НАУЧНЫЕ АРХИВЫ

УДК 911.2:556.16

ВАРИАЦИЯ СТОКА И ЕГО ФАКТОРОВ[1]

Н. П. Чеботарев

профессор, доктор технических наук
Воронежский государственный университет
Воронеж, 1949

Аннотация: Редакция журнала «Вестник ВГУ. Серия: География. Геоэкология» публикует монографию Н. П. Чеботарева «Вариация стока и его факторов». Проблема поднятая автором в середине XX века актуальна и сегодня. Однако монография Н. П. Чеботарева стала библиографической редкостью уже сразу после выхода в свет.

Текст книги воспроизводится в авторском варианте. Для понимания важности проблемы в современных исследованиях в области гидрологии публикацию книги предваряет комментарий кандидата географических наук С. Д. Дегтярева.

Ключевые слова: речной сток, вариация стока, факторы стока.

Abstract: The editorial board of the journal «Bulletin of VSU. Series: Geography. Geoecology» publishes the monograph of N. P. Chebotarev «Variation of runoff and its factors». The issue raised by the author in the middle of the 20th century is still relevant today. However, the monograph of N. P. Chebotarev became a bibliographic rarity immediately after the publication.

The text of the book is reproduced in the author's version. To understand the importance of the problem in modern research in the field of hydrology, the publication of the book is preceded by a comment by S. D. Degtyarev – candidate of geographical sciences.

Key words: river runoff, runoff variation, runoff factors.

II. ИЗМЕНЧИВОСТЬ ГОДОВОГО СТОКА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЕГО ФАКТОРОВ

1. ДИСПЕРСИЯ И ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Дисперсия или рассеяние, характеризующее собой степень тесноты расположения случайных величин (значения количественного аргумента) в статистической совокупности около их средней, в теории вероятности выражается математическим ожиданием квадрата отклонения x от ее теоретической средней, т. е. $s^2 = e(x-a)$, где $a = e(x)$. Приняв во внимание теорему Бернулли и рассматривая достаточно большое число испытаний n, выражение дисперсии в математической статистике представляется обычно так:

$$s^2 = \frac{\sum n_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n},$$

где $\bar{x}$ – средняя арифметическая.

Дисперсия всякой случайной величины может быть вызвана одной или несколькими причинами.

Если исследуемая величина (y) является функцией одного или нескольких аргументов

$$y=f(x, z, c,...u),$$

то очевидно дисперсия величины y будет зависеть как-то от дисперсии величин $x, z, c,... u$.

Для выяснения этой зависимости мы позволим себе привести здесь некоторые свойства дисперсии и в частности теорему сложения дисперсии.

Рассмотрим n случайных независимых переменных величин $x, y, z ...u$, математические ожидания которых соответственно даны:

$$e(x) = a,\ e(y) = b\ ......\ e(u) = e.$$

Дисперсия суммы s_s^2 величин $x, y, z .... u$ равна

$$e[(x+y+....+u)-(a+b+....+e)]^2=$$
$$=e[(x-a)+(y-b)+....+(u-e)]^2=$$
$$=-e(x-a)^2+e(y-b)^2+....+e(u-e)^2+$$
$$+2e[(x-a)(y-b)]+2e[(x-a)(z-c)]+...$$

© Чеботарев Н. П., 2018

[1] Продолжение. Начало в журнале «Вестник ВГУ. Серия: География. Геоэкология» № 3/2018 г.

Произведенные отклонения стоящих в правой части уравнения обращаются в нуль, так как математическое ожидание произведения отклонений двух независимых величин = 0.

Тогда

$$s_s^2 = s_x^2 + s_y^2 + \ldots + s_u^2 . \qquad (7)$$

Такова дисперсия суммы независимых случайных величин. Но в области гидрологии и метеорологии мы почти всегда встречаемся с величинами зависимыми, поэтому рассмотрим далее дисперсию суммы зависимых величин. Степень зависимости между двумя величинами лучше всего характеризуется коэффициентом корреляции $R_{xy} = R(y, x)$, который определяется формулой

$$R_{xy} = \frac{e(x-a)(y-b)}{s_x s_y} = \frac{e(xy-ab)}{s_x s_y},$$

откуда

$$e(x-a)(y-b) = R_{xy} s_x s_y$$

и тогда

$$s_s^2 = s_x^2 + s_y^2 + \ldots + s_u^2 + 2\left[R_{xy} s_x s_y + R_{xz} s_x s_z\right], \quad (8)$$

где члены $s_i s_z$ соответствуют всем парам различных знаков i и k, которые мы можем выбрать среди чисел: 1, 2, 3...u, следовательно, число этих членов

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Обратимся теперь к уравнению водного баланса для года

$$y = x - z \pm u .$$

Из уравнения водного баланса следует, что дисперсия годового стока зависит от дисперсии x, z и u, а именно:

$$s_y = s_x \sqrt{1 + a^2 + b^2 - 2b_2 r_{z/x} + 2b_u r_{u/x} - 2abr_{u/z}}, \quad (9)$$

где $a = \frac{s_z}{s_x} = \frac{C_{VZ}(a-1)}{C_{VX}}$; $b = \frac{s_u}{s_x}$ и $a = \frac{x}{y} = \frac{1}{h}$.

Так как

$$s_y = \bar{y} C_{vy}, \quad s_x = \bar{x} C_{vx},$$

а обозначая множитель с радикалом через p, уравнение (9) примет вид:

$$C_{vy} = apC_{vx} = b\frac{C_{vx}}{h}, \qquad (10)$$

где h – коэффициент стока.

К этому типу можно притти, исходя из уравнения прямой

$$y = px + g, \qquad (11)$$

где x – осадки, y – сток, p и g – параметры.

Находя стандарт для уравнения (11), запишем, что

$$s_y = ps_x,$$

откуда легко получить уравнение (10).

Параметр p характеризуется множителем с радикалом уравнения (9). Если допустить маловероятный случай, когда $b_z = b_u = 1$, при котором $r_{z/x} = r_{u/x} = r_{u/z}$, то параметр $p = 1$. Этот случай указывает на равенство между s_y и s_z, т. е. на функциональную связь между y и x, выраженную уравнением прямой линии. Параметр p для условий ЕТС[2] колеблется в пределах от 0,25 до 1,00. При этом верхний предел относится к северу, а нижний – к югу. Верхний предел обусловлен равенством $s_y = s_x$, что и соответствует действительным условиям севера: между y и x имеется довольно тесная связь.

Третье слагаемое $\pm u$, как показали исследования Калинина Г. П. и Лихолетова Д. Д. [32], зависит от разности осадков, предыдущего и данного годов, или их частей. Это указывает, что в известной доле коэффициентом вариации годовых высот осадков учитывается и вариация величины $\pm u$.

Что же касается факторов, связанных с почвенно-геологическими условиями, то эти условия являются для одного и того же бассейна постоянными и не участвуют в образовании вариации величины $\mp u$.

Поэтому мы можем принять, что величина дисперсии, является пропорциональной сумме дисперсий первых двух слагаемых уравнения водного баланса, т. е. x и z и написать, что

$$s_y = Ls_x \sqrt{1 + a_r^2 - 2a_r r_{z/x}} \qquad (12)$$

или

$$C_{vy} = LC_{vx}\sqrt{a_2(a-1)^2 C^2 - 2a(a-1)Cr_{z/x}}, \quad (13)$$

где

$$C = \frac{C_{vz}}{C_{vx}},$$

L_x – коэффициент пропорциональности. Для параметра p мы получаем в этом случае такое выражение

$$p = L\sqrt{1 + \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 C^2 - \frac{2(a-1)}{a} Cr_{z/x}}. \qquad (14)$$

[2] ЕТС – Европейская территория Советского Союза (*Гл. редактор*).

Полученное равенство (13) показывает, что коэффициент вариации годового стока зависит от коэффициента вариации годовых высот осадков и испарения, от коэффициента корреляции этих величин и от соотношения осадков к стоку.

2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ВАРИАЦИИ ГОДОВОГО СТОКА

Величина a , представляющая собой отношение норм осадков и стока, по существу всегда должна быть больше единицы, так как нельзя найти такого места на земном шаре, где бы совершенно не проявилось испарение в многолетнем разрезе. Практически величина испарения может быть значительной, а если еще принять во внимание, что величина конденсации нашими дождемерами совершенно не учитывается, а также преуменьшения значений годовых высот осадков, измеряемых нашими дождемерами, то случаи, когда $a \cong 1$, могут иметь место. Допуская возможность существования таких случаев, т. е. случаев, когда $\overline{x} \cong \overline{y}$, мы вправе тогда допустить, что коэффициент вариации стока равен коэффициенту вариации осадков. В самом деле, подставляя в уравнение (13) $a-1$, получим, что

$$C_{vy} \cong C_{vx}.$$

Так как относительное испарение (коэффициент испарения $\frac{z}{x}$) для нашего полушария убывает к северу (см. картограмму № 1), то C_{vy}, уменьшаясь в этом направлении, приближается к значению C_{vx}. Так, например, р. Уса (правый приток р. Печоры) у Балбан-Петрунь (ш. 66°26') имеет отношение a , близкое к единице. Для этого пункта C_{vy} = 0,15, что почти полностью соответствует значению C_{vx}.

Отношение a всегда должно быть >0, так как трудно найти такое место на земном шаре, где бы за многолетний период времени не выпала ни одна капля дождя. Но если бы такое место и нашлось, то

$$C_{vy} = C_{vx} = 0.$$

Входящая в уравнение (13) величина коэффициента корреляции r_{zx} может принимать значение в пределах от 0 до 1. При полном отсутствии связи между z_i и x_i, коэффициент корреляции =0. Такой случай вряд ли имеет место, так как всякая поверхность, чем она чаще смачивается дождем, тем больше теряет влаги на испарение при одних и тех же прочих условиях. Надо предполагать, что между z_i и x_i существует большая или малая зависимость, и, следовательно, коэффициент корреляции $r_{r/x}$ почти всегда должен быть >0.

Но если такой случай имел бы место, то уравнение (13) было бы представлено в следующем виде:

$$C_{vy}^2 = a^2 C_{vx}^2 + (a-1)^2 C_{vz}^2. \qquad (15)$$

Очевидно, в этом случае значение коэффициента вариации годового стока в южных условиях имело бы максимальное значение.

При наличии функциональной зависимости между $\overline{z}$ и $\overline{x}$, т. е. когда $r_{z/x}$ = 1, что тоже мало вероятно, так как испарение зависит также и от других факторов (температура воздуха, влажность, скорость ветра и др.), то уравнение (13) будет иметь вид:

$$C_{vy} = aC_{vx} - (a-1)C_{vz}, \qquad (16)$$

или

$$C_{vy} = a(C_{vx} - C_{vz}) + C_{vz}. \qquad (17)$$

Высокое значение $r_{z/x}$ можно ожидать в южных условиях, где отношение также довольно высоко, а если предположить, что C_{vx} и C_{vz} приблизительно одинаковы, то для таких условий C_{vy} стремится также быть равным C_{vz}. Здесь, повторяю, случай, когда $r_{z/x}$ = 1 представляется маловероятным, следовательно, все эти рассуждения имеют чисто теоретическое значение так же, как и формулы (15), (16) и (17).

3. УПРОЩЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Основным элементом подкоренного выражения по своему весу является отношение $a = h^{-1}$ (обратное значение коэффициента стока) поэтому мы склонны сделать допущение, а именно: принять радикал $A^{0,5}$, равным величине a^m , и тогда

$$C_{vy} = C_{vx} a^m = h^{-m} C_{vx}. \qquad (18)$$

Полученный тип формулы (18) отличается некоторой универсальностью: по такому же типу можно выразить коэффициенты вариации – испарения, максимального и минимального стока.

Распространяя полученный тип уравнения (18) на все случаи ЕТС мы считаем, что недостающие значения элементов уравнения (13) b C_{vr}, $r_{z/x}$, s_u и др. входят в скрытом виде в значения параметра m. Так как C_{vz} и $r_{z/v}$ являются величинами, зависящими от значений относительного испарения, то очевидно, и m также зависит от этого фактора.

Чтобы яснее себе представить полученное равенство (18), выразим его графически. Для этой цели следует разделить обе части (18) на C_{vx}, и

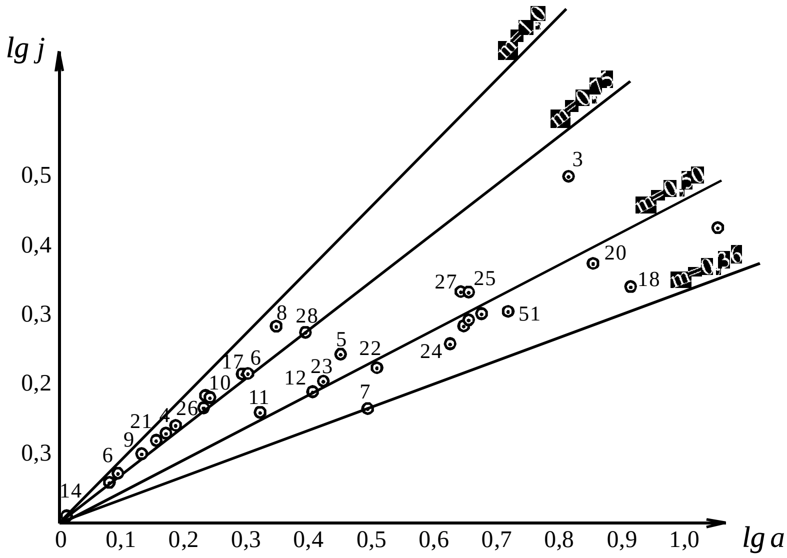

Рис. 1. Пучек прямых

обозначить через и прологарифмировать, тогда оно примет вид:

$$lg\, j = m\, lg\, a \,. \qquad (19)$$

Уравнение (19) выражает пучок или семейство прямых, выходящих из начала координат (рис. 1).

Подобное графическое изображение могло быть представлено в виде семейства кривых ($j = a^m$).

Эмпирические точки, нанесенные на координатное поле (рис. 1), были получены на основе данных, имевших достаточно большое число лет наблюдений (в среднем на каждый пункт 37 лет) и только для 8 пунктов длина ряда лежала в пределах от 10 до 20 лет.

Из рис. 1 можно видеть, что значение параметра «*m*» лежит в пределах от единицы (на севере) до 0,4 (на юге) ЕТС.

Полученная формула (18) для определения C_{vy} представляет собой функцию трех аргументов (трех переменных), и она является криволинейной. При такой сложной функции математическая статистика не дает точных методов для оценки тесноты связи между функцией и аргументами, но приближенно можно оценить тесноту обычным методом, т. е, коэффициентом корреляции. Так теснота связи C_{vy} с C_{vx} определяется коэффициентом корреляции $r_1 = 0{,}76 \pm 0{,}059$ при $s = 0{,}07$, теснота связи C_{vy} с a определяется коэффициентом корреляции $r_z = 0{,}89 \pm 0{,}025$.

Уравнение (18), выраженное средне квадратическим отклонением будет иметь такой вид:

$$s_y = s_x a^{m-1}\,. \qquad (20)$$

Так как основными факторами вариации годового стока являются вариации осадков и испарения, а также соотношения последних, то в последующем перейдем к анализу этих основных факторов изменчивости стока.