УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.710.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ И СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С. П. Зубова, Чан Тхань Туан

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15 сентября 2010 г.

Аннотация: *для линейной стационарной дискретной системы управления предлагается метод построения управления и состояний системы. Метод основан на расщеплении пространств на подпространства с использованием полуобратной матрицы. Выявляется «степень свободы» системы.*
Ключевые слова: *дискретная система управления, образ, ядро, коядро, полуобратная матрица.*

Abstract: *for linear time-invariant discrete-time control system is proposed method of construction of the system states and control. The method is based on the splitting of the spaces into subspaces using semi-inverse matrix. Reveals the «degree of freedom» of the system.*
Key words: *discrete control system, image, Ker, Coker, semi-inverse matrix.*

При математическом моделировании многих процессов в экономике, технике [1], биологии, социологии [2] и др. широко используются линейные динамические системы с дискретным временем (дискретные системы). Это обуславливается, в частности, широким привлечением вычислительных машин для решения различных задач. Такие экономические задачи, как распределение выпуска продукции между несколькими производственными участками, составление плана перевозок, распределение инвестиций в различные отрасли производства и т.д., описываются именно дискретными моделями.

Среди дискретных систем управления важное место занимают линейные стационарные системы. Ниже рассматривается задача приведения такой системы из произвольно заданного состояния в произвольно заданное конечное состояние. Такая задача решалась ранее, наиболее эффективный метод решения предложен в работах Л. А. Сазановой [3].

В данной работе предложен принципиально новый подход к решению поставленной задачи, основанный на переходе от заданной системы управления к системам меньшей размерности. При этом не требуется предварительного установления управляемости системы. Предлагается многошаговая процедура, в процессе реализации которой выявляется управляемость или неуправляемость системы. Находятся значения состояний системы во всех промежуточных точках. Выявляются «свободные» компоненты (или линейные комбинации компонент) состояний системы, т.е. те, которым можно придавать любые (желаемые) значения. Определяются «свободные» компоненты, или линейные комбинации, управляющих воздействий, при любом выборе которых система приводится в заданное конечное состояние надлежащим выбором (указанным здесь) остальных компонент управления.

Преимущество данного метода особенно наглядно при большом количестве значений времени t_k, поскольку при решении задачи методом, рассмотренном в [3], требуется вычисление большого количества произведений матриц. Второе преимущество проявляется при решении задач с ограничениями на состояния системы, когда «свободным» компонентам можно придать желаемые значения.

Заметим, что при обосновании метода применяются проекторы на подпространства, построение которых – не простая задача. При решении практических же задач построения проекторов не требуется, достаточно решения простых алгебраических уравнений.

Предлагаемый метод применим для решения более общих задач, например, когда в левой части уравнений при неизвестных состояниях стоят необратимые матрицы. Метод, рассмотренный в [3], в этом случае неприменим.

Выявление «свободных» элементов в системе позволяет решать задачи оптимального управления, т.е. среди всех возможных состояний и управлений находить те, которые минимизируют (максимизируют) некоторый функционал. Предлагаемый метод особенно эффективен, если требуется оптимизировать именно состояния системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ k = \overline{0, N-1}, \qquad (1.1)$$

с условиями

$$x(0) = a_0,\ x(N) = b_0, \qquad (1.2)$$

где x – n-мерный вектор фазовых координат, u – m-мерный вектор управляющих воздействий, A, B – матрицы соответствующих размеров.

Вектор $x(k)$ называется *состоянием системы в момент времени k*, а $u(k)$ – *управление* или *управляющее воздействие*.

Система (1.1) называется *вполне (полностью) управляемой,* если существуют управления $u(k)$ при применении которых система (1.1) переводится из произвольного начального состояния a_0 в произвольное конечное состояние b_0.

Наша задача найти $u(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, $x(k)$, $k = \overline{1, N-1}$, и выявить «свободные» компоненты системы.

Известен критерий полной управляемости системы: для того чтобы система (1.1) была полностью управляема, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{rank}\left(B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B\right) = n. \qquad (1.3)$$

Указанный критерий носит название «критерий Калмана», хотя сам Р. Е. Калман [4] заметил: «Это условие использовано независимо для другого случая Понтрягиным»*.

В работе нами также будет установлено полное условие вполне управляемой системы (1.1) – это сюръективность некоторой матрицы B_p, где $p = \min q$, а q таково, что

$$\operatorname{rank}\left(B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{q}B\right) = n.$$

* *Понтрягин Л. С.* Оптимальные процессы регулирования // УМН, XIV. 1959. Вып. 1(85). С. 3–20.

2. МЕТОД

Для решения поставленных задач применяется метод каскадной декомпозиции исходной системы, разработанный в [5].

Свойство 1. Если $C: R^m \to R^n$, то

$$R^m = \operatorname{Coim} C \dotplus \operatorname{Ker} C;\ R^n = \operatorname{Im} C \dotplus \operatorname{Coker} C, \qquad (2.1)$$

где $\operatorname{Ker}C$ – ядро C, т.е. совокупность $\{z\}$ решений уравнения $Cz=0$; $\operatorname{Im}C$ – образ C, т.е. $C(R^m)=\operatorname{Im}C$. Через $\operatorname{Coim}C$ обозначено прямое дополнение к $\operatorname{Ker}C$ в R^m, через $\operatorname{Coker}C$ – прямое дополнение к $\operatorname{Im}C$ в R^n.

Сужение $\tilde{C}$ отображения C на $\operatorname{Coim}C$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между $\operatorname{Coim}C$ и $\operatorname{Im}C$. Матрицу обратного к $\tilde{C}$ отображения называют полуобратной и обозначают C^-.

Отображения и их матрицы будем обозначать одинаково, через I будем обозначать единичную матрицу (тождественное отображение) в соответствующем пространстве.

Отображение C^-C является проектором на $\operatorname{Coim}C$, $I-C^-C$ – это проектор на $\operatorname{Ker}C$, который обозначается через P

$$P = I - C^-C.$$

Отображение CC^- является проектором на $\operatorname{Im}C$, $I - CC^-$ – это проектор на $\operatorname{Coker}C$, который обозначается через Q

$$Q = I - CC^-.$$

Для P и Q выполняются свойства проекторов

$$P^2 = P,\ Q^2 = Q,\ (I-P)^2 = I - P,\ (I-Q)^2 = I - Q.$$

Заметим, что матрицы C^-, P и Q определяются неоднозначно. Если же взять $\operatorname{Ker}C=\operatorname{Coker}C^*$, $\operatorname{Im}C=\operatorname{Coim}C^*$, где C^* – матрица, сопряженная к C, то $C^- = C^+$ – псевдообратная матрица. Тогда разложение (2.1) однозначно, P и Q однозначные [6].

Пример 1. Пусть $C: R^3 \to R^3$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем работать с уравнениями вида $Cv=w$. Известно [6], что оно разрешимо относительно v, лишь если $Qw=0$. Решение v неединственно, прибавление к v любого элемента из Ker$C$ дает другое решение. Будем пользоваться этими фактами в следующей форме:

Свойство 2. Соотношение

$$Cv = w,\ v \in R^m, w \in R^n \tag{2.2}$$

эквивалентно системе

$$Qw = 0; \tag{2.3}$$

$$v = C^- w + Pv, \tag{2.4}$$

где Pv – произвольный элемент из Ker$C$.

В примере 1 уравнение (2.2) имеет вид

$$\begin{cases} v_1 = w_1 \\ v_2 = w_2 \\ 0 = w_3. \end{cases}$$

Решение v существует, лишь если $w_3=0$ (т.е. $Qw=0$), и имеет вид

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

т.е. вид (2.4).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Главный шаг. Перейдем к решению задачи, поставленной в разделе 1: для уравнения (1.1)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ k = \overline{0, N-1}, \tag{3.1}$$

с условиями

$$x(0) = a_0,\ x(N) = b_0, \tag{3.2}$$

найти $u(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ и $x(k)$, $k = \overline{1, N-1}$.

Применим к уравнению (3.1) свойство 2, т.е. запишем его в эквивалентной форме

$$Qx(k+1) = QAx(k); \tag{3.3}$$

$$u(k) = B^- x(k+1) - B^- Ax(k) + z(k), \tag{3.4}$$

где Q – проектор на Coker$B$, $z(k)=Pu(k)$ – произвольные элементы из Ker$B$, P – проектор на Ker$B$.

Наша цель: из уравнения (3.3) и условий (3.2) найти все возможные значения $x(k)$, $k = \overline{1, N-1}$, и затем по формуле (3.4) найти $u(k)$, $k = \overline{0, N-1}$.

Обозначим

$$Qx(k) = x^1(k),\ (I-Q)x(k) = y^1(k), \tag{3.5}$$

тогда

$$x(k) = x^1(k) + y^1(k), \tag{3.6}$$

и уравнение (3.3) принимает вид

$$x^1(k+1) = QAx(k). \tag{3.7}$$

Отсюда, в частности, следует при $k=0$

$$x^1(1) = QAx(0) = QAa_0, \tag{3.8}$$

и из (3.2)

$$x^1(N) = Qx(N) = Qb_0. \tag{3.9}$$

Матрицу QA запишем в форме

$$QA=QAQ+QA(I–Q)$$

и обозначим

$$QAQ=A_1,\ QA(I–Q)=B_1. \tag{3.10}$$

Теперь уравнение (3.7) можно записать в виде

$$x^1(k+1) = A_1 x^1(k) + B_1 y^1(k), \tag{3.11}$$

вполне аналогичном виду (3.1), но с элементами $x^1(k)$, $y^1(k)$ из более «узких» пространств, чем R^n и R^m. За схожесть ролей $x(k)$ и $x^1(k)$ называют $x^1(k)$ псевдосостоянием системы, а за схожесть ролей $u(k)$ и $y^1(k)$ называют $y^1(k)$ псевдоуправлением (хотя это часть $x(k)$, что вытекает из равенства (3.6)).

Итак, от задачи (3.1), (3.2), $k = \overline{0, N-1}$ мы перешли к задаче (3.11), (3.8), (3.9) с меньшим количеством k $(k = \overline{1, N-1})$ и с неизвестными $x^1(k)$, $y^1(k)$ из более «узких» пространств. Возможны два случая.

Случай 1. Если B_1 – сюръективная матрица (т.е. ее коядро состоит лишь из нулевого элемента), то из (3.11) получаем

$$y^1(k) = B_1^- x^1(k+1) - B_1^- A_1 x^1(k) + z^1(k),$$

где $z^1(k)$ – произвольные элементы из KerB_1.

Поставив $y^1(k)$ в (3.6), находим

$$x(k) = B_1^- x^1(k+1) + (Q - B_1^- A_1) x^1(k) + z^1(k),\quad k = \overline{1, N-1}. \tag{3.12}$$

Взяв произвольные элементы $x^1(N-1)$, $x^1(N-2)$, ... , $x^1(2)$, из формулы (3.12) с помощью значений $x^1(1) = QAa_0$, $x^1(N) = Qb_0$ (см. (3.8), (3.9)) находим последовательно значения $x(N–1)$, $x(N– 2)$, ... , $x(1)$.

Затем по формулам (3.4) строим u(k), $k = \overline{0, N-1}$.

Итак, если B_1 – сюръективная матрица и $N \geq 2$, то система (1.1), (1.2) (или, что то же (3.1), (3.2)) полностью управляема. При этом элементы $x^1(k)$, $k = \overline{2, N-1}$, элементы $z^1(k)$, $k = \overline{1, N-1}$ и $z(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ – произвольные элементы из соответствующих пространств, а именно: $x^1(k) \in$ Coker$B$, $z(k) \in$ Ker$B$, $z^1(k) \in$ KerB_1.

Покажем, что если B_1 – сюръективная матрица и $N < 2$, то система (1.1) (или (3.1)) неуправляема, т.е. не существует $u(k)$ такого, чтобы решение $x(k)$ системы (1.1) удовлетворяло условиям (1.2).

Действительно, если N=1, то из условия (3.8) следует $x^1(1)=QAa_0$, а из условия (3.9) следует $x^1(1)=Qb_0$, следовательно, $QAa_0= Qb_0$. Но для произвольных значений $a_0, b_0 \in R^n$ такое равенство невыполнимо, следовательно, система (1.1) в этом случае неуправляема.

В работе [7] доказано, что B_1 является сюръективной матрицей тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}(B\ AB) = n$. В примере 2 «базы-магазины» рассмотрен именно такой случай.

Случай 2. Матрица B_1 не является сюръективной, и предстоит решить уравнение (3.11)

$$x^1(k+1) = A_1 x^1(k) + B_1 y^1(k), \qquad k = \overline{1, N-1},$$

с условиями (3.8)

$$x^1(1) = QAa_0$$

и (3.9)

$$x^1(N) = Qb_0.$$

При этом B_1 действует из $\mathrm{Im}\,B \subset R^n$ в $\mathrm{Coker}B \subset R^n$.

Итерирование главного шага. Будем действовать по схеме, описанной в предыдущем разделе, т.е. применим к уравнению (3.11) свойство 2, а именно, заменим соотношение (3.11) эквивалентной системой. Теперь результат будет зависеть от того, является ли новая матрица B_2 сюръективной. И так далее.

Введем следующие обозначения:

$$A_0 = A,\ B_0 = B,\ Q_0 = Q,\ P_0 = P;$$
$$A_i = Q_{i-1} A_{i-1} Q_{i-1},\ B_i = Q_{i-1} A_{i-1} (I - Q_{i-1}),\ i = 2, 3, \ldots;$$

P_{i-1} и Q_{i-1} – проекторы на $\mathrm{Ker}B_{i-1}$ и $\mathrm{Coker}B_{i-1}$, отвечающие разложениям

$$\mathrm{Im}\,B_{i-2} = \mathrm{Coim}B_{i-1} + \mathrm{Ker}B_{i-1},$$

$$\mathrm{Coker}B_{i-2} = \mathrm{Im}\,B_{i-1} + \mathrm{Coker}B_{i-1}.$$

Далее

$$x^i(k) = Q_{i-1}x^{i-1}(k), \qquad y^i(k) = (I - Q_{i-1})x^{i-1}(k), \qquad (3.13)$$

т.е.

$$x^{i-1}(k) = x^i(k) + y^i(k) \qquad (3.14)$$

(верхний символ в $x^i(k)$ и $y^i(k)$ означает номер (не показатель степени)), и наконец, $r = \dim \mathrm{Coker}B$, $r_i = \dim \mathrm{Coker}B_i$.

На каждом шаге применения свойства 2, т.е. расщепления дискретного уравнения на управления в подпространствах, получаем уравнение

$$x^i(k+1) = A_i x^i(k) + B_i y^i(k),\ k = \overline{i, N-1}, \quad (3.15)$$

и условия

$$x^i(i) = \left(\prod_{j=0}^{i-1} Q_{i-j-1}A_{i-j-1}\right) a_0 \overset{des}{=} a_i,$$
$$x^i(N) = \left(\prod_{j=0}^{i-1} Q_{i-j-1}\right) b_0 \overset{des}{=} b_i \qquad (3.16)$$

(« $\overset{des}{=}$ » читается «обозначим»).

Данные формулы следуют из (3.8), (3.9), (3.13) и из соотношения

$$x^i(k+1) = Q_{i-1}A_{i-1}x^{i-1}(k). \qquad (3.17)$$

Из равенства (3.15) можно выразить $y^i(k)$:

$$y^i(k) = B_i^-(x^i(k+1) - A_i x^i(k)) + z^i(k), \quad (3.18)$$

с произвольным $z^i(k) \in \mathrm{Ker}B_i$. И по формуле (3.14), с помощью (3.18) получаем

$$x^{i-1}(k) = B_i^- x^i(k+1) + (Q_{i-1} - B_i^- A_i)x^i(k) + z^i(k),$$
$$k = \overline{i, N-1}. \qquad (3.19)$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Поскольку размерности r_i подпространств $\mathrm{Coker}B_i$ не увеличиваются с каждым шагом декомпозиции, то возможны два исхода

1) $r > r_1 > \ldots > r_{p-1} = r_p > 0;$
2) $r > r_1 > \ldots > r_{p-1} > r_p = 0.$

В первом случае $\mathrm{Im}B_p$=0, т.е. множество значений B_p состоит лишь из элемента 0, следовательно, $B_p = 0$. Тогда редуцированная система на p-м этапе расщепления имеет вид

$$x^p(k+1) = A_p x^p(k),\ k = \overline{p, N-1}.$$

Отсюда получаем

$$x^p(N) = A_p x^p(N-1) = (A_p)^2 x^p(N-2) = \ldots =$$
$$= (A_p)^{N-p} x^p(p),$$

и с помощью (3.16) имеем

$$x^p(p) = \left(\prod_{j=0}^{p-1} Q_{p-j-1}A_{p-j-1}\right) a_0 \overset{des}{=} a_p.$$

Тогда

$$x^p(N) = (A_p)^{N-p} x^p(p) = (A_p)^{N-p} a_p.$$

Однако из (3.16)

$$x^p(N) = \left(\prod_{j=0}^{p-1} Q_{p-j-1}\right) b_0 \overset{des}{=} b_p.$$

Последние два равенства могут иметь место, только если их правые части совпадают, что невозможно при произвольных $a_0, b_0 \in R^n$. Следовательно, система (1.1) в этом случае не является управляемой.

Во втором случае, т.е. в случае $r_p = 0$, матрица B_p является сюръективной, $\mathrm{Coker}B_p = \{0\}$.

Если при этом $p \ge N$, то система (1.1) также неуправляема, поскольку равенства (3.16) при $i = N$ приводят к условию

$$\left(\prod_{j=0}^{N-1} Q_{N-j-1} A_{N-j-1}\right) a_0 = \left(\prod_{j=0}^{N-1} Q_{N-j-1}\right) b_0,$$

которое может выполняться не при любых $a_0, b_0 \in R^n$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Система (1.1) полностью управляема в том и только в том случае, когда существует натуральное число p, p<N, такое, что B_p – сюръективная матрица.*

В силу эквивалентности всех выполненных преобразований для доказательства теоремы достаточно показать, что если B_p – сюръективная матрица и $p<N$, то существуют значения $u(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, при которых решение $x(k)$ системы (1.1) удовлетворяет условиям (1.2) с произвольными $a_0, b_0 \in R^n$.

Найдем $x(k)$, $k = \overline{1, N-1}$, и $u(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ следующим образом:

Из (3.15) и (3.16) при $i = p$ имеем на p-м шаге систему

$$x^p(k+1) = A_p x^p(k) + B_p y^p(k), \quad k = \overline{p, N-1}, \qquad (4.1)$$

и условия

$$x^p(p) = a_p, \; x^p(N) = b_p. \qquad (4.2)$$

Произвольно выбрав $x^p(k)$ и $z^p(k)$, $k = \overline{p+1, N-1}$, находим последовательно значения $x^{p-1}(k)$, $k = \overline{p, N-1}$, с помощью значений $x^p(p)=a_p$, $x^p(N)=b_p$ и формулы (3.19) при $i=p$. Эти найденные значения $x^{p-1}(k)$, $k = \overline{p, N-1}$ и значения $x^{p-1}(p-1)=a_{p-1}$, $x^{p-1}(N) = b_{p-1}$ (полученные из (3.16)) дают все значения $x^{p-1}(k)$, $k = \overline{p-1, N}$.

Затем по формуле (3.19) с $i = p - 1$ находим при произвольных $z^{p-1}(k) \in \mathrm{Ker}B_{p-1}$ значения $x^{p-2}(k)$, $k = \overline{p-1, N-1}$. Вместе с известными элементами $x^{p-2}(p-2)$, $x^{p-2}(N)$, полученными по формулам (3.16) с $i=p-2$, теперь имеем все значения $x^{p-2}(k)$, $k = \overline{p-2, N}$. И так далее.

По формуле (3.19) с $i=1$ находим $x^0(k)=x(k)$, $k = \overline{1, N-1}$, при произвольных $z^1(k) \in \mathrm{Ker}B_1$. Таким образом, все состояния $x(k)$ системы (1.1) определены.

Наконец, по формуле (3.4) с произвольным $z(k) \in \mathrm{Ker}B$ определяются значения $u(k)$, $k = \overline{0, N-1}$.

Пример 2. Рассмотрим модель, анализирующую прохождение однородных товаров в торговой системе «базы – магазины» одной фирмы. Динамика товаров в магазинах фирмы описывается системой

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdots\cdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \cdots\cdots \\ u_m(k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ \cdots\cdots \\ f_n(k) \end{pmatrix}.$$

Здесь:

a_{ij} – часть количества товаров, переходящих из i-го магазина в j-й магазин, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$;

b_{ij} – часть количества товаров, заказанных j-м магазином из i-й базы, $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$;

$x_i(k)$ – количество товаров в i-м магазине;

$u_i(k)$ – количество заказанных товаров (заказ) из i-й базы;

$f_i(k)$ – число реализованных (проданных) товаров (предположим, что оно известно при всех значениях k);

k – дискретное время в днях, $k = 0,1,2,..., N$.

В данной системе количества проданных единиц товара $f_i(k)$ выступают в роли возмущающего воздействия, заявка $u_i(k)$ на требуемое количество товара играет роль управляющего воздействия.

Требуется найти управление $u_i(k)$, которое приводит систему от начального момента процесса $k=0$ с исходными состояниями $x_i(0) = a_i^0$ к моменту $k=N$ окончания процесса управления с желаемыми конечными состояниями $x_i(N) = b_i^0$.

Данная задача управления решается с использованием метода, приведенного выше.

Рассмотрим следующий частный случай указанной задачи, в котором динамика прохождения товаров в трех магазинах одной фирмы (рисунок) описывается системой

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \dfrac{1}{2} x_2(k) + \dfrac{1}{2} u_1(k) - f_1(k), \\ x_2(k+1) = \dfrac{1}{2} x_2(k) + u_2(k) - f_2(k), \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \dfrac{1}{2} u_1(k) - f_3(k), \end{cases} \qquad (4.3)$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_1(k) \\ -f_2(k) \\ -f_3(k) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где $k = \overline{0, N-1}$.

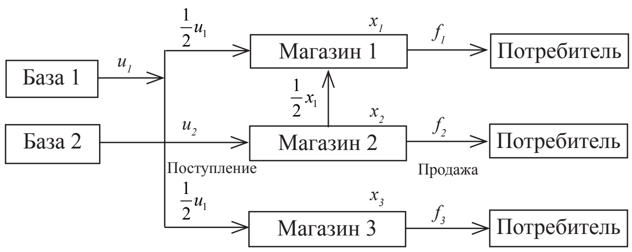

Рисунок. Система «базы – магазины» с двумя базами и тремя магазинами

Пусть выполняются крайние условия

$$\begin{aligned} &x_1(0) = a_1^0,\ x_2(0) = a_2^0,\ x_3(0) = a_3^0, \\ &x_1(N) = b_1^0,\ x_2(N) = b_2^0,\ x_3(N) = b_3^0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Система (4.3) (или (4.4)) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} u_1(k) = 2x_3(k+1) - 2x_3(k) + 2f_3(k), \\ u_2(k) = x_2(k+1) - \dfrac{1}{2}x_2(k) + f_2(k), \\ 2x_1(k+1) - 2x_3(k+1) = 2x_1(k) - 2x_3(k) + x_2(k) - \\ -2f_1(k) + 2f_3(k). \end{cases} \quad (4.6)$$

Здесь первые два соотношения соответствуют формуле (3.4), а последнее уравнение – условие разрешимости системы (4.3) относительно $u_1(k)$, $u_2(k)$, оно соответствует уравнению (3.3).

Обозначим

$$x^1(k+1) = 2x_1(k+1) - 2x_3(k+1),$$

$$x^1(k) = 2x_1(k) - 2x_3(k),$$

$$y^1(k) = x_2(k), \qquad f^1(k) = -2f_1(k) + 2f_3(k).$$

С такими обозначениями последнее уравнение системы (4.6) с условиями (4.5) сводится к уравнению

$$x^1(k+1) = x^1(k) + y^1(k) + f^1(k) \quad (4.7)$$

с условиями

$$\begin{aligned} &x^1(1) = 2x_1(1) - 2x_3(1) = 2x_1(0) - 2x_3(0) + x_2(0) - \\ &-2f_1(0) + 2f_3(0) = 2a_1^0 - 2a_3^0 + a_2^0 - 2f_1(0) + \\ &+2f_3(0) \overset{def}{=} a^1, \\ &x^1(N) = 2x_1(N) - 2x_3(N) = 2b_1^0 - 2b_3^0 \overset{def}{=} b^1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Значения $f^1(k)$ известны в связи с тем, что $f_i(k)$ ($i = \overline{1,3}$, $k = \overline{0, N-1}$) известны.

Уравнение (4.7) – это уравнение (3.11). Напомним, что в начале статьи говорилось о том, что при решении практических задач построения проекторов не требуется, достаточно решения простых алгебраических уравнений.

Перейдем к нахождению $x_i(k)$, $k = \overline{1, N-1}$, $i = \overline{1,3}$, и $u(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, $i = \overline{1,2}$.

В качестве $x^1(k)$, $k = \overline{2, N-1}$ можем взять любые (возможные для первого и третьего магазинов, поскольку $x^1(k) = 2x_1(k) - 2x_3(k)$) значения, обозначим их c_k

$$x^1(k) = c_k. \quad (4.9)$$

Из соотношения (4.7), зная $x^1(N) = b^1$ (формула (4.8)) и $x^1(N–1) = c_{N-1}$, находим

$$\begin{aligned} &y^1(N-1) = b^1 - c_{N-1} - f^1(N) \\ &y^1(N-2) = c_{N-1} - c_{N-2} - f^1(N-1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y^1(2) = c_3 - c_2 - f^1(3). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Используя значения $x^1(1) = a^1$ и $x^1(2) = c_2$, из (4.7) получаем

$$y^1(1) = c_2 - a^1 - f^1(2). \quad (4.11)$$

Однако

$$y^1(k) = x_2(k), \quad (4.12)$$

следовательно, известны все значения $x_2(k)$, $k = \overline{1, N-1}$.

Можно также взять произвольные (приемлемые для третьего магазина) значения $x_3(k)$, $k = \overline{1, N-1}$. Пусть

$$x_3(k) = d_k,\ \overline{k = 1, N-1}.$$

Тогда

$$x_1(k) = \frac{1}{2}c_k + d_k,\ k = \overline{2, N-1}, \quad (4.13)$$

что следует из (4.9), из того, что $x^1(k) = 2x_1(k) - 2x_3(k)$, и

$$x_1(1) = \frac{1}{2}a^1 + d_1. \quad (4.14)$$

Итак, по формулам (4.10) – (4.12) определяются все $x_2(k)$ с произвольными значениями c_k; $x_3(\mathrm{k})$ – произвольны, и $x_1(k)$ находятся по формулам (4.13), (4.14).

Тот же результат получается, если при решении использовать проекторы. В этой задаче

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad B_1=QA\left(I-Q\right)=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

B_1 как оператор, действующий из ImB в Coker$B$, т.е. из R^2 в R^1, имеет вид $B_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$, поэтому B_1 – сюръекция и $\operatorname{Ker}B_1=\begin{pmatrix}0\\ x_3\end{pmatrix}$. В силу этого $x_3(k)$ – произвольные элементы при $k=\overline{1,N-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цыпкин Я. З.* Теория импульсных систем / Я. З. Цыпкин. – М. : Физматгиз, 1958. – 724 с.

2. *Робертс Ф. С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Ф. С. Робертс. – М. : Наука, 1986. – 496 с.

3. *Сазанова Л. А.* Синтез оптимального управления в линейных дискретных системах / Л. А. Сазанова // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2000. – Т. 6. – № 2. – С. 477–496.

4. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления / Р. Е. Калман // Труды I международного конгресса международной федерации по автоматическому управлению. – М., 1960. – С. 521–545.

5. *Зубова С. П.* О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления / С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, Ле Хай Чунг // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 11. – С. 41–47.

6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1954 . – 491 с.

7. *Раецкая Е. В.* Условная управляемость и наблюдаемость линейных систем : дис. … канд. физ.-мат. наук / Е. В. Раецкая. – Воронеж, 2004.

Воронежский государственный университет

Зубова С. П., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа

E-mail: spzubova@mail.ru

Тел.: 20-86-90, 66-60-76, 8-951-851-36-30

Чан Тхань Туан, аспирант кафедры математического анализа

E-mail: tuanbg2007@mail.ru

Тел.: 8-952-546-33-08

Voronezh State University

Zubova S. P., Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis Department

E-mail: spzubova@mail.ru

Tel.: 20-86-90, 66-60-76, 8-951-851-36-30

Chan Thanh Tuan, Post-graduate Student of the Mathematical Analysis Department

E-mail: tuanbg2007@mail.ru

Tel.: 8-952-546-33-08