Вестник Воронежского государственного университета
Серия: Экономика и управление

Управление в организационно-экономических системах

Научная статья
УДК 004.021:004.023
DOI: https://doi.org/10.17308/econ.2026.2/13818
JEL: A22; C44

Оптимизация учебного расписания университета на основе MILP-модели и метода штрафных функций

А. Ф. Рогачев[1]✉, Д. С. Захаров[2]

[1] Волгоградский государственный аграрный университет, Университетский пр., 26, 400002, Волгоград, Российская Федерация

[2] Волгоградский государственный технический университет, пр. Ленина, 28, 400005, Волгоград, Российская Федерация

Предмет. Рассматривается задача составления учебного расписания в университете как объект системного анализа и оптимизации, включая ресурсы, участников, жесткие и мягкие ограничения и критерии качества.
Цели. Сформулировать полную MILP-модель составления расписания с линейным учетом «окон» и сравнить вычислительные и методологические свойства подходов.
Методология. Система «расписание» описывается следующими компонентами: (а) входные данные – перечень занятий, преподавателей, групп, аудиторий и временных слотов; (б) правила/ограничения – жесткие (hard) и мягкие (soft); (в) выход – назначение занятий (по аудиториям, времени); (г) критерии качества – агрегированная целевая функция; (д) управляемые параметры – веса штрафов и цены ресурсов. Постановка задачи реализована в виде MILP-модели и ее эквивалента методом штрафных функций.
Результаты. Рассмотрена модель расписания, включающая множества и численные параметры курсов, кабинетов, временных слотов, а также цены ресурсов. Предусмотрены штрафы по времени, конфликтам преподавателей и наличию «окон».
Выводы. Представленная MILP-постановка задачи составления университетского расписания, включающая цену ресурса и линейный учет «окон». Показано, как методом штрафных функций ограничения могут быть перенесены в целевую функцию, а параметр ρ управляет строгостью соблюдения ограничений. Сравнение подходов показывает, что MILP-модель дает структурную прозрачность и обеспечивает доказательную оптимальность, а штрафы удобны для эвристик и гибкого учета мягких требований. Для реальных размерностей прикладных задач метаэвристики часто оказываются лучшим компромиссом.

Ключевые слова: системный анализ, окна, теневая цена ресурса.

Для цитирования: Рогачев, А. Ф., & Захаров, Д. С. (2026). Оптимизация учебного расписания университета на основе MILP-модели и метода штрафных функций. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Экономика и управление*, (2), 110–119. DOI: https://doi.org/10.17308/econ.2026.2/13818

© Рогачев А. Ф., Захаров Д. С., 2026
Материал доступен на условиях лицензии CC BY 4.0

Proceedings of Voronezh State University
Series: Economics and Management

Management in Organizational and Economic Systems

Original article
UDC 004.021:004.023
DOI: https://doi.org/10.17308/econ.2026.2/13818
JEL: A22; C44

Optimization of University Course Timetabling Using a MILP Model and the Penalty Function Method

A. F. Rogachev[1]✉, D. S. Zakharov[2]

[1] Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskiy Ave., 400002, Volgograd, Russian Federation

[2] Volgograd State Technical University, 28 Lenina Ave., 400005, Volgograd, Russian Federation

Subject. The problem of university course timetabling is considered as an object of system analysis and optimization, including resources, participants, hard and soft constraints, and quality criteria.
Purpose. To formulate a complete MILP model for timetabling with linear accounting of gaps and to compare the computational and methodological properties of the two approaches.
Methodology. We describe the timetabling system using the following components: (a) input data – a list of classes, instructors, student groups, rooms, and time slots; (b) rules/constraints – hard and soft; (c) output – assignment of classes to (room, time); (d) quality criteria – an aggregated objective function; (e) controllable parameters – penalty weights and resource prices. We implemented the problem formulation as a MILP model and its equivalent using the penalty function method.
Results. We considered a timetabling model is that includes sets and numerical parameters for courses, classrooms, time slots, as well as resource prices. Penalties are provided for time conflicts, instructor conflicts, and the presence of gaps in the schedule.
Conclusions. The presented MILP formulation of the university timetabling problem includes resource prices and linear accounting of gaps. It is shown how, using the penalty function method, constraints can be moved into the objective function, with the parameter ρ controlling the strictness of constraint satisfaction. A comparison of the two approaches shows that the MILP model provides structural transparency and provable optimality, while penalty functions are convenient for heuristics and flexible handling of soft constraints. For real-world problem sizes, matheuristics often offer the best compromise.

Key words: system analysis, gaps, shadow price of resources.

For citation: Rogachev, A. F., & Zakharov, D. S. (2026). Optimization of University Course Timetabling Using a MILP Model and the Penalty Function Method. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Economics and Management*, (2), 110–119. DOI: https://doi.org/10.17308/econ.2026.2/13818

© 2026 by the authors.
This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Введение

Автоматизация составления учебных расписаний относится к классу NP-трудных комбинаторных задач и является устойчивой прикладной проблемой операционного исследования и системного анализа. Университетское расписание одновременно затрагивает распределение ограниченных ресурсов (аудитории, временные слоты, специализированное оборудование) и согласование интересов участников (студенты, преподаватели, администрация). Поэтому модель должна быть многоаспектной: учитывать жесткие ограничения (невозможность совмещений, вместимость) и мягкие предпочтения (минимизация «окон», равномерность нагрузки, предпочтительные времена занятий).

Современный обзор методов для задачи University Course Timetabling Problem (UCTTP) показывает доминирование метаэвристик и гибридных подходов при сохранении высокого интереса к точным и метаэвристическим методам на основе MILP.

Отдельное направление исследований в UCTTP составляют эволюционные методы, прежде всего генетические алгоритмы (далее – GA). В типовой GA-постановке расписание кодируется хромосомой (например, «занятие → (слот, аудитория)»), а качество оценивается фитнес-функцией. Последняя суммирует штрафы за нарушения каждого из жестких ограничений и/или за неудовлетворение мягких предпочтений. Критически важными оказываются (а) представление решения, (б) специализированные операторы кроссовера/мутации и (в) процедуры итерационного повторения, которые возвращают потомков в область допустимых решений или снижают штрафы.

В системном анализе рассматриваемой проблемы важна интерпретация модели в терминах «ресурсы – цели – ограничения»: например, аудитории и временные слоты выступают ресурсами, а их «цена» μ может быть интерпретирована как стоимость использования (в бюджетной трактовке) или как теневая цена дефицита (в лагранжевой трактовке). Метод штрафных функций удобен тем, что переводит ограничения в управляемые штрафы в целевой функции, что облегчает интеграцию с эвристическими методами и позволяет плавно балансировать требования качества расписания.

Цели исследования: сформулировать полную MILP-модель составления расписания с линейным учетом «окон»; показать, как те же ограничения могут быть включены в целевую функцию методом штрафных функций (с параметром μ как ценой ресурса); и сравнить вычислительные и методологические свойства подходов на иллюстративном примере по критериям системного анализа.

Структура статьи раскрывает общую методологию исследования, включая рассматриваемую модель расписания вуза в качестве объекта системного анализа и компактную постановку задачи ее оптимизации в виде смешанной целочисленной линейной модели (MILP) и ее штрафного эквивалента.

Описание модели включает нотации, параметры и переменные. Сначала рассмотрена MILP-постановка, включая линейный учет «окон» методом пошаговой линеаризации. Затем для той же постановки приведен метод штрафных функций. Далее приведены результаты, иллюстрирующие оба подхода к оптимизации, полученные на числовом примере с тремя учебными курсами. Сравнение исследованных подходов для практики приведено по критериям оптимальности, масштабируемости, моделируемости мягких ограничений, настройки параметров и интерпретации цены ресурсов.

Обсуждение результатов, полученных на модельном примере, демонстрирует, что учет мягких критериев удобно реализуется как линейные добавки в целевую функцию, тогда как жесткие ограничения обеспечивают выполнимость, а метаэвристики могут оказываться лучшим компромиссом для реальных размеров задачи. Эти идеи сформулированы в выводах статьи.

Обзор предшествующих работ

Проблема составления и оптимизации вузовских расписаний представляет собой особый подкласс теории расписаний, отличающийся высокой размерностью, что особенно характерно для многоуровневых университетов. Поставленная задача и основные математические подходы к ее решению рассматриваются в ряде публикаций российских и зарубежных авторов. В частности, подробно анализируются тренды, наборы ограничений и направления исследований в обзорной

работе Chen et al. (2021), а также в обзорной статье Ceschia et al. (2023) по планированию образовательных расписаний (Timetabling) с акцентом на стандартизованные постановки и бенчмарки. Практическую значимость сложных реальных постановок демонстрируют материалы International Timetabling Competition 2019 (ITC 2019) и последующие публикации о применяемых реальных данных и решателях (Müller et al., 2025; Rappos et al., 2022).

Эффективным инструментарием решения рассматриваемой проблемы оптимизации образовательных расписаний является использование эволюционно-генетических алгоритмов и их различных модификаций (Rogachev & Zakharov, 2025; Rogachev & Rogachev, 2025; Захаров & Рогачев, 2025; Rogachev et al., 2023; Caramia & Giordani, 2020; Bertsekas, 1997).

В работе Rogachev & Zakharov (2025) подробно рассматривается онтологический подход к построению учебного расписания применительно именно к многоуровневому университету, а в статье Rogachev & Rogachev (2025) – прикладные вопросы структурно-параметрического синтеза GA. Результаты использования модифицированных GA для оптимизированного синтеза учебных расписаний с учетом различных наборов индивидуальных предпочтений студентов и преподавателей приведены в статьях Д. С. Захарова, А. Ф. Рогачева (2025) и Rogachev et al. (2023).

Современные прикладные разработки на данных университетов часто используют «усиленные» GA-операторы – например, эвристическую мутацию, нацеленную на исправление именно невыполнимых генов, что улучшает баланс исследования и эксплуатации, а также снижает число используемых аудиторий (Romaguera et al., 2024). Дополнительно наблюдается тренд к многокритериальной оптимизации, где GA применяются как естественный каркас для поиска компромиссных Парето-оптимальных решений (Pareto-фронт) (Tung Ngo et al., 2021). В задачах, учитывающих психолого-физиологические предпочтениями обучаемых студентов университетов, эволюционные GA также демонстрируют гибкость за счет настраиваемых функций штрафов и итерационных генетических процедур (Mahlous & Mahlous, 2023).

Важный вывод из сравнительных работ по метаэвристикам состоит в том, что ни один класс методов не доминирует по всем типам решений: результат существенно зависит от структуры данных и набора ограничений, а предсказать «лучший» метод априори сложно (Rossi-Doria et al., 2002). Это оправдывает выбор системного подхода, в котором MILP используется для строгой формулировки и анализа, а штрафная функция – как универсальный «оценщик качества» для гибридных и эвристических алгоритмов.

Так, в работе Jat & Yang (2009) предложен управляемый поисковый (guided search) GA, где память о хороших назначениях направляет порождение потомков, а локальный поиск улучшает решения (меметический компонент). В прикладном кейсе составления расписаний лабораторных занятий Bratković et al. (2009) показывают эффективность гибридизации GA и локального поиска в реальной среде. В рамках ведущейся в настоящее время дискуссии о предпочтительности эволюционных подходов встречаются и гибриды GA с другими методами, например, Arias-Osorio & Mora-Esquivel (2020) используют гибридный подход на базе GA для реального университета.

Следовательно, остаются научно-методологические вопросы выбора методов оптимизации учебного расписания вузов, включая гибридные, уровень проработки которых, на наш взгляд, недостаточен и которые могут быть частично закрыты настоящей статьей.

Методология исследования

Модель расписания как объект системного анализа и оптимизации

Система «расписание» может описываться следующими компонентами: (а) входные данные – перечень занятий, преподавателей, групп, аудиторий и временных слотов; (б) правила/ограничения – жесткие (hard) и мягкие (soft); (в) выход – назначение занятий (по аудиториям, временным слотам); (г) критерии качества – агрегированная целевая функция; (д) управляемые параметры – веса штрафов и цены ресурсов μ.

Далее представлена компактная постановка оптимизационной задачи в виде MILP-модели и ее эквивалент с использованием штрафной функции.

Нотация, параметры и переменные

Пусть бинарная переменная $x_{c,r,t} = 1$, если курс c проводится в аудитории r во время t, иначе она равна 0.

Ограничения (обычно жесткие):

– один курс – один слот;

– в аудитории не более одного занятия в слот;

– преподаватель не может вести два занятия одновременно.

Модель использует следующие множества, порождающие соответствующие индексы переменных: C – курсы/занятия (индекс c), R – аудитории (индекс r), T – временные слоты (индекс t), G – группы студентов/потоки (индекс g), P – пары конфликтующих занятий (например, общий преподаватель или общий набор студентов).

Численными параметрами модели оптимизации расписания являются:

• cap_r – вместимость аудитории r;

• dem_c – численность студентов занятия курса c;

• $\mu_{\{r\}}$ – цена использования специализированной аудитории r (ресурсная стоимость);

• $\pi_{\{c,t\}}$ – штраф за назначения занятия c в слот t (например, нежелательное время назначения);

• α – вес штрафа за наличие «окон» в расписании.

В модели использованы следующие бинарные переменные:

• $x_{\{c,r,t\}} \in \{0,1\}$ –> 1, если занятие c назначено в аудиторию r в слот t;

• $y_{\{g,t\}} \in \{0,1\}$ –> 1, если у группы g есть занятие в слот t;

• $w_{\{g,t\}} \in \{0,1\}$ – индикатор наличия «окна» у группы g.

MILP-постановка оптимизационной задачи

Минимизируемая целевая функция, представляющая собой сочетание (качество + цена ресурса):

$$\min f(x,w) = \sum_{\{c\in C\}} \sum_{\{r\in R\}} \sum_{\{t\in T\}} \left(\mu_r + \pi_{\{c,t\}}\right) x_{\{c,r,t\}} + \\ + \alpha \sum_{\{g\in G\}} \sum_{\{t\in T\}} w_{\{g,t\}}. \quad (1)$$

Ограничениями, учитываемыми при отыскании оптимального расписания, являются:

1) назначение каждого занятия должно быть ровно один раз:

$$\sum_{\{r\in R\}} \sum_{\{t\in T\}} x_{\{c,r,t\}} = 1,\ \forall c \in C; \quad (2)$$

2) в аудитории не более одного занятия в один слот:

$$\sum_{\{c\in C\}} x_{\{c,r,t\}} \le 1,\ \forall r \in R,\ \forall t \in T; \quad (3)$$

3) вместимость аудитории должна быть не меньше размера группы (жесткое ограничение):

$$\sum_{\{t\in T\}} x_{\{c,r,t\}} dem_c \le cap_r,\ \forall c \in C,\ \forall r \in R; \quad (4)$$

4) отсутствие конфликтов (например, общий преподаватель/студенты) или запрет параллелей:

$$\sum_{\{r\in R\}} x_{\{c_1,r,t\}} + \sum_{\{r\in R\}} x_{\{c_2,r,t\}} \le 1,\ \forall (c_1,c_2) \in P, \\ \forall t \in T; \quad (5)$$

5) связь переменных y и x (имеется, когда группа присутствует в слоте, если назначено хотя бы одно ее занятие):

$$y_{\{g,t\}} = \sum_{\{c\in Cg\}} \sum_{\{r\in R\}} x_{\{c,r,t\}},\ \forall g \in G,\ \forall t \in T. \quad (6)$$

Полностью линейный учет «окон» (пошаговая линеаризация)

Для наглядности показана линеаризация «окна» длины 3 слота (t, t + 1, t + 2). Такое окно возникает, когда у группы есть занятия в t и (t + 2), но нет в (t + 1). Логическое условие:

$$w_{\{g,t\}} = 1 \Leftrightarrow y_{\{g,t\}} = 1,\ y_{\{g,t+1\}} = 0,\ y_{\{g,t+2\}} = 1. \quad (7)$$

Линеаризация через систему неравенств:

$$w_{\{g,t\}} \ge y_{\{g,t\}} + y_{\{g,t+2\}} - 1, \quad (8)$$

$$w_{\{g,t\}} \le y_{\{g,t\}}, \quad (9)$$

$$w_{\{g,t\}} \le y_{\{g,t+2\}}, \quad (10)$$

$$w_{\{g,t\}} \le 1 - y_{\{g,t+1\}}. \quad (11)$$

Эта система полностью линейна и корректно связывает индикатор w наличия «окна» с комбинацией бинарных переменных y. При большем горизонте T окна могут задаваться несколькими шаблонами (например, «пустой слот между занятиями», «двойное окно» и т. п.), с соответствующим расширением набора переменных w и линейных ограничений (8)–(11).

Для решения задачи в линейной постановке в исследовании могут использоваться известные пакеты прикладных программ (например, имеющийся в MS Excel).

Метод штрафных функций для той же постановки

Пусть исходная задача имеет вид: минимизировать $f(x)$ при ограничениях $g_{i(x)} \le 0$ и $h_{j(x)} = 0$. Применим метод внешних штрафов (SUMT), который строит задачу безусловной оптимизации:

$$\min \Phi(x;\rho) = \\ = f(x) + \rho \sum_i \max\left(0, g_{i(x)}\right)^2 + \rho \sum_j h_{j(x)}{}^2. \quad (12)$$

Для бинарных расписаний удобно использовать «расчетные» штрафы: количество конфликтов аудиторий, пересечений преподавателя, переполнений и т. д. Тогда Ф становится суммой базовой стоимости и взвешенных штрафов нарушений, а ρ играет роль «жесткости» соблюдения ограничений.

Параметр μ (стоимость занятия аудитории) в данной статье интерпретируется как цена ресурса и входит в *f*(x) линейно. В лагранжевой трактовке величины, аналогичные μ, могут появляться как множители при ресурсных ограничениях (так называемые «теневые цены»), что помогает анализировать дефицитность аудиторий и «дороговизну» прайм-тайм-слотов (Müller et al., 2025; Rappos et al., 2022).

Результаты

Рассмотренные научно-методические подходы проиллюстрированы на анализе построения и оптимизации расписания модельного университета (три курса, две аудитории).

Иллюстративный числовой пример на основе MILP-оптимизации

Рассмотрим модельный фрагмент расписания:

$$C=\{A,B,C\},\ R=\{R_1,R_2\},\ T=\{1,2,3\}. \quad (13)$$

Вместимости учебных аудиторий: $cap(R_1)=30$, $cap(R_2)=50$.

Численности учебных групп: $dem(A)=45$, $dem(B)=25>$, $dem(C)=30$.

Цены ресурсов: $\mu_{\{R_1\}}=1$, $\mu_{\{R_2\}}=2$.

Штрафы по времени: $\pi_{\{c,2\}}=0, \pi_{\{c,1\}}=\pi_{\{c,3\}}=1$.

Штраф окна: $\alpha=5$.

Группы: G_1 посещает $\{A,B\}$, G_2 посещает $\{B,C\}$.

Конфликт преподавателей: *A* и *B* не должны идти параллельно.

Тогда в рассматриваемом примере целевая функция принимает вид:

$$f(x,w)= \\ =\sum_{\{c\}}\mu_{\{r(c)\}}+\sum_{\{c\}}\pi_{\{c,t(c)\}}+5\left(w_{\{G_1,1\}}+w_{\{G_2,1\}}\right). \quad (14)$$

Пример двух расписаний и расчет *f*(*x*) приведены в табл. 1.

Из данных табл. 1 видно, что «окно» (A в слоте 1 и B в слоте 3 при пустом слоте 2) увеличивает значение цели на 5 единиц, что обусловлено выбранным весом α.

Иллюстративный числовой пример с использованием метода штрафной функции

Рассмотрим тот же пример, используя безусловную постановку $\Phi(x;\rho)$, где нарушения жестких ограничений учитываются штрафом. Для примера штрафуем: (а) конфликт аудиторий (две пары занятий в одном (r,t), (б) конфликт преподавателя (*A* и *B* в одном слоте), (в) переполнение вместимости (если положительно (*dem* – *cap*)):

$$\Phi(x;\rho)=f(x)+\rho V_{room(x)}+\rho V_{teach(x)}+\rho V_{cap(x)}, \quad (15)$$

где *V* – суммарное значение штрафов за соответствующие конфликты.

Влияние выбора численного значения ρ на величину оптимума $\Phi(x;\rho)$, полученное методом полного перебора для модельного примера, представлено в табл. 2.

Таблица 1

Расчет параметров двух расписаний и целевой функции f(x)

Вариант	Назначение (*A*, *B*, *C*)	Σμ	Σπ	Σ*w*	*f*(*x*)
MILP-оптимум	A→R2@2; B→R1@1; C→R1@2	4	1	0	5
С «окном» у G_1	A→R2@1; B→R1@3; C→R1@2	4	2	1	11

Таблица 2

Влияние выбора параметра ρ на значение целевой функции

ρ	Назначение (A, B, C)	Ф(*x*;ρ)	*f*(*x*)	Конфликт аудиторий	Конфликт преподавателей	Переполнение вместимости аудиторий
0	A→R1@2; B→R1@2; C→R1@2	3	3	2	1	15
0.1	A→R2@2; B→R1@2; C→R1@2	4.2	4	1	1	0
1	A→R2@2; B→R1@1; C→R1@2	5	5	0	0	0
5	A→R2@2; B→R1@1; C→R1@2	5	5	0	0	0
20	A→R2@2; B→R1@1; C→R1@2	5	5	0	0	0

При малых ρ оптимизатор может предпочесть дешевую по μ и π конфигурацию даже с нарушениями. Начиная примерно с ρ ≈ 1 в данном примере оптимум Φ совпадает с допустимым MILP-оптимумом (нарушения равны нулю). Это иллюстрирует важную практическую роль ρ, настройка которого обеспечивает достижение компромисса между «стоимостью» и «выполнимостью» (рисунок).

Представленная матрица (рисунок, *а*) включает агрегации $C = Bx$, индикаторы w наличия «окон», ограничения $G_1,\ldots,G_5$, временные слоты $T_1,\ldots,T_3$ и характеризует логические связи между ними.

Сравнение оптимизационных подходов для прикладных задач оптимизации расписания

Сравним три рассмотренных выше подхода с точки зрения системного анализа и внедрения в университете: (а) точная MILP-модель, (б) штрафная функция + эвристика/метаэвристика, (с) метаэвристика (MILP внутри локального поиска), параметры которых приведены в табл. 3.

Реальные постановки (например, ITC 2019) содержат множество типов ограничений и больших размеров, поэтому часто применяются гибридные схемы (Müller et al., 2025; Rappos et al., 2022; Mikkelsen & Holm, 2022).

а *б*

Рисунок. Блочно-матричная структура расписания для оптимизации при трех временных слотах: *а* – блочная матрица ограничений; *б* – логика распределения временных слотов

Таблица 3

Сравнение рассмотренных подходов к оптимизации с точки зрения системного анализа

Критерий	MILP (точная)	Штрафы + эвристика	Метаэвристика
Гарантия оптимальности	Возможна (при решаемости)	Нет (эвристическая)	Обычно нет, но есть сильные нижние/верхние оценки
Масштабируемость	Ограничена размером; требует редукций	Высокая (быстрые итерации)	Средняя/высокая (комбинирует силу MILP и поиск)
Моделирование мягких ограничений	Естественно через веса в цели	Естественно через штрафы	Естественно, но требует аккуратной декомпозиции
Настройка параметров	В основном веса в цели	ρ и веса штрафов критичны	Комбинация: веса + параметры локального поиска
Интерпретация μ (цена ресурса)	Прямая (в цели) + тени по релаксациям	Прямая (в цели), тени менее прозрачны	Сохраняется интерпретация через подзадачи

Обсуждение результатов

Рассмотренный пример демонстрирует ключевую практическую идею: учет мягких критериев (окон, предпочтительных слотов) удобно реализуется как линейные добавки в целевую функцию, тогда как жесткие – обеспечивают выполнимость ограничения. Если же политика составления расписаний университета допускает контролируемые нарушения (например, временная перегрузка аудиторий, исключения по преподавателям), то подход на основе штрафной функции обеспечивает гибкость и позволяет получать «лучшие из допустимых» компромиссы с возможностью явного управления параметрами ρ и весами.

Системная интерпретация параметра μ как цены ресурса полезна для управления вариантами и характеристиками решений. Увеличение значения μ для дефицитных аудиторий/слотов автоматически смещает решение к более экономному использованию или к переносу занятий из прайм-тайма, что соответствует бюджетно-ресурсной логике. В то же время при использовании лагранжевых подходов к ресурсным ограничениям множители Λ дают оценку теневой цены дефицита ресурсов, что помогает аргументировать, например, необходимость открытия дополнительных аудиторий или изменения учебных планов.

С точки зрения вычислительной практики генетические алгоритмы хорошо сочетаются с методами штрафных функций: наиболее распространенная форма фитнес-функции в GA для оптимизации расписаний – это сумма базовой стоимости и штрафов за нарушения ограничений (аналогично $\Phi(x;\rho)$ в настоящей работе). Это позволяет единым образом учитывать, как строгие (через большие штрафы), так и мягкие требования (через умеренные веса), не усложняя представление решения. В системной интерпретации μ продолжает играть роль цены ресурса. Включение μ в фитнес-функции автоматически «сдвигает» популяцию к более экономному использованию дефицитных аудиторий/слотов; а параметр ρ можно трактовать как управляемый регулятор допустимости компромиссов по нарушениям.

Практически полезной является гибридная схема «GA $\rightarrow$ MILP-доработка» (matheuristic), при этом GA быстро генерирует разнообразные квазидопустимые решения и хорошие стартовые точки. После этого MILP-оптимизатор выполняет локальную «шлифовку» (например, устраняет остаточные конфликты, сокращает окна или перераспределяет ресурсы) в ограниченной окрестности полученного решения. Такой подход соответствует рекомендациям о том, что гибридизация часто повышает устойчивость качества на разных вариантах (Rossi-Doria et al., 2002; Bratković et al., 2009; Arias-Osorio & Mora-Esquivel, 2020; Mahlous & Mahlous, 2023; Romaguera et al., 2024).

Ограничения GA-подходов связаны с необходимостью настройки параметров (размер популяции, вероятности операторов, масштабы штрафов), а также с отсутствием гарантии глобальной оптимальности. Поэтому для задач, где важны доказуемые оценки качества (например, аудит соответствия политике вуза), целесообразно сохранять MILP-формулировку как «эталонную» и использовать штрафные/эволюционные методы как ускорители поиска и генераторы качественных кандидатов.

Для реальных задач масштаба ITC 2019 и подобных промышленно значимых постановок практика показывает эффективность гибридных методов: либо метаэвристик, либо метаэвристик со взвешенными штрафами, где штрафная функция служит единым «оценщиком качества» решения (Müller et al., 2025; Rappos et al., 2022; Mikkelsen & Holm, 2022).

Таким образом, на основе системного сравнения рассмотренных подходов к анализу качества построенных вариантов учебного расписания обоснован выбор методов его оптимизации на разных фазах построения – от полной оптимизации до оперативного внесения корректировок. Отметим, что исследованные подходы могут представлять интерес и для многоуровневых университетов, объединяющих непрерывную подготовку в рамках одного учебного заведения по уровням «профессионалитет/СПО – бакалавриат – магистратура – аспирантура».

Заключение

По результатам проведенного исследования сформированы следующие основные выводы.

1. Представлена MILP-постановка задачи составления и оптимизации университетского расписания, включающая цену ресурса μ и полностью линеаризованный учет «окон» между учебными занятиями.

2. Показано, как ограничения задачи условной оптимизации могут быть перенесены

в целевую функцию методом штрафных функций, при этом параметр ρ управляет строгостью соблюдения ограничений.

3. На модельном числовом примере, включающем три учебных курса, продемонстрирована возможность точного совпадения решения, получаемого методом штрафной функции, и постановки с MILP-оптимумом при достаточно больших ρ.

4. Сравнение рассмотренных подходов к оптимизации учебного расписания показывает, что MILP-метод дает структурную прозрачность и потенциал доказательной оптимальности, а штрафные функции удобны для эвристик и гибкого учета мягких требований. Матэвристики могут оказываться лучшим компромиссом для прикладных задач высокой размерности, характерных для учебных расписаний многоуровневых университетов.

При продолжении исследований планируется расширение модели на многонедельные шаблоны, учет перемещений между корпусами, а также обоснование настройки параметров μ и весов штрафов на основе ретроспективных данных (истории расписаний и опросов удовлетворенности).

Авторский вклад

Авторы внесли равный вклад в работу, представленную в статье.

Contribution of the authors

The authors contributed equally to this article.

Конфликт интересов

Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Conflict of Interest

The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Библиографический список

1. Захаров, Д. С., & Рогачев, А. Ф. (2025). Статистический анализ функционирования модифицированных генетических алгоритмов для автоматизированного составления расписания многоуровневого вуза. *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования*, *26*(3), 288–297. [Zakharov, D. S., & Rogachev, A. F. (2025). Statistical Analysis of the Performance of Modified Genetic Algorithms for Automated Compilation of a Multilevel University Scheduling. *RUDN Journal of Engineering Research*, *26*(3), 288–297. (In Russian).] DOI: 10.22363/2312-8143-2025-26-3-288-297

2. Arias-Osorio, J., & Mora-Esquivel, A. (2020). A solution to the university course timetabling problem using a hybrid method based on genetic algorithms. *DYNA-Colombia*, *87*(215), 47–56. DOI:10.15446/dyna.v87n215.85933

3. Babaei, H., Karimpour, J., & Hadidi, A. (2015). A survey of approaches for university course timetabling problem. *Computers & Industrial Engineering*, *86*, 43–59. DOI: 10.1016/j.cie.2014.11.010

4. Bertsekas, D. P. (1997). Nonlinear programming. *Journal of the Operational Research Society*, *48*(3), 334–334.

5. Bratković, Z., Herman, T., Omrčen, V., Čupić, M., & Jakobović, D. (2009). University Course Timetabling with Genetic Algorithm: A Laboratory Excercises Case Study. In: Cotta, C., & Cowling, P. (eds). *Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization. EvoCOP. Lecture Notes in Computer Science, 5482,* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 240–251. DOI: 10.1007/978-3-642-01009-5_21

6. Caramia, M., & Giordani, S. (2020). Curriculum-Based Course Timetabling with Student Flow, Soft Constraints, and Smoothing Objectives: an Application to a Real Case Study. *Operations Research Forum*, *1*(2), 11. DOI: 10.1007/s43069-020-0013-x

7. Ceschia, S., Di Gaspero, L., & Schaerf, A. (2023). Educational timetabling: Problems, benchmarks, and state-of-the-art results. *European Journal of Operational Research*, *308*(1), 1–18. DOI: 10.1016/j.ejor.2022.07.011

8. Chen, M. C., Sze, S. N., Goh, S. L., Sabar, N. R., & Kendall, G. (2021). A survey of university course timetabling problem: perspectives, trends and opportunities. *IEEE Access*, (9), 106515–106529. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3100613

9. Holm, D. S., Mikkelsen, R. Ø., Sørensen, M., & Stidsen, T. J. R. (2022). A graph-based MIP formulation of the International Timetabling Competition 2019. *Journal of Scheduling*, *25*(4), 405–428. DOI: 10.1007/s10951-022-00724-y

10. Jat, S. N., & Yang, S. (2009). *A Guided Search Genetic Algorithm for the University Course Timetabling Problem*. Proceedings of the Multidisciplinary International Conference on Scheduling: Theory and Applications (MISTA 2009). Dublin, Ireland, 180–191.

11. Mahlous, A. R., & Mahlous, H. (2023). Student timetabling genetic algorithm accounting for student

preferences. *PeerJ. Computer Science*, *9*, e1200. DOI: 10.7717/peerj-cs.1200

12. Mikkelsen, R. Ø., & Holm, D. S. (2022). A parallelized matheuristic for the International Timetabling Competition 2019. *Journal of Scheduling*, *25*(4), 429–452. DOI: 10.1007/s10951-022-00728-8

13. Müller, T., Rudová, H., & Müllerová, Z. (2025). Real-world university course timetabling at the International Timetabling Competition 2019. *Journal of Scheduling*, *28*(2), 247–267. DOI: 10.1007/s10951-023-00801-w

14. Rappos, E., Thiémard, E., Robert, S., & Hêche, J. F. (2022). A mixed-integer programming approach for solving university course timetabling problems. *Journal of Scheduling*, *25*(4), 391–404. DOI: 10.1007/s10951-021-00715-5

15. Rogachev, A. F., & Zakharov, D. S. (2025). A Systematic Approach to Ontology Construction for Automating the Scheduling of a Multilevel University. *RUDN Journal of Engineering Research*, *26*(1), 39–51. DOI: 10.22363/2312-8143-2025-26-1-39-51

16. Rogachev, D. A., & Rogachev, A. F. (2025). Structural-Parametric Synthesis of Controllers with Genetic Algorithms for Training Neural Networks Based on a Systematic Approach. In Radionov, A. A., & Gasiyarov, V. R. (eds). *Advances in Automation VII. Lecture Notes in Electrical Engineering, 1521*. Cham: Springer Nature Switzerland, 704–715. DOI: 10.1007/978-3-032-14742-4_61

17. Rogachev, D., Yurchenco, I., & Rogachev, A. (2023). Management and optimization of systematic water adjustment by economic-mathematic modeling methods and AI. In *2023 International Russian Automation Conference,* IEEE, 888–893. DOI: 10.1109/RusAutoCon58002.2023.10272907

18. Romaguera, D., Plender-Nabas, J., Matias, Ju., & Austero, L. (2024). Development of a Web-based Course Timetabling System based on an Enhanced Genetic Algorithm. *Procedia Computer Science*, *234*, 1714–1721. DOI: 10.1016/j.procs.2024.03.177

19. Rossi-Doria, O., Sampels, M., Birattari, M., Chiarandini, M., Dorigo, M., Gambardella, L. M., Knowles, J., Manfrin, M., Mastrolilli, M., Paechter, B., Paquete, L., & Stützle, T. (2002). A Comparison of the Performance of Different Metaheuristics on the Timetabling Problem. In Burke, E., & De Causmaecker, P. (eds). *Practice and Theory of Automated Timetabling IV. PATAT 2002. Lecture Notes in Computer Science*, *2740*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 329–351. DOI: 10.1007/978-3-540-45157-0_22

20. Sylejmani, K., Gashi, E., & Ymeri, A. (2023). Simulated annealing with penalization for university course timetabling. *Journal of Scheduling*, *26*(5), 497–517. DOI: 10.1007/s10951-022-00747-5

21. Tung Ngo, S., Jafreezal, J., Hoang Nguyen, G., & Ngoc Bui, A. (2021). A Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization in Complex Course Timetabling. In *Proceedings of the 2021 10th International Conference on Software and Computer Applications*, 229–237. DOI: 10.1145/3457784.3457821

Рогачев Алексей Фруминович, д-р техн. наук, профессор, Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Российская Федерация
E-mail: rafr@mail.ru
ORCID ID: 0000-0002-3077-6622

Захаров Дмитрий Сергеевич, старший преподаватель, Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Российская Федерация
E-mail: zakator@bk.ru
ORCID ID: 0009-0009-6665-510X

Aleksey F. Rogachev, Dr. Sci. (Eng.), Full Prof., Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russian Federation
E-mail: rafr@mail.ru
ORCID ID: 0000-0002-3077-6622

Dmitry S. Zakharov, Assist. Prof., Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation
E-mail: zakator@bk.ru
ORCID ID: 0009-0009-6665-510X

Получена 25.02.2026
Получена в доработанном виде 03.04.2026
Одобрена 12.05.2026

Received 25.02.2026
Revisited 03.04.2026
Accepted 12.05.2026