записать в терминах оптимизационной задачи линейного программирования.

Задача о максимизации долевого увеличения объема производства

Для решения вопроса об объеме производства (р) можно сформулировать как задачу о максимизации долевого увеличения объема производства.

Предположим, на рынке функционирует предприятие, занимающееся производством N-видов продукции. На производство N-видов продукции $(j \in \{1...N\})$ (не ограничивая общности, можно считать, что каждый продукт производится отдельным подразделением) затрачивается M-видов ресурсов $(i \in \{1...M\})$. Ресурсы предприятия на производство продукции ограничены. Необходимо определить оптимальный объем производства в условиях ограниченности ресурсов. При формировании задачи предполагается, что на производство единицы j-й продукции затрачивается фиксированный объем i-го ресурса (a_{ij}). Задача заключается в максимизации объема производства по всем продуктам при заданном ограничении на ресурсы.

Рассмотрим ***исходную задачу по максимизации производства.***

В качестве целевой функции в задаче рассматривается изменение объемов производства товаров по периодам или долевое увеличение объемов производства товаров:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{p_1^j - p_0^j}{p_0^j} \longrightarrow \max. \tag{3}$$

При этом возможности производства каждого товара ограничены объемом ресурсов, имеющихся у предприятия в целом.

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_1^j \le b_i, \tag{4}$$

$$p_1^j \ge 0, \forall j \in \{1...N\},$$

где p_1^j – объем производства j-го товара в 1-м периоде; p_0^j – объем производства j-го товара в 0-м периоде; a_{ij} – затраты i-го ресурса на производство единицы j-й продукции; b_i – ограничения на i-й ресурс, базовая часть ограничения на i-й ресурс.

Представим данную задачу в каноническом классическом виде задачи линейного программирования [4, с. 150]:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j x_j \longrightarrow \max, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i, \tag{6}$$

$$x_1^j \ge 0, \forall j \in \{1...N\},$$

где $x_j = p_1^j$ – переменные целевой функции; $c_j = \frac{1}{p_0^j}$ – коэффициент целевой функции – объем производства j-го продукта в 0-м периоде.

Во многих случаях ограничение на ресурсы жестко задано. Введем наличие параметрической составляющей в ограничениях, которая означает, что ограничение на ресурсы в рассматриваемом периоде может иметь отклонения от запланированного значения в зависимости от некоторого фактора. Например, для предприятий в состав затрат которых входят компоненты, закупаемые не за национальную валюту, в структуре ресурсного ограничения существует переменная валютная составляющая (изменение курса валюты по отношению к валюте страны). Тогда такая задача с параметром в ограничениях имеет следующий вид:

– *целевая функция:*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{p_1^j - p_0^j}{p_0^j} \longrightarrow \max; \tag{7}$$

– *ресурсные ограничения*:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_1^j = b_i + \overline{b}_i \Theta, \tag{8}$$

$$p_1^j \ge 0, \forall i \in \{1...N\},$$

где b_i – ограничения на i-й ресурс, – базовая часть ограничения на i-й ресурс; $\overline{b}_i$ – ограничения на i-й ресурс, переменная часть ограничения на i-й ресурс; Θ – параметр.

Представим данную задачу в терминах задачи линейного программирования с параметром в ограничениях:

$$f(x,\Theta)=\sum_{j=1}^{N} c_j x_j \longrightarrow \max, \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i + \overline{b}_i\Theta, \qquad (10)$$

$$x_1^j \ge 0, \forall\, j \in \{1...N\}.$$

По соображениям развития содержательной интерпретации необходимо будет рассмотреть задачу, двойственную к исходной задаче [5, с. 17]. Она с содержательной точки зрения может трактоваться как оценка достаточности ресурсных составляющих [6, с. 264]:

$$f(y,\Theta)=\sum_{i=1}^{M}(b_i+\overline{b}_i\Theta)y_i \to \min. \qquad (11)$$

При следующих ограничениях двойственной задачи:

$$\sum_{i=1}^{M} a_{ij} y_i \ge c_j, \qquad (12)$$

$$y_i \ge 0, \forall\, i \in \{1...M\},$$

где y_i – вектор двойственных переменных.

При анализе полученных формулировок задач необходимо обратить внимание на взаимосвязь решения основной задачи (базисный план, максимизирующий объем выпуска продукции) и двойственной задачи линейного программирования (базисный план минимизирует издержки на производство продукции) [5, с. 16].

Решение задачи симплекс-методом с параметром

Как правило, для решения стандартной задачи линейного программирования используется алгоритм симплекс-метода [7, с. 148–150], который позволяет за конечное число итерации определить оптимальное решение или установить, что целевая функция не ограничена множеством решений. При решении симплекс-методом рассматривается каноническая задача линейного программирования:

$$(D,f): f(x)=cx \to \max,$$

$$D=\left\{x \in R^N : Ax=b, x \ge 0\right\}, \qquad (13)$$

где $A=(a_{ij})_{M\times N}$ – матрица, ранг матрицы M; $c=(c_1, c_2,\dots c_N)$; $x^T=(x_1, x_2,\dots x_N)$; $b^T=(b_1, b_2,\dots b_M)$; a^j – столбец матрицы A; a_i – строка матрицы A.

В задаче осуществляется нахождение базисного плана $x(B)$ для начального базиса $B=\{a^{i1}, a^{j2},\dots,a^{jM}\}$ в предположении, что $\Theta=0$.

Для решения задачи составляется симплекс-таблица с дополнительными строками для получения значения целевой функции.

Далее проводится проверка оптимальности найденного «текущего» базисного плана $x(B)$. Если он не является оптимальным, осуществляется переход к новому базису B' и базисному плану $x(B')$. И так далее до нахождения оптимального базисного плана или определения факта неограниченности целевой функции на множестве допустимых базисных планов.

Если оптимальный базисный план задачи существует, необходимо оценить интервал изменения параметра, при котором оптимальность базисного плана сохранится. Находятся все значения параметра, при котором базисный план сохраняет оптимальность.

Затем мы обращаемся к алгоритму решения двойственной задачи. Параметрическое исследование данной задачи основывается на двойственных симплекс-процедурах. Решение осуществляется по схеме решения задач параметрического линейного программирования, в которой коэффициенты целевой функции двойственной задачи зависят от параметра [8, с. 478–479].

Двойственная задача решается стандартным симплекс-методом: определяется базис задачи, базисный план, находится оптимальный базисный план.

Чтобы определить значения параметра, при которых максимум целевой функции достигается при том же плане, т.е. план оптимален – нужно, чтобы все элементы строки целевой функции (двойственная задача) $(b_i+\overline{b}_i\Theta)$ были неотрицательны, а значит, выполнялись соответствующие неравенства.

Формируется система уравнений

$$b_i+\overline{b}_i\Theta \ge 0, \forall i \in \{1...M\}, \qquad (14)$$

в которой все компоненты целевой функции, в двойственной задаче (ресурсное ограничение, при решении прямой задачи, содержащие параметр), должны быть неотрицательны. Таким образом, находится переломное значение параметра, в котором одно из ограничений нарушается.

Пограничное значение параметра определяется из соотношения:

$$\Theta=\max\left\{\frac{b_i}{\overline{b}_i}\right\}, \forall i \in \{1...M\}. \qquad (15)$$

Решение указанной системы дает ответ на вопрос об интервале изменения параметра Θ, при котором оптимальность базисного плана $x(B) = (x^1, x^2,\ldots x^N)$ сохраняется.

Если оптимальность базисного плана существует на некотором интервале $[a, b]$, этот интервал исключают из рассмотрения. Рассматриваются, соответственно, два оставшихся интервала $(\infty, a]$ и $[b, \infty)$, на которых необходимо осуществить нахождение оптимального базисного плана и т.д.

Далее выбирается компонента x^j, по которой и происходит нарушение значения неравенства, если в строке есть отрицательное число (эта компонента исключается из базисного плана), значит есть возможность улучшения плана и нахождения следующего оптимального базисного плана, если отрицательных компонент нет, то задача неразрешима.

Если задача разрешима, находится следующий оптимальный базисный план на основании вышеизложенного алгоритма, а также интервал изменения параметра, на котором решение оптимально.

Решение задачи, как правило, представляет собой значения оптимального плана на определенных интервалах (число интервалов – L) значения параметра (Θ) в виде, указанном в табл. 1.

Для заданных в задаче ограничений (9) с целевой функцией (8) в табл. 1 представлено множество решений задачи параметрического программирования как прямой, так и двойственной. Отметим, что в данном случае не учитывается распределение параметра Θ, что, скорее всего, не соответствует реалиям, и параметр будет обладать некоторым распределением.

В том случае, если параметр в задаче характеризуется определенной функцией распределения, можно оценить вероятность реализации диапазона параметра Θ. Таким образом, зная распределение параметра (например, курс доллара с заданными параметрам – математическое ожидание, дисперсия, или моде, медиана), мы можем выбрать наиболее вероятный интервал параметра и соответствующий ему базисный план задачи. Оценив вероятность интервала, можно определиться с наиболее вероятным базисным планом задачи.

В качестве распределения параметра могут быть выбраны различные функции распределения в зависимости от характеристик параметра. При отсутствии информации о распределении параметра предлагается воспользоваться треугольным распределением (распределение Симпсона) для моделирования экономических величин, поскольку оно обладает характеристиками, схожими с характеристиками экономических параметров, ввиду ограниченности и возможности задания отсутствия отрицательных значений.

Данное распределение характеризуется следующей функцией распределения (случайная величина ξ) на отрезке $[a, b]$, $a < b$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-a} / (b-a)(c-a), \ a \le x \le c \\ \dfrac{2}{b-x} / (b-a)(c-a), \ c \le x \le c \\ 0, \textit{иначе} \end{cases},$$

где a, b и c – вещественные числа, для которых $a < c < b$; a – параметр положения; $b - a$ – масштабный параметр; c – параметр формы.

Зная плотность распределения параметра Θ на указанном интервале, можно оценить вероятность реализации каждого базисного решения, а именно, определить наиболее вероятный базис. Решением задачи будет являться нахождение такого p, для которого $\overline{p} = \max\{p_j\}$ на множестве всех возможных интервалов изменения параметра.

Таким образом, решение задачи с учетом параметра можно записать в виде табл. 2.

Таблица 1

Решение прямой и двойственной задачи

Диапазон параметра (Θ)	$-\infty<\Theta< k_1$	$k_1< \Theta < k_2$	…	$k_L< \Theta < \infty$
Двойственная задача	$y^1, f(y^1, \Theta)$	$y^2, f(y^2, \Theta)$		$y^L, f(y^L, \Theta)$
Исходная задача	$x^1, f(x^1, \Theta)$	$x^2, f(x^2, \Theta)$		$x^L, f(x^L, \Theta)$

Таблица 2

Решение прямой и двойственной задачи

Диапазон параметра (Θ)	$-\infty<\Theta< k_1$	$k_1< \Theta < k_2$	…	$k_L< \Theta < \infty$
Вероятность	p_1	p_2		p_L
Двойственная задача	$y^1, f(y^1, \Theta)$	$y^2, f(y^2, \Theta)$		$y^L, f(y^L, \Theta)$
Исходная задача	$x^1, f(x^1, \Theta)$	$x^2, f(x^2, \Theta)$		$x^L, f(x^L, \Theta)$

В результате можно оценить наиболее вероятное решение как двойственной, так и прямой задачи, а следовательно, установить как наиболее вероятный оптимальный план производства, так и получить оценки издержек.

Треугольное распределение характеризуется в том числе таким параметром, как дисперсия. Выбирая различные значения дисперсии рассматриваемой случайной величины, можно провести анализ устойчивости полученного наиболее вероятного базисного плана. В соответствии с этим можем провести анализ изменения вероятностного интервала от изменения дисперсии распределение случайной величины.

Интересен тот факт, что при решении основной задачЬ симплекс-методом мы получаем базисный план, максимизирующий объем выпуска продукции, но если говорить о связи задач линейного программирования прямой и двойственной, то двойственные переменные отвечают одновременно за минимизацию издержек. Решая подобную задачу, мы получаем значения обоих параметров. Собственно решение прямой и двойственной задачи и дает ответ на вопрос относительно экономической эффективности выпуска того или иного вида продукции.

Таким образом, решив задачу указанными методами, мы не только получим ответ на вопрос об оптимальном объеме производства, но также решим задачу о минимизации издержек, а значит, получим наиболее эффективное решение по производству рассматриваемого товара.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaplan R. S.*, and *D. P. Norton*. The Balanced Scorecard : Translating Strategy into Action. Boston, MA : Harvard Business School Press, 1996. – 336 p.

2. *Таха Х.* Введение в исследование операций / Х. Таха. – М., 1985. – Т. 1. – 479 с.

3. *Холодкова В. В.* Построение непрерывной системы оценки эффективности деятельности компании / В. В. Холодкова, В. М. Денисов // Менеджмент в России и за рубежом. – 2011. – № 3. – С. 95–99.

4. *Конюховский П. В.* Математические методы исследования операций в экономике / П. В. Конюховский. – СПб, 2000. – 208 с.

5. *Коростелева М. В*. Основы линейного программирования : информ.-справ. пособие / М. В. Коростелева. – СПб., 2004.

6. *Кузнецов А. В*. Высшая математика : математическое программирование : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : Высшая школа, 1994. – 286 с.

7. *Абрамов Л. М.* Математические программирование / Л. М. Абрамов, В. Ф. Капустин. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1981. – 328 с.

8. *Юдин Д. Б.* Задачи и методы линейного программирования / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. – М. : Советское радио, 1961. – 492 с.

Санкт-Петербургский государственный университет

Холодкова В. В., кандидат экономических наук, доцент кафедры экономической кибернетики

E-mail: holodkova_v@mail.ru

Saint-Petersburg State University

Kholodkova V. V., Candidate of Economic Sciences, Associate Professor of Economic Cybernetics Department

E-mail: holodkova_v@mail.ru