

Аппроксимационный оператор обратной задачи гравиметрии для горизонтального слоя

©2023 В. Н. Глазнев^{1, 2✉}, О. М. Муравина¹, А. Б. Раевский²

¹*Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, 394018, Воронеж, Российская Федерация*
²*Геологический институт Кольского научного центра РАН,
ул. Ферсмана, 14, 184209, Апатиты, Российская Федерация*

Аннотация

Рассматривается метод решения трёхмерной обратной задачи гравиметрии основанный на использовании приближенного оператора обратной задачи для горизонтального слоя. Построение приближенного оператора выполнено на основе аппроксимации точного аналитического обратного оператора для бесконечного горизонтального слоя конечной суммой простых дискретных линейных операторов. Выбор структуры приближенного обратного оператора даётся в спектральной форме, исходя из физической сущности задачи и учитывая естественные ограничения по верхней и нижней частоте для спектрального представления дискретно заданного поля на конечном интервале его определения, в соответствии с теоремой Котельникова. Вычисление параметров приближенного обратного оператора осуществляется на основе минимизации его отклонения от аналитического значения обратного оператора для горизонтального слоя, на конечном числе точек спектра этих функций, что обеспечивает требуемую точность практического решения обратной задачи гравиметрии. Приводятся явные аппроксимационные выражения для расчёта параметров обратного оператора, зависящие от соотношения дискретного шага задания гравитационного поля и мощности горизонтального слоя, в котором осуществляется поиск решения обратной задачи. Общий алгоритм приближенного решения трёхмерной обратной задачи гравиметрии на основе предложенного обратного оператора реализован в виде итерационного решения, учитывающего сведения о геометрии изучаемой среды и начального приближения плотности в модели. Существенным моментом в решении обратной задачи является априорная оценка допустимых вариаций аномальности плотности искомого решения и трёхмерная весовая функция, определяющая меру достоверности начального приближения для изучаемой среды. Дётся краткое описание технологии практического применения предлагаемого подхода решению обратной задачи гравиметрии при изучении плотностного строения щитов и фундамента платформ.

Ключевые слова: обратная задача гравиметрии, аппроксимационный оператор, итерационное решение.

Источник финансирования: грант РФФ № 23-27-00251

Для цитирования: Глазнев В. Н., Муравина О. М., Раевский А. Б. Аппроксимационный оператор обратной задачи гравиметрии для горизонтального слоя // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Геология.* 2023. № 4. С. 97–105. DOI: <https://doi.org/10.17308/geology/1609-0691/2023/1/97-105>

Введение



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

✉ Глазнев Виктор Николаевич, e-mail: glaznev@geol.vsu.ru

Одной из важнейших проблем интерпретации гравиметрических данных является решение обратной задачи гравиметрии для горизонтального слоя конечной мощности в трёхмерной постановке, которая в геологическом отношении соответствует проблеме построения плотностных моделей кристаллической коры щитов и фундамента платформ. В канонической форме задачи инверсии гравиметрических данных используются методы устойчивых численных решений интегральных уравнений на основе аппарата линейной алгебры [1, 2]. Развитие данного подхода и его успешное применение в задачах гравиметрической интерпретации продемонстрировано в работах многих авторов [3–8].

Наряду с указанным подходом уже более пяти десятилетий развиваются методы инверсии гравитационного поля, основанные на спектральном представлении для интегрального уравнения гравиметрии [9–15 и др.] В основе такого подхода лежат принципы решения интегрального уравнений типа свёртки относительно искомого значения плотности при заданной области определения носителя масс в виде бесконечного в плане горизонтального слоя. Очевидно, что спектральное представление решения интегрального уравнения типа свёртки в своей численной реализации базируется на ряде допущений и ограничений, которые являются определяющими для получаемого решения о распределении плотности в модельной области [15].

В предлагаемой статье авторы сочли уместным вновь обратиться к проблеме решения интегрального уравнения типа свёртки, поскольку с момента выхода базовой публикации [16], оставшейся без должного внимания читателей в связи с малым тиражом изда-

ния, были предприняты усилия по совершенствованию алгоритма инверсии на основе спектрального представления. Полученные результаты численной реализации трёхмерной обратной задачи гравиметрии для слоя конечной мощности на основе спектрального подхода позволили использовать развитый алгоритм для решения широкого круга задач изучения плотностного строения земной коры [17–25].

Принципы аппроксимационной инверсии

Рассмотрим основы решения трёхмерной обратной задачи гравиметрии для бесконечного по простиранию горизонтального слоя, следуя [13, 15, 16]. Предположим, что плотностные неоднородности изучаемой среды σ , порождающие аномалии гравитационного поля Δg , сосредоточены в горизонтальном слое с аппликатой верхней и нижней грани h и H , соответственно. Выражение для гравитационного поля на уровне наблюдений $z=0$ в этом случае можно записать в декартовой системе координат как:

$$\Delta g(x, y) = f \cdot \int_h^H \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta \sigma(\xi, \eta, \zeta) \cdot d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2]^{3/2}} \right) d\zeta, \quad (1)$$

где f – гравитационная постоянная, x и y – координаты точек вычисления поля, ζ , η и ξ – координаты точек носителя масс.

Выражение в круглых скобках, фигурирующее в правой части (1), представляет собой двухмерный интеграл свёртки плотности $\sigma(\zeta, \eta, \xi)$ с ядром Пуассона, определяющем аналитическое продолжение в верхнее полупространство. Применяя двухмерное преобразование Фурье к левой и правой части (1) на основании теоремы о спектре интеграла свёртки запишем

$$S_{\Delta g}(\omega_x, \omega_y) = f \cdot \int_h^H S_{\sigma}(\omega_x, \omega_y, \zeta) \cdot \exp(-|\omega|\zeta) \cdot d\zeta, \quad (2)$$

где ω_x , ω_y – пространственные частоты, $|\omega| = (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{1/2}$, а $S_{\Delta g}$ и S_{σ} обозначает соответственно спектр Фурье поля Δg на уровне $z=0$ и спектр плотности σ на некотором текущем уровне ζ .

Из выражения (2) можно получить значение спектра S_{σ} , только при некоторых допущениях относительно характера распределения искомой плотности. Воспользуемся предложенным в [12, 13] представле-

нием спектра плотности S_{σ} в виде функции с разделяющимися переменными

$$S_{\sigma}(\omega_x, \omega_y, \zeta) = \tilde{S}(\omega_x, \omega_y) \cdot W(\zeta), \quad (3)$$

где $W(\zeta)$ – некоторая заданная весовая функция, а $\tilde{S}(\omega_x, \omega_y)$ – неизвестная функция подлежащая определению. Учитывая определение (3) соотношение (2) запишем в виде

$$S_{\Delta g}(\omega_x, \omega_y) = f \cdot \tilde{S}(\omega_x, \omega_y) \int_h^H W(\zeta) \cdot \exp(-|\omega|\zeta) \cdot d\zeta, \quad (4)$$

из которого сразу следует:

$$\tilde{S}(\omega_x, \omega_y) = S_{\Delta g}(\omega_x, \omega_y) / \left(f \cdot \int_h^H W(\zeta) \cdot \exp(-|\omega|\zeta) \cdot d\zeta \right). \quad (5)$$

Умножив обе части тождества (5) на $W(\zeta)$ получим

$$\tilde{S}(\omega_x, \omega_y) \cdot W(\zeta) = W(\zeta) \cdot S_{\Delta g}(\omega_x, \omega_y) / \left(f \cdot \int_h^H W(\zeta) \cdot \exp(-|\omega|\zeta) \cdot d\zeta \right)$$

и из последнего, учитывая определение (3), для спектра искомой плотности S_{σ} имеем итоговое решение задачи в форме:

$$S_{\sigma}(\omega_x, \omega_y, z) = \frac{S_{\Delta g}(\omega_x, \omega_y)}{f} \cdot \left(W(z) / \int_h^H W(\zeta) \cdot \exp(-|\omega|\zeta) \cdot d\zeta \right). \quad (6)$$

В простейшем случае при $W(z) \equiv 1$ из (6) следует аналитическое представление для искомой плотности

$$S_{\sigma}(\omega_x, \omega_y, z) = \frac{S_{\Delta g}(\omega_x, \omega_y)}{f} \cdot \left(1 / \int_h^H \exp(-|\omega|\zeta) \cdot d\zeta \right) = \frac{S_{\Delta g}(\omega_x, \omega_y)}{f} \cdot \frac{|\omega| \cdot \exp(|\omega|h)}{1 - \exp(-|\omega|\Delta H)} = \frac{S_{\Delta g}(\omega_x, \omega_y)}{f} \cdot R(|\omega|, h, \Delta H), \quad (7)$$

которое можно записать в виде медленно сходящейся суммы ряда аналитических продолжений на уровни кратные значению $\Delta H = H - h$ для первой вертикальной производной поля Δg [9, 14, 26–28]. В общем случае такой подход является ограниченно конструктивным, и поэтому в [16] авторами был предложен аппроксимационный принцип построения спектрального оператора

$$R(|\omega|, 0, H) = \frac{|\omega|}{1 - \exp(-|\omega|H)} = |\omega| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-|\omega|H(k-1)]. \quad (8)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами в этом представлении и учитывая, что второй член ряда достигает максимума при $|\omega| = 1/H$, запишем выражение

$$R_{\alpha}(|\omega|, 0, H) \approx |\omega| + \frac{1}{H} \exp(-|\omega| \cdot H), \quad (9)$$

которое обеспечивает простейшее приближение оператора (8). Именно это выражение и будем использо-

$$S_{\sigma}^{(n+1)}(\omega_x, \omega_y, z) = S_{\sigma}^{(n)}(\omega_x, \omega_y, z) + W(z) \cdot R(|\omega|, h, \Delta H) \cdot \left[S_{\Delta g}^{(n)}(\omega_x, \omega_y) - f \cdot \int_h^H S_{\sigma}^{(n)}(\omega_x, \omega_y, \zeta) \cdot \exp(-|\omega|\zeta) \cdot d\zeta \right], \quad (10)$$

где верхний индекс в круглых скобках обозначает порядок итерации. Отметим, что итерационный процесс (10), для положительно определённой $W(z)$, будет сходящимся [16] при выполнении условия нормировки весовой функции

$$\int_h^H W(\zeta) \cdot d\zeta = \Delta H. \quad (11)$$

Инверсионная конструкция в форме (10) – (11) без уменьшения общности допускает расширение на случай $h \rightarrow 0$, полагая, что весовая функция $W(z)$, в области выше верхней границы слоя с искомыми источниками, доопределена нулевыми значениями. В такой постановке численная реализация предложенного подхода мо-

жет быть модифицирована с использованием аппроксимации спектрального оператора в форме (9), принимая во внимание граничные частоты спектров исходных данных задачи.

Для дискретных значений поля верхняя граничная частота определяется как $\omega_b = \pi/\Delta x$, где Δx шаг дискретизации используемых данных. Помимо верхней граничной частоты на практике имеет место и нижняя граничная частота ω_n , определяемая аналогично через характерный плановый размер области задания данных L (в двухмерном случае – длину профиля наблюдений). В заданном диапазоне частот $\omega_n < |\omega| < \omega_b$ аппроксимацию спектрального оператора обратной задачи $R(|\omega|, h, \Delta H)$ запишем как

$$R_{\alpha}(|\omega|, \Delta H, A, B, D) = A \cdot |\omega| + \frac{B}{\Delta H} \cdot \exp(-D \cdot |\omega|\Delta H), \quad (12)$$

где величины безразмерных констант A , B и D подлежат определению. Собственно, значение констант в представлении аппроксимационного спектрального

оператора (12) можно получить из решения оптимизационной задачи вида

Фактически вычисление спектра плотности в заданном слое $\zeta \in [h, H]$ для положительно определённой $W(z)$, на основании (7), можно выполнить методом итераций [15, 16]:

оператора (12) можно получить из решения оптимизационной задачи вида

$$\int_{\omega_n}^{\omega_b} [R(|\omega|, h, \Delta H) - R_{\alpha}(|\omega|, \Delta H, A, B, D)]^2 d\omega = \min. \quad (13)$$

дельного слоя с искомыми источниками. Оптимизационная задача (13) легко решается с помощью стандартных средств компьютерной математики (MathCad, MATLAB) при разумных значениях указанных выше параметров задачи. В понятие “разум-

ного слоя с искомыми источниками. Оптимизационная задача (13) легко решается с помощью стандартных средств компьютерной математики (MathCad, MATLAB) при разумных значениях указанных выше параметров задачи. В понятие “разум-

ных значений параметров” мы вкладываем такие их величины, по отношению к шагу дискретизации исходного поля, которые не порождают чрезмерную детальность и/или разрежённость исходных данных описания модели изучаемой среды.

Практический опыт оптимального представления аппроксимации спектра оператора (12) показал, что вычисляемые величины констант лежат в довольно узких пределах. Значение константы A наиболее устойчиво и варьирует в диапазоне примерно 0.99–1.01; значение константы B варьирует в диапазоне примерно 0.95–1.05; а значение константы D наиболее существенно зависит от размеров области данных и мощности модельного слоя, варьируя в диапазоне 0.43–0.70. Напомним, что здесь мы рассматриваем “разумные величины” входных параметров в (12), которые позволяют с некоторой степенью детальности получить содержательное решение задачи

инверсии поля.

Вычисляемые согласно (13) оптимальные значения констант в аппроксимации позволяют в большинстве реальных практических задач инверсии представить функцию $R(|\omega|, h, \Delta H)$ с погрешностью менее 1–2 %. На рис. 1 показан пример относительной разности значений точного и аппроксимационного операторов, определяемой как

$$\Delta R(\omega) = \frac{R(|\omega|, h, \Delta H) - R_a(|\omega|, \Delta H, A, B, D)}{R(|\omega|, h, \Delta H)}, \quad (14)$$

для некоторой конкретной задачи инверсии. Этот график демонстрирует наибольшие различия операторов в области низких частот $|\omega| < \omega_b/8$ и весьма хорошее их совпадение в области высоких частот $|\omega| > \omega_b/4$. Приведённый пример является типичным для большинства реальных практических задач инверсии гравитационного поля.

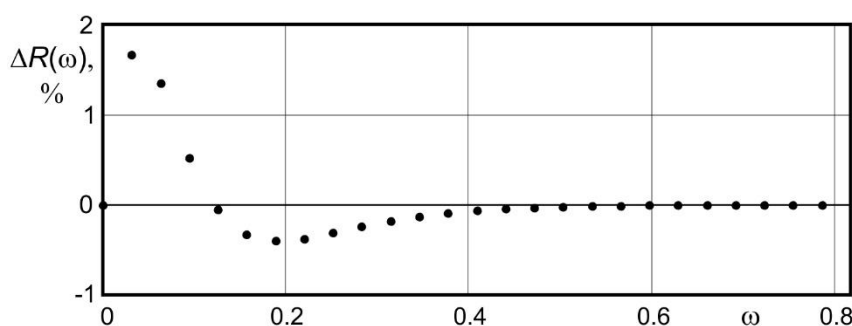


Рис. 1. График относительной разности точного и аппроксимационного операторов в зависимости от частоты ω . Параметры задачи инверсии: $\Delta H/\Delta x=10; L/\Delta x=50; A=1,001; B=1,034; D=0,625$.

[Fig. 1. Graph of the relative difference between the exact and approximation operators as a function of frequency ω . Parameters of the inversion problem: $\Delta H/\Delta x=10; L/\Delta x=50; A=1,001; B=1,034; D=0,625$.]

Численная схема инверсии

Вычислительная конструкция обратной задачи в спектральном представлении (10)–(11), с использованием спектральной аппроксимации (12), позволяет эффективно решать задачу инверсионной трансформации гравитационного поля в значения спектра плотности эквивалентного слоя в трёхмерном варианте, в том числе и на сферической поверхности

$$\sigma^{(n+1)}(x, y, z) = \sigma^{(n)}(x, y, z) + W(z) \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^N C_{ij}(\Delta H, A, B, D) \cdot \delta g^{(n)}(x_i, y_j), \quad (15)$$

где индекс n – порядок итерации, C_{ij} – кубатурные коэффициенты преобразования, зависящие от параметра конкретной задачи инверсии ΔH и констант A, B и D , определяемых из условия (13). Фигурирующая в (15) невязка n -го приближения гравитационного поля $\delta g^{(n)}$ вычисляется как решение прямой задачи (1) для текущего приближения плотности $\sigma^{(n)}$. Таким образом, вычисление плотности в трёхмерном горизонтальном слое согласно (15), сводится к итерационной последовательности суммы устойчивых линейных трансформаций: вычисления первой вертикальной производной поля и продолжения поля в верхнее полупространство.

[29]. По определению (12) такая трансформация фактически представляет весовую сумму операций вычисления первой вертикальной производной поля и продолжения поля в верхнее полупространство на некоторый определённый уровень. Тогда, в силу линейности обратного преобразования Фурье, итерационный процесс вида (10) в пространственных координатах (x, y) можно записать в виде:

Важным моментом аппроксимационного решения трёхмерной обратной задачи в итерационной постановке (15) является выбор весовой функции перераспределения невязок плотности $W(z)$, которая обязательно должна удовлетворять условию (11). В общем случае эта функция может зависеть и от пространственных координат (x, y) , что не ограничивает использование аппроксимационного решения в форме (15). При этом метод инверсии реализуется на основе “локальной коррекции” [29, 30], когда поправки в решение для плотности вводятся в элементы дискретной модели среды, расположенные непосредственно под точкой с известной невязкой поля. Опыт числен-

ной реализации такого подхода на различных модельных примерах [31, 32] показывает несколько более слабую сходимость итерационного процесса, но при этом содержательное решение может быть получено за конечное число итераций.

Отметить также, что для полупространства, формально полагая $W(z)=\exp(-|\omega|z)$, из (6) сразу следует известный результат [12] о представлении решения плотности как зеркального отражения вертикальной производной гравитационного поля, продолженного в верхнее полупространство с точностью до сомножителя $1/2f$. А именно такое решение, как было показано ещё в [10], доставляет минимум нормы для искомой плотности в нижнем полупространстве. С этих позиций решение для плотности в форме (10) – (12) представляется асимптотически нормальным.

Реализация алгоритма инверсии

Собственно, технология расчётов аномальной плотности в постановке (10) – (11), основанная на аппроксимационном представлении приближенного оператора обратной задачи в спектральной форме (12), реализуется в виде итерационного процесса (15). Практическая эффективность предлагаемого подхода основана на совокупности геолого-геофизических данных, характеризующих начальную модель изучаемой среды. Такие исходные данные должны включать:

- трёхмерную априорную геологическую модель среды, представленную в значениях плотности пород, слагающих изучаемую область, и реалистичные диапазоны возможных изменений плотности для каждого типа пород;

- некоторую региональную плотностную модель среды, которая позволяет переходить от абсолютных значений плотности к её избыточным значениям;

- геологически содержательную оценку верхней и нижней границы горизонтального слоя, в котором отыскивается решения для плотности;

- аномальное гравитационное поле изучаемой среды, взятое относительно принятой региональной плотностной модели, в достаточно широкой области и с шагом пространственной дискретизации, необходимым для содержательных геологических построений;

- трёхмерную весовую функцию перераспределения аномальной плотности, характеризующей достоверность решения обратной задачи в ходе итерационного решения.

Совокупность исходных данных позволяет определить необходимую дискретизацию среды в плане и по вертикали, на основе чего вычисляются оптимальные коэффициенты аппроксимационного обратного оператора для расчёта плотности в горизонтальном слое. Собственно, решение обратной задачи гравиметрии представляет итерационный процесс инверсии локальных невязок поля в значения плотности тонкого эквивалентного горизонтального слоя и последующее перераспределение полученных значений ано-

мальной плотности в нижележащие слои модели с заданной весовой функцией. При решении обратной задачи принимаются во внимание значения минимальных ограничений на искомые величины плотности, которые регламентируются параметром “жёсткости” амплитудных ограничений в диапазоне от 0 (без ограничений) до 1 (строгое соответствие заданным ограничениям).

Изложенный выше алгоритм итерационного решения обратной задачи гравиметрии, основанный на аппроксимационном представлении обратного оператора для горизонтального слоя, показал высокую эффективность при построении плотностных моделей геологических сред в различных условиях. Предлагаемый подход был реализован при создании региональных моделей земной коры [17, 19, 20, 21, 24, 25, 33, 34 и др.] и детальных моделей отдельных геологических объектов [18, 22, 23, 35 и др.].

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. Tarantola A., Valette B. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least square criterion // *Reviews of Geophysics and Space Physics*. 1982. Vol. 20. No 2. P. 219–232. DOI: <https://doi.org/10.1029/RG020i002p00219>.
3. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка, 1978. 228 с.
4. Алексидзе М.А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М.: Наука, 1987. 336 с.
5. Старостенко В.И., Исаев В.И., Пятаков Ю.В. Решение обратной задачи гравиметрии для контактов осадочных пород // *Геофизический журнал*. 1993. Т. 15. № 1. С. 62–71.
6. Акимова Е.Н., Васин В.В., Пересторонина Г.Я., Тимержанова Л.Ю., Мартышко П.С., Кокшаров Д.Е. О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе // *Вычислительные методы и программирование*. 2007. Т. 8. № 1. С. 103–112.
7. Акимова Е.Н., Мартышко П.С., Мисилов В.Е. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // *Доклады РАН*. 2013. Т. 453. № 6. С. 676–679. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0869565213360164>
8. Martyshko P., Ladovskii I., Byzov D. Parallel algorithms for solving inverse gravimetry problems: application for earth's crust density models creation // *Mathematics*. 2021. Vol. 9. No. 2966. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9222966>
9. Новоселицкий В.М. К теории определения изменения плотности в горизонтальном пласте по аномалиям силы тяжести // *Физика Земли*. 1965. № 5. С.25–32.
10. Cribb J. Application of the generalized linear inverse to the inversion of static potential data // *Geophysics*. 1976. Vol. 41. No. 6. P. 1365–1369. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.1440686>
11. Савелова Т.И. Об оптимальной регуляризации уравнений типа свёртки со случайными помехами в ядре и правой части // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1978. Т. 18. № 2. С. 275–283. DOI: <https://doi.org/10.1016%2F0041-5553%2878%2990032-0>
12. Кобрунов А.И., Варфоломеев В.А. Об одном методе ϵ -эквивалентного перераспределения и его использовании для

- интерпретации гравитационного поля // *Физика Земли*. 1981. № 10. С. 25–44.
13. Раевский А.Б. Применение линейных трансформаций при гравитационном моделировании верхней части земной коры на кристаллических щитах (на примере западного района Кольского полуострова): дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Апатиты, 1984. 102 с.
14. Pedersen L.B. Relation between potential fields and some equivalent sources // *Geophysics*. 1991. Vol. 56. No. 7. P. 961–971. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.1443129>
15. Кобрунов А.И. Математические основы теории интерпретации геофизических данных. М.: ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. 288 с.
16. Глазнев В.Н., Раевский А.Б., Балаганский В.В., Маннинен Т. Трёхмерная модель верхней коры района Киттиля-Соданкюля, Финская Лапландия (север Балтийского щита): сб. материалов, посвящённый 40-летию кафедры геофизики ВГУ. Воронеж, Изд-во Воронеж. гос. ун-та. 2002. С. 11–20.
17. Arzamastsev A.A., Glaznev V.N., Raevsky A.B., Arzamastseva L.V. Morphology and internal structure of the Kola alkaline intrusions, NE Fennoscandian Shield: 3D density modelling and geological implication // *Journal of Asian Earth Sciences*. 2000. Vol. 18. No. 2. P. 213–228. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1367-9120\(99\)00052-8](https://doi.org/10.1016/S1367-9120(99)00052-8)
18. Глазнев В.Н., Жирова А.М., Раевский А.Б. Новые данные о глубинном строении Хибинского и Ловозерского массивов, Кольский полуостров // *Доклады РАН*. 2008. Т. 422. № 3. С. 391–393. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028334X08070349>
19. Glaznev V.N., Mints M.V., Muravina O.M., Raevsky A.B., Osipenko L.G. Complex geological–geophysical 3D model of the crust in the southeastern Fennoscandian Shield: Nature of density layering of the crust and the crust–mantle boundary // *Geodynamics & Tectonophysics*. 2015. 6 (2). P. 133–170. DOI: <https://doi.org/10.5800/GT-2015-6-2-0176>
20. Глазнев В.Н., Минц М.В., Муравина О.М. Плотностное моделирование земной коры центральной части Восточно-Европейской платформы // *Вестник Камчатской региональной организации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле*. 2016. Вып. 29. № 1. С. 53–63.
21. Минц М.В., Глазнев В.Н., Муравина О.М. Глубинное строение коры юго-востока Воронежского кристаллического массива по геофизическим данным: геодинамическая эволюция в палеопротерозое и современное состояние коры // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Геология*. 2017. № 4. С. 5–23.
22. Глазнев В.Н., Жаворонкин В.И., Муравина О.М., Антонова И.Ю., Воронова Т.А., Черешинский А.В., Холин П.В. Строение верхней коры елецкого участка Лосевского террейна (Воронежский кристаллический массив) по данным плотностного моделирования // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Геология*. 2019. № 3. С. 74–83.
23. Voronova T.A., Glaznev V.N., Muravina O.M., Antonova I.Y. The Density Model of the Crystalline Crust the Southwestern Part of the Lipetsk Region. *Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences: Practical and Theoretical Aspects of Geological Interpretation of Gravitational, Magnetic and Electric Fields*. Eds. D.Nurgaliev, N.Khairullina. Springer Nature Switzerland AG. 2019. P. 69–76. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-319-97670-9_8
24. Mints M.V., Glaznev V.N., Muravina O.M., Sokolova E.Yu. 3D model of Svecofennian Accretionary Orogen and Karelia Craton based on geology, reflection seismics, magnetotellurics and density modelling: Geodynamic speculations // *Geoscience Frontiers*. 2020. 11 (3). P. 999–1023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gsf.2019.10.003>
25. Воронова Т.А., Муравина О.М., Глазнев В.Н., Березнева С.И. Трёхмерная плотностная модель верхней коры в области сочленения Лосевского и Донского террейнов (Воронежский кристаллический массив) // *Вестник Камчатской региональной организации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле*. 2021. № 1(49). С. 24–35. DOI: <https://doi.org/10.31431/1816-5524-2021-1-49-24-35>
26. Blakely R.J. Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge University Press. 1995. 461 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511549816>
27. Vogel C.R. Computational methods for inverse problems // *Frontiers in Applied Mathematics SIAM*. 2002. 183 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898717570>
28. Fullagar P.K., Pears G.A., McMonnies B. Constrained inversion of geologic surfaces - Pushing the boundaries // *The Leading Edge*. 2008. Vol. 27. No. 1. P. 98–105. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.2831686>
29. Глазнев В.Н. Комплексные геофизические модели литосферы Фенноскандии. Апатиты: «КаЭМ», 2003. 252 с.
30. Мартышко П.С., Пруткин И.Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // *Геофизический журнал*. 2003. Т. 25. № 3. С. 159–169.
31. Воронова Т.А., Глазнев В.Н., Муравина О.М. Тестирование аппроксимационного алгоритма решения обратной задачи гравиметрии. *Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей. Десять научных чтений памяти Ю.П. Булашевича. Материалы конференции*. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2019. С. 77–80.
32. Воронова Т.А., Глазнев В.Н., Муравина О.М. Результаты численного моделирования с целью оптимизации работы алгоритма инверсии гравитационного поля. *Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей. Материалы 47-й сессии Международного научного семинара Д.Г.Успенского - В.Н.Страхова*. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2020. С. 76–79.
33. Минц М.В., Глазнев В.Н., Раевский А.Б. Трёхмерная модель геологического строения верхней коры района Кольской сверхглубокой скважины и сопредельных территорий Кольского полуострова // *Геотектоника*. 1994. № 6. С. 3–22.
34. Глазнев В.Н., Минц М.В., Якуба И.А. Трёхмерная плотностная модель земной коры территории Республики Нигер // *Вестник Камчатской региональной организации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле*. 2021. № 4 (52). С. 6–21. DOI: <https://doi.org/10.31431/1816-5524-2021-4-52-6-21>
35. Муравина О.М., Глазнев В.Н., Воронова Т.А., Терентьев Р.А. Трёхмерная плотностная модель верхней коры в области сочленения Лосевского и Воронежского террейнов (Воронежский кристаллический массив) // *Вестник Камчатской региональной организации Учебно-научный центр. Серия: Науки о Земле*. 2021. Вып. 55. № 3. С. 45–57. DOI: <http://doi.org/10.31431/1816-5524-2022-3-55-45-57>

Approximation operator of the inverse gravimetric problem for a horizontal layer

©2023 V. N. Glaznev^{1, 2✉}, O. M. Muravina¹, A. B. Raevsky²

¹*Voronezh State University, 1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018, Russian Federation*

²*Geological Institute of the Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences
14 Fersmana ul., Apatity, 184209, Russian Federation*

Abstract

A method for solving the three-dimensional gravity inverse problem based on the use of an approximate operator of the inverse problem for a horizontal layer is considered. The construction of an approximate operator is made on the basis of an approximation of an exact analytical inverse operator for an infinite horizontal layer with a finite sum of simple discrete linear operators. The choice of the structure of the approximate inverse operator is given in spectral form, proceeding from the physical essence of the problem and taking into account the natural restrictions on the upper and lower frequency for the spectral representation of a discretely given field at the finite interval of its determination, in accordance with Kotelnikov's theorem. The calculation of the parameters of the approximate inverse operator is carried out on the basis of minimizing its deviation from the analytical value of the inverse operator for the horizontal layer, on the final number of points of the spectrum of these functions, which provides the required accuracy of the practical solution of the inverse gravity problem. Explicit approximation expressions for calculating the parameters of the inverse operator are given, depending on the ratio of the discrete step of setting the gravitational field and the thickness of the horizontal layer in which the solution of the inverse problem is searched. The general algorithm for the approximate solution of the three-dimensional inverse gravity problem based on the proposed inverse operator is implemented in the form of an iterative solution that takes into account information about the geometry of the studied medium and the initial approximation of density in the model. The essential points in solving the inverse problem are the a priori assessment of the permissible variations in the anomalous density of the desired solution and the three-dimensional weight function, which determines the measure of the reliability of the initial approximation for the medium under study. A brief description of the technology of practical application of the proposed approach to solving the inverse gravity problem in the study of the density structure of shields and the foundation of platforms is given.

Keywords: inverse gravity problem, approximation operator, iterative solution.

Funding: The study was supported by the Russian Foundation for Research, grant no. 23-27-00251

For citation: Glaznev V. N., Muravina O. M., Raevsky A. B. Approximation operator of the inverse gravimetric problem for a horizontal layer // *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Geologiya – Proceedings of Voronezh State University. Series: Geology*, 2023, no. 1, pp. 97–105. DOI: <https://doi.org/10.17308/geology/1609-0691/2023/1/97-105>

Conflict of interests: The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.



The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

✉ Viktor N. Glaznev, e-mail: glaznev@geol.vsu.ru

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Method reshenia necorrectnykh zadach* [Methods of solving incorrect problems]. Moscow, Nauka publ., 1979, 288 p. (In Russ.)
2. Tarantola A., Valette B. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least square criterion. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 1982, vol. 20, no 2, pp. 219–232. DOI: 10.1029/RG020i002p00219
3. Starostenko V.I. *Ustoychivye cislennye methody vye zadachakh gravimetriy* [Stable numerical methods in gravity problems]. Kyiv, Naukova Dumka publ., 1978, 228 p. (In Russ.)
4. Aleksidze M.A. *Priblizhennyye methody reshenia pryamykh yi obratnykh zadach gravimetriy* [Approximate methods of solving direct and inverse gravity problems]. Moscow, Nauka publ., 1987, 336 p. (In Russ.)
5. Starostenko V.I., Isaev V.I., Pyatakov Yu.V. Reshenie obratnoy zadachi gravimetriy dla kontaktov osadochnykh porod [Solution of the inverse problem of gravimetry for contacts of sedimentary rocks]. *Geofizicheskij zhurnal – Geophysical Journal*, 1993, vol. 15, no. 1, pp. 62–71. (In Russ.)
6. Akimova E.N., Vasin V.V., Perestoronina G.Ya., Timerkhanova L.Yu., Martyshko P.S., Koksharov D.E. Au regularion metodach reshenia obratnykh zadach gravimetriy na mnogoprocessornome vychyslytelnom komplexe [On regular methods of solving inverse gravimetry problems on a multiprocessor computational complex]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye – Computational Methods and Programming*, 2007, vol. 8, no. 1, pp. 103–112. (In Russ.)
7. Akimova E.N., Martyshko P.S., Misilov V.E. Algorithms reshenia structure zadachi gravimetriy vye mnogoslounoy srede [Algorithms for solving the structural problem of gravimetry in a multilayer environment]. *Doklady RAN – Doklady RAN*, 2013, vol. 453, no. 6, pp. 676–679. DOI: 10.7868/S0869565213360164 (In Russ.)
8. Martyshko P., Ladovskii I., Byzov D. Parallel algorithms for solving inverse gravimetry problems: application for earth's crust density models creation. *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 2966. DOI: 10.3390/math9222966
9. Novoselitsky V.M. K theory opredelenia ismenenia plotnosti vye gorizontalis plaste pau anomaliamus sila tyazhesti [To the theory of determining the change in density in the horizontal layer by anomalies of gravity]. *Fizika Zemli – Physics of the Earth*, 1965, no. 5, pp. 25–32. (In Russ.)
10. Cribb J. Application of the generalized linear inverse to the inversion of static potential data. *Geophysics*, 1976, vol. 41, no. 6, pp. 1365–1369. DOI: 10.1190/1.1440686
11. Savelova T.I. Ob optimalnoy regularization uravnenius tipa svertki so sluchaynymi pomechamy vye yadre yi pravoy chasti [On the optimal regularization of convolution-type equations with random interference in the kernel and the right part]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki – Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1978, vol. 18, no. 2, pp. 275–283. DOI: 10.1016%2F0041-5553%2878%2990032-0 (In Russ.)
12. Kobrunov A.I., Varfolomeev V.A. Ob odnom metode ϵ -ecvivalentnogo pereraspredelenia yi ego ispolzovania dla interpretation gravitacionalnogo polya [About one method of ϵ -equivalent redistribution and its use for the interpretation of the gravitational field]. *Fizika Zemli – Physics of the Earth*, 1981, no. 10, pp. 25–44. (In Russ.)
13. Raevskiy A.B. *Primenenie lineynykh transformation pri gravitacional modeliridae verkhney chasti zemnoy corri na kristallicheskih szczytakh (na primere zapadnogo rayona kolskogo poluostrova)* Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Application of linear transformations in gravitational modeling of the upper part of the earth's crust on crystalline shields (on the example of the western region of the Kola Peninsula). Diss. for academic step. cand. phys.-math. Sciences.]. Apatity, 1984, 102 p. (In Russ.)
14. Pedersen L.B. Relation between potential fields and some equivalent sources. *Geophysics*, 1991, vol. 56, no. 7, p. 961–971. DOI: 10.1190/1.1443129
15. Kobrunov A.I. *Mathematical osnovy theory interpretation geophysical dannykh* [Mathematical foundations of the theory of interpretation of geophysical data]. Moscow, TsentrLitNefteGaz publ., 2008, 288 p. (In Russ.)
16. Glaznev V.N., Raevsky A.B., Balagansky V.V., Manninen T. Trochmernaya model verkhney corri rayona kittila-sodankyla, Finnish Laplandia (sever Baltiyskogo shchita) [Three-dimensional model of the upper crust of the Kittila-Sodankylä region, Finnish Lapland (north of the Baltic shield)]. Cb. materialov, posvjashhjonnyj 40-letnemu jubileju kafedry geofiziki VGU [Collection of materials dedicated to the 40th anniversary of the Department of Geophysics of VSU]. Voronezh: VSU publ., 2002, pp. 11–20. (In Russ.)
17. Arzamastsev A.A., Glaznev V.N., Raevsky A.B., Arzamastseva L.V. Morphology and internal structure of the Kola alkaline intrusions, NE Fennoscandian Shield: 3D density modelling and geological implication. *Journal of Asian Earth Sciences*, 2000, vol. 18, no. 2, pp. 213–228. DOI: 10.1016/S1367-9120(99)00052-8
18. Glaznev V.N., Zhirova A.M., Raevsky A.B. Novye dannye au glubinnom stroenia Khibinsky yi Lovozersky massivov, Kolsky poluostrov [New data on the deep structure of the Khibiny and Lovozero massifs, Kola Peninsula]. *Doklady RAN – Doklady RAN*, 2008, vol. 422, no. 3, pp. 391–393. DOI: 10.1134/S1028334X08070349 (In Russ.)
19. Glaznev V.N., Mints M.V., Muravina O.M., Raevsky A.B., Osipenko L.G. Complex geological–geophysical 3D model of the crust in the southeastern Fennoscandian Shield: Nature of density layering of the crust and the crust–mantle boundary. *Geodynamics & Tectonophysics*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 133–170. DOI: 10.5800/GT-2015-6-2-0176
20. Glaznev V.N., Mints M.V., Muravina O.M. Plotnostnoye modeliridae zemnoy corri tsentralnoy chasti vostochno-yevropeyskoy platform [Density modeling of the earth's crust of the central part of the East European Platform]. *Vestnik Kamchatskoj regional'noj organizacii Uchebno-nauchnyj centr. Seriya: Nauki o Zemle – Vestnik of the Kamchatka Regional Organization Educational and Scientific Center. Series: Earth Science*, 2016, vol. 29, no. 1, pp. 53–63. (In Russ.)
21. Mints M.V., Glaznev V.N., Muravina O.M. Glubinnoye stroenie corri yugo-vostoka Voronezhsky kristallicheskogo mas-siva pau geophysical dannym: geodynamical evolution vye paleoproterozida yi sovremennoye sostoyaniye corri [Deep structure of the crust of the south-east of the Voronezh crystalline massif according to geophysical data: geodynamic evolution in paleoproterozoic and modern state of the crust]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Geologija – Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Series: Geology*, 2017, no. 4, pp. 5–23. (In Russ.)
22. Glaznev V.N., Zhavoronkin V.I., Muravina O.M., Antonova I.Yu., Voronova T.A., Chereshevskiy A.V., Kholin P.V. Stroenie verkhney corri Yeletsky uchastka Losevsky terrana (Voronezhsky kristallichesky massive) pau dannym plotnostnogo modeliridae [The structure of the upper crust of the Yeletsky section of the Losevsky territory (Voronezh crystalline array) according to density modeling]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Geologija – Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Series: Geology*, 2019, no. 3, pp. 74–83. (In Russ.)
23. Voronova T.A., Glaznev V.N., Muravina O.M., Antonova I.Y. The Density Model of the Crystalline Crust the Southwest-

- ern Part of the Lipetsk Region. *Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences: Practical and Theoretical Aspects of Geological Interpretation of Gravitational, Magnetic and Electric Fields*. Eds. D.Nurgaliev, N.Khairullina. Springer Nature Switzerland AG, 2019, pp. 69–76. DOI: 10.1007/978-3-319-97670-9_8
24. Mints M.V., Glaznev V.N., Muravina O.M., Sokolova E.Yu. 3D model of Svecofennian Accretionary Orogen and Karelia Craton based on geology, reflection seismics, magnetotellurics and density modelling: Geodynamic speculations. *Geoscience Frontiers*, 2020, vol. 11, no. 3, pp. 999–1023. DOI: 10.1016/j.gsf.2019.10.003
25. Voronova T.A., Muravina O.M., Glaznev V.N., Berezneva S.I. Trochmernaya plotnostnaya model verkhney corri vie oblasti sochleneniya Losevsky yi Donskogo terranov (Voronezhsky kristallichesky massive) [Three-dimensional density model of the upper crust in the region of articulation of Losevsky and Don terranes (Voronezh crystalline massif)]. *Vestnik Kamchatskoj regional'noj organizacii Uchebno-nauchnyj centr. Seriya: Nauki o Zemle – Vestnik of the Kamchatka Regional Organization Educational and Scientific Center. Series: Earth Sciences*, 2021, no. 1 (49), pp. 24–35. DOI: 10.31431/1816-5524-2021-1-49-24-35 (In Russ.)
26. Blakely R.J. Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge University Press, 1995, 461 p. DOI: 10.1017/CBO9780511549816
27. Vogel C.R. Computational methods for inverse problems. *Frontiers in Applied Mathematics SIAM*, 2002, 183 p. DOI: 10.1137/1.9780898717570
28. Fullagar P.K., Pears G.A., McMonnies B. Constrained inversion of geologic surfaces - Pushing the boundaries. *The Leading Edge*, 2008, vol. 27, no. 1, pp. 98–105. DOI: 10.1190/1.2831686
29. Glaznev V.N. *Complexniewu geophysical modelli lithosphere Fennoscandia* [Complex geophysical models of the lithosphere of Fennoscandia]. Apatity, KaM. publ., 2003, 252 p. (In Russ.)
30. Martyshko P.S., Prutkin I.L. Technology razdeleniya istochnikov gravitational polya pau glubine [Technology of separation of gravity field sources by depth]. *Geofizicheskij zhurnal – Geophysical Journal*. 2003, vol. 25, no. 3. pp. 159-169. (In Russ.)
31. Voronova T.A., Glaznev V.N., Muravina O.M. Testirovania approximation algorithms reshenia obratnoy zadachi gravimetry [Testing of the approximation algorithm for solving the inverse gravimetry problem]. Glubinnoe stroenie, geodinamika, teplovoe pole Zemli, interpretacija geofizicheskikh polej. Desjatye nauchnye chtenija pamjati Ju.P. Bulashevicha: [Deep structure, geodynamics, thermal field of the Earth, interpretation of geophysical fields. Tenth scientific readings in memory of Yu.P. Bulashevich]. Ekaterinburg, IGF UrO RAN publ., 2019, pp. 77–80. (In Russ.)
32. Voronova T.A., Glaznev V.N., Muravina O.M. Resultate chislenogo modelirida s tselyu optimization rabota algorithms inversion gravitational polya [Results of numerical modeling in order to optimize the work of the algorithm for inversion of the gravitational field]. *Voprosy teorii i praktiki geologicheskoy interpretacii geofizicheskikh polej: materials of the 47th session of the International Scientific Seminar of D.G. Uspensky–V.N. Strakhov* [Issues of theory and practice of geological interpretation of geophysical fields]. Voronezh, Nauchnaya kniga publ., 2020, pp. 76–79. (In Russ.)
33. Mints M.V., Glaznev V.N., Raevsky A.B. Trochmernaya model geologicheskogo stroenia verkhney corri rayona kolskoy superchubocke skvazhiny yi sopedelnykh territorium kolskogo poluoostrova [Three-dimensional model of the geological structure of the upper crust of the Kola ultra-deep well area and adjacent territories of the Kola Peninsula]. *Geotektonika – Geotectonics*. 1994, no. 6, pp. 3–22. (In Russ.)
34. Glaznev V.N., Mints M.V., Yakuba I.A. Trochmernaya plotnostnaya model zemnoy corri territories Respubliki Niger [Three-dimensional density model of the earth's crust of the territory of the Republic of Niger]. *Vestnik Kamchatskoj regional'noj organizacii Uchebno-nauchnyj centr. Seriya: Nauki o Zemle – Vestnik of the Kamchatka Regional Organization Educational and Scientific Center. Series: Earth Sciences*, 2021, no. 4 (52), pp. 6–21. DOI: 10.31431/1816-5524-2021-4-52-6-21 (In Russ.)
35. Muravina O.M., Glaznev V.N., Voronova T.A., Terent'ev R.A. Trochmernaya plotnostnaya model verkhney corri vie oblasti sochleneniya Losevsky yi Vorontsovsky terranov (Voronezhsky kristallichesky massive) [Three-dimensional density model of the upper crust in the region of articulation of Losevsky and Vorontsovsky terranes (Voronezh crystalline massif)]. *Vestnik Kamchatskoj regional'noj organizacii Uchebno-nauchnyj centr. Seriya: Nauki o Zemle – Vestnik of the Kamchatka Regional Organization Educational and Scientific Center. Series: Earth Sciences*, 2021, vol. 55, no 3, pp. 45–57. DOI: 10.31431/1816-5524-2022-3-55-45-57 (In Russ.)

Глазнев Виктор Николаевич – Воронежский государственный университет, заведующий каф. геофизики, Геологический институт КНЦ РАН г. Апатиты, главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук; e-mail: glaznev@geol.vsu.ru; ORCID <https://orcid.org/0000-0002-1016-1866>

Муравина Ольга Михайловна – Воронежский государственный университет, профессор кафедры геофизики, доктор технических; e-mail: muravina@geol.vsu.ru; ORCID <https://orcid.org/0000-0003-4772-0825>

Раевский Алексей Борисович – Геологический институт КНЦ РАН г. Апатиты, ведущий научный сотрудник, кандидат физико-математических наук; e-mail: raevsky@geoksc.apatity.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Viktor N. Glaznev – Voronezh State University, head of the каф. Geophysics, Geological Institute of KSC RAS, Apatity, Chief Researcher, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: glaznev@geol.vsu.ru; ORCID <https://orcid.org/0000-0002-1016-1866>

Olga M. Muravina – Voronezh State University, Professor of the Geophysical Chair, Doctor of Technical Sciences; e-mail: muravina@geol.vsu.ru; ORCID <https://orcid.org/0000-0003-4772-0825>

Alexey B. Raevsky – Geological Institute of KSC RAS, Apatity, Leading Researcher, Candidate of Physical and Mathematical Sciences; e-mail: raevsky@geoksc.apatity.ru

Authors have read and approved the final manuscript.