

Вычислительные аспекты моделирования аномалий силы тяжести системой точечных масс

©2023 А. С. Долгаль[✉], П. Н. Новикова

Горный институт УрО РАН, Сибирская, 78а, 614007, Пермь, Российская Федерация

Аннотация

Введение: Рассматривается аппроксимация гравитационных аномалий Буге системой эквивалентных источников при региональных геофизических исследованиях. Значения поля заданы в узлах регулярной сети точек на поверхности шарообразной Земли – сферы Каврайского. Каждому узлу соответствуют 4 параметра: широта, долгота, геодезическая высота и первая радиальная производная гравитационного потенциала. Под всеми узлами сети располагаются точечные массы. Значения масс определяются путем приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений.

Методика: Исходными материалами являлись две глобальные модели гравитационного поля в редукции Буге WGM2012 и рельефа земной поверхности ETOPO1 в системе геодезических параметров WGS84 для Курильской островной дуги и прилегающих акваторий. Разрешение моделей составляло 1° и 20'. Район исследований ограничен координатами 40°–54°с.ш., 142°–162°в.д., его площадь составляет около 2.4 млн км². Выполнялись оценки обусловленности матриц коэффициентов систем уравнений при разных глубинах размещения эквивалентных источников. При расчете чисел обусловленности использовались метод Шульца второго порядка и новый разработанный авторами метод, не требующий вычисления обратной матрицы в явном виде. Последний базируется на подходе Хагера к оценке норм обратной матрицы на основе имеющихся коэффициентов системы. Он предназначен для работы с данными большой размерности. Продемонстрирована близость чисел обусловленности, вычисленных двумя разными методами для матриц размером 314×314 и 2623×2623, соответственно. Выполнялось сопоставление скорости вычислений при разных глубинах размещения точечных масс. Также проводилась экспериментальная оценка влияния ошибок округления и помех в исходных данных на вектор решения системы.

Результаты и обсуждение: Представлены количественные оценки норм матриц коэффициентов и чисел обусловленности различных аппроксимационных конструкций. Отмечается резкое увеличение чисел обусловленности при погружении источников на глубину, превышающую шаг сети задания поля по широте. Это сопровождается снижением скорости итерационного метода Зейделя при решении систем уравнений. Выявлена высокая устойчивость численного решения систем уравнений, предположительно обусловленная саморегуляризацией. Поэтому при моделировании региональных аномалий силы тяжести дополнительные методы регуляризации могут не использоваться. Рекомендовано в условиях низких и средних широт при формировании аппроксимационной конструкции соблюдать приближенное равенство между шагом сети по меридиану и глубинами точечных масс.

Заключение: Исследованы специфические особенности решения систем уравнений, возникающих при истокообразной аппроксимации аномалий силы тяжести на сфере Каврайского. Полученные



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

[✉] Долгаль Александр Сергеевич, e-mail: asdolgal@inbox.ru

результаты позволят повысить точность и скорость расчета трансформант аномального гравитационного поля больших территорий.

Ключевые слова: гравитационное поле, эквивалентные источники, система уравнений, матрица коэффициентов, норма, число обусловленности, сфера Каврайского, трансформация.

Источник финансирования. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-27-00113, <https://rscf.ru/project/23-27-00113/>

Для цитирования: Долгаль А.С., Новикова П.Н. Вычислительные аспекты моделирования аномалий силы тяжести системой точечных масс // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Геология.* 2023. № 2. С. 82-93. DOI: <https://doi.org/10.17308/geology/1609-0691/2023/2/82-93>

Введение

В гравиметрии для моделирования геопотенциала V Земли используются шаровые функции с набором эмпирических гармонических коэффициентов, системы точечных масс, сферическое вейвлет-разложение. Для решения геологических задач также осуществляется построение аналитических моделей аномального гравитационного поля U в редукции Буге, в т.ч. с использованием системы точечных масс (истокообразная аппроксимация) [1–3]. При этом используется приближение поля U теоретическим полем U^* , представляющим собой совокупный аномальный эффект элементарных тел, обладающих соответствующими массами. Эффективные вычислительные схемы, реализующие истокообразную аппроксимацию, были предложены в 1967 году В. И. Ароновым и независимо в 1968 году норвежским исследователем А. Бьерхаммаром [4]. Выдающимися достижениями В. И. Аронова являются:

- доказательство теоремы о существовании простого слоя, находящегося внутри замкнутой поверхности S , аномальный эффект которого с точностью до любого сколь угодно малого ε приближает потенциальное поле, заданное на этой поверхности;
- обоснование замены простого слоя на эквивалентную систему точечных масс, поле U^* которых рассчитывается существенно быстрее;
- создание аппроксимационной конструкции с расположением эквивалентных источников на конкордантной рельефу поверхности [1].

Процесс аппроксимации аномалий силы тяжести $\mathbf{u} = \{u_i\}, i = \overline{1, N}$ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с приближенно заданной правой частью вида:

$$\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{u}, \quad (1)$$

где \mathbf{m} – вектор неизвестных значений масс размерностью N , \mathbf{G} – квадратная матрица значений гравитационных эффектов размером $N \times N$ для точечного источника (шара) с единичной массой ($m = 1$). Результаты исследований обусловленности СЛАУ большой размерности вида (1) в зависимости от глубины размещения эквивалентных источников, а также анализ структуры матрицы коэффициентов \mathbf{G} были представлены в работах [5, 6]. При этом использовалась традиционная для гравиразведки модель "плоской Земли" и отвечающая ей прямоугольная система координат $\sum xuz$.

Аномалии силы тяжести отождествлялись с вертикальной производной V_z гравитационного потенциала V , которую обычно принято обозначать Δg .

При истокообразной аппроксимации региональных гравитационных аномалий требуется модель "сферообразной Земли", в которой используется сферическая система координат $\sum r\varphi\lambda$ и радиальная производная V_R гравитационного потенциала V или глобальная прямоугольная система координат $\sum XYZ$ и нормальная (по отношению к земному эллипсоиду) составляющая поля V_n [7, 8]. Установлено, что различия аномалий V_R и V_z для листа карты 1:1 000 000 масштаба составляют 3–5%. Аномалии V_R и V_n отличаются не более, чем на 0.05% в пределах более значительных по размерам площадей [9]. Поэтому достаточно проводить моделирование гравитационного поля больших территорий в рамках сферического приближения формы Земли, выполняя замену геодезических координат B, L сферическими φ, λ . При построении геоплотностных моделей больших территорий этот прием давно и успешно используется [10, 11].

В статье будут приведены экспериментальные результаты оценки обусловленности и устойчивости решения СЛАУ вида (1) для модели «сферообразной Земли». Элементами матрицы \mathbf{G} коэффициентов системы уравнений в этом случае являются значения радиальной производной гравитационного потенциала точечного источника с единичной массой:

$$V_R(R_0, \varphi_0, \lambda_0) = f(R_0 - r \cos \omega) / r_0^3, \quad (2)$$

где $f = 6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – гравитационная постоянная, $R_0, \varphi_0, \lambda_0$ – координаты точки измерений, r, φ, λ – координаты источника, $r_0 = \sqrt{R_0^2 + r^2 - 2R_0r \cos \omega}$, ω – угол при центре O земного шара между точкой измерений и источником: $\cos \omega = \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)$ [8]. Источники располагаются на одинаковых относительных глубинах R^* под точками задания поля (рис. 1). Для преобразования координат используется формула Каврайского:

$$90^\circ - B + 8'39'' \sin 2B, \quad \lambda = L. \quad (3)$$

Ее применение при радиусе Земли $R_{зем} = 6372.9$ км позволяет снизить относительные погрешности в расстояниях до 0.08% и в угловых величинах до 0.1% [12].

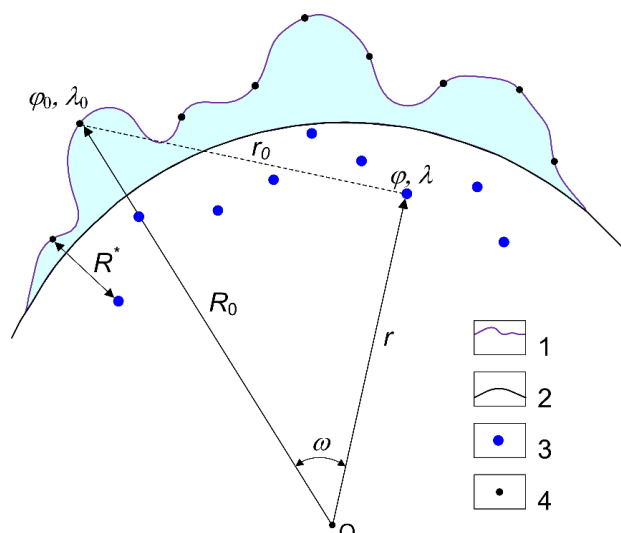


Рис. 1. Размещение эквивалентных источников при моделировании аномалий силы тяжести на сферической Земле: 1 – земная поверхность (рельеф); 2 – уровенная поверхность (сфера); 3 – точечные массы; 4 – гравиметрические пункты.

[Fig. 1. Placement of equivalent sources in the simulation of gravity anomalies on a spherical Earth: (1) – the earth's surface (relief); (2) – level surface (sphere); (3) – material points; (4) – gravimetric points.]

Оценка обусловленности матриц коэффициентов методом Шульца

В большинстве практических случаев порядок СЛАУ (1) составляет $N = 10^4 - 10^6$, что влечет за собой необходимость использования приближенных итерационных методов для ее решения [13]. Точность коэффициентов в матрице \mathbf{G} зависит только от ошибок округления – обычно это 7–20 значащих цифр. Правая часть системы \mathbf{u} , включающая в себя погрешности наблюдений и редуцирования, обычно содержит не более 5–6 значащих цифр. Регулярный шаг задания значений поля V_R в градусной мере ($\Delta\varphi = const, \Delta\lambda = const$) за счет сближения меридианов не отвечает равным расстояниям между точками, находящимися на линиях с различной широтой φ .

Обусловленность матрицы коэффициентов СЛАУ является важнейшей характеристикой, определяющей сложность процесса ее решения и точность полученных результатов [14, 15]. Число обусловленности (H -число Тодда) матрицы \mathbf{G} :

$$cond \mathbf{G} = \nu_G = \|\mathbf{G}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{G}\| \quad (4)$$

определяет влияние τ неточностей $\Delta\mathbf{u}$ в задании исходных данных на окончательный результат [13]:

$$\tau = \|\Delta\mathbf{m}\|/\|\mathbf{m}\| = \nu_G \|\Delta\mathbf{u}\|/\|\mathbf{u}\| \quad (5)$$

Напомним, что минимально возможная величина $\nu_G = 1$, СЛАУ с высокими значениями $\nu_G \gg 1$ называют плохо обусловленными. Для характеристики матрицы \mathbf{G} употреблялись следующие нормы [13], согласованные с соответствующими нормами в пространстве векторов \mathbf{m} :

$$\|\mathbf{G}\|_\infty = \max_i (\sum_j |g_{ij}|), \quad (6)$$

$$\|\mathbf{G}\|_1 = \max_j (\sum_i |g_{ij}|), \quad (7)$$

$$\|\mathbf{G}\|_f = \sqrt{\sum_i \sum_j (g_{ij})^2}. \quad (8)$$

Напомним, что понятие согласованности подразумевает выполнение условия $\|\mathbf{G}\| = \sup \|\mathbf{G}\mathbf{m}\|/\|\mathbf{m}\|$ при $\mathbf{m} \neq 0$. Для обращения матрицы \mathbf{G} использовался итерационный метод Шульца второго порядка [16]. Суть его заключается в поиске обратной матрицы \mathbf{G}^{-1} построением ее последовательных приближений $\mathbf{U}^{(0)}, \mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(k)}, \dots$ с контролем невязки по величине $\|\Psi^k\|$, где $\Psi^k = \mathbf{E} - \mathbf{G}\mathbf{U}^{(k)}$. В качестве начального приближения $\mathbf{U}^{(0)}$ авторами использовалась транспонированная матрица \mathbf{G}^T , умноженная на число $\alpha = 10^{-7}$: $\mathbf{U}^{(0)} = \alpha \mathbf{A}^T$. Итерационный процесс выглядит следующим образом:

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} \cdot \{\mathbf{E} + \Psi^k + [\Psi^k]^2\}. \quad (9)$$

Сходимость процесса (9) доказана для $\|\Psi^0\| < 1$, но применительно к данному классу задач метод Шульца оказался работоспособным даже при $\|\Psi^0\| \approx 20$. Критерием завершения процесса являлось значение нормы Фробениуса невязки $\|\Psi^k\|_f \leq 0.001$.

В качестве примера рассмотрим район Курильской островной дуги (КОД) – территорию, расположенную в пределах $40^\circ - 54^\circ$ с.ш., $142^\circ - 162^\circ$ в.д. с площадью ~ 2.4 млн км² (рис. 2). В качестве исходных данных использовались глобальные модели гравитационного поля в редукции Буге WGM2012 [17, 18] и рельефа земной поверхности ETOPO1 [19] в системе геодезических параметров Земли WGS84. В модель включены поправки за влияние топографических масс, рассчитанные по цифровой модели рельефа ETOPO1, а также влияние атмосферных масс.

В данном случае анализировались гравитационные аномалии в полной редукции Буге с плотностью промежуточного слоя 2.67 г/см³ с разрешением в 1° ($N = 314$), что связано со значительными вычислительными сложностями при реализации процесса (7). Для аппроксимации аномалий силы тяжести в районе КОД были выбраны 5 разных глубин R^* источников поля, отвечающие расстояниям: между точками на северной рамке площади – 65.6 км; между точками на

южной рамке площади – 85.4 км; между точками по меридиану – 111.3 км; между точками по меридиану, увеличенному в 1.5 раза – 167.3 км; между точками по меридиану, увеличенному в 2 раза – 222.6 км. Размер

соответствующих матриц \mathbf{G} составил 314×314 . Нормы матриц \mathbf{G} и \mathbf{G}^{-1} , а также числа обусловленности ν_G соответствующих СЛАУ (для нормы $\|\mathbf{G}\|_1$) приведены в табл. 1.

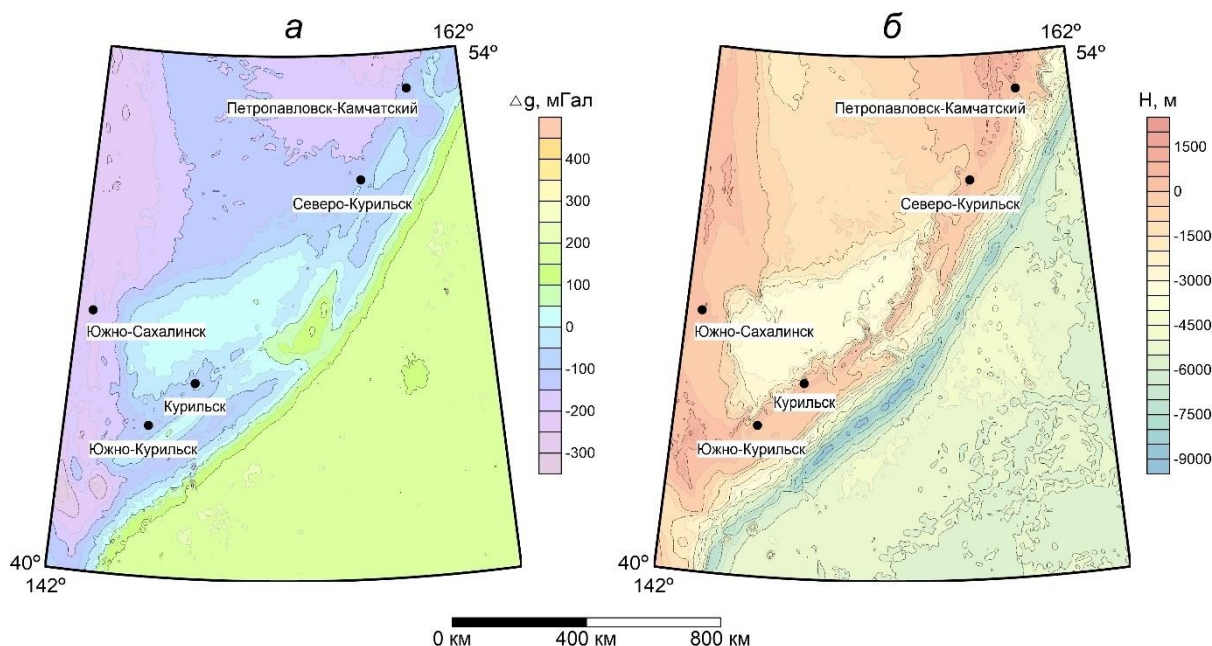


Рис. 2. Исходные данные: *a* – карта изоаномал силы тяжести в редукции Буге; *б* – карта изогипс рельефа земной поверхности.

[Fig. 2. Initial data: (a) – map of isoanomalies of gravity in Bouguer reduction; (b) – isohypse map of the relief of the earth's surface.]

Табл. 1. Характеристика матриц коэффициентов СЛАУ при разных глубинах размещения источников ($N = 314$) [Table 1. Coefficient matrices characteristics of system of linear algebraic equations at different source depths ($N = 314$)]

R^* , км	$\ \mathbf{G}\ _\infty$	$\ \mathbf{G}\ _1$	$\ \mathbf{G}\ _f$	$\ \mathbf{G}^{-1}\ _\infty$	$\ \mathbf{G}^{-1}\ _1$	$\ \mathbf{G}^{-1}\ _f$	ν_G
65.6	0.0008	0.0008	0.0046	11112	11110	98605	8.9
85.4	0.0008	0.0008	0.0030	34841	34938	242553	28
111.3	0.0007	0.0007	0.0022	138376	138125	717394	96.7
167.3	0.0007	0.0007	0.0014	2961150	2959043	8953273	2071
222.6	0.0006	0.0006	0.0011	64200736	64102202	126064307	38461

Отмечается закономерное увеличение числа обусловленности ν_G с ростом относительных глубин R^* , влияние которого на процесс решения СЛАУ можно оценить непосредственными расчетами. Исходное поле не содержит помех негармонического характера, что допускает решение всех 5 систем уравнений итерационным методом Зейделя [20] с точностью $\varepsilon = \|\mathbf{Gm} - \mathbf{u}\|_{L^2} \leq 0.001$ мГал. Количество итераций при изменении глубин R^* в диапазоне 65.6–222.6 км, необходимое для достижения заданного значения ε , увеличилось с 27 до 2313 (рис. 3).

В. И. Ароновым установлено, что для повышения точности трансформации гравитационного поля желательно увеличивать глубины эквивалентных источников R^* [1]. Однако с ростом R^* резко ухудшается обусловленность матрицы \mathbf{G} , что существенно затрудняет решение СЛАУ (1). Компромиссом является формирование аппроксимационных конструкций, удовле-

творяющих условию $\nu_G \cong 100$. При работе в низких и средних широтах при $\Delta\varphi = \Delta\lambda = const$ можно ориентироваться на глубину $R^* \approx \Delta\varphi R_{зем}$.

Оценка обусловленности матриц коэффициентов большой размерности

Если величина ν_G велика, то это не является строго достоверным утверждением, что малые возмущения матрицы \mathbf{G} и правой части \mathbf{u} могут привести к значительным отклонениям $\Delta\mathbf{m}/\mathbf{m}$ между полученным и точным решениями СЛАУ [21]. Размерность подавляющего большинства практических задач истокообразной аппроксимации такова, что формирование обратной матрицы \mathbf{G}^{-1} связано с большими вычислительными затратами. Следует полностью согласиться с мнением о том, что если «не требуется явного выражения для элементов \mathbf{A}^{-1} , мы настоятельно рекомендуем их не вычислять» [22].

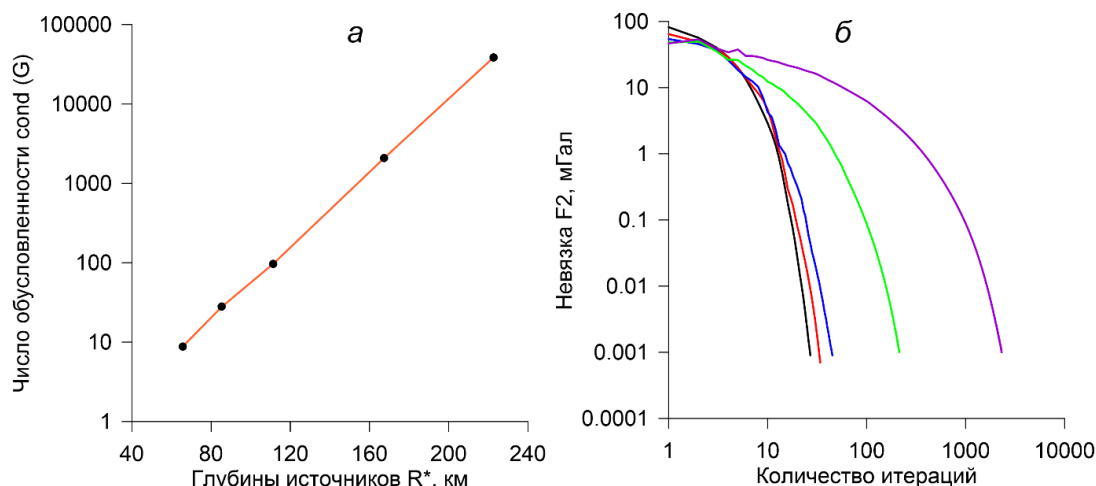


Рис. 3. Характеристики обусловленности матриц коэффициентов \mathbf{G} (а) и итерационных процессов решения СЛАУ (б) для разных глубин R^* размещения точечных масс: $R^*=65.6$ км (черный график); $R^*=85.46$ км (красный график); $R^*=111.3$ км (синий график); $R^*=167.3$ км (зеленый график); $R^*=222.6$ км (фиолетовый график).

[Fig. 3. Conditioning characteristics of coefficient matrices \mathbf{G} (a) and iterative processes for solving system of linear equations (b) for different depths R^* of placement of material points: $R^*=65.6$ km (black graph); $R^*=85.46$ km (red graph); $R^*=111.3$ km (blue graph); $R^*=167.3$ km (green graph); $R^*=222.6$ km (purple graph).]

В статье [23] Хагер (Hager) опубликовал метод оценки числа обусловленности матрицы, который получил свое дальнейшее развитие в работах Хагхама (Higham) [24, 25]. Хагер предложил осуществлять оценки норм обратной матрицы на основе матрицы коэффициентов СЛАУ. На основе этого подхода российскими учеными А. Н. Рогалевым, С.В. Дорониным разработано несколько алгоритмов вычисления оценки $\gamma \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|$ для заданной матрицы $\mathbf{A} \in R^{N \times N}$ [26]. Ниже будут показаны возможности одного из этих алгоритмов при работе с аномалиями силы тяжести в районе КОД при числе точек поля $N = 314$.

Если обозначить:

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2N} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} \dots & b_{NN} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

то по определению обратной матрицы:

$$\mathbf{G} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} \dots & b_{2N} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} \dots & b_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Для каждого столбца обратной матрицы будет выполняться равенство:

$$\mathbf{G} \cdot \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \dots \\ b_{ii} \\ \dots \\ b_{Ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

В работе [26] предлагается проводить решение

систем вида (12) N раз, находя все столбцы обратной матрицы, а затем вычислять ее норму (6)–(8). Число обусловленности ν_G определяется по формуле (4).

С физической точки зрения при решении системы (12) мы выполняем аппроксимацию точечной аномалии с амплитудой 1 мГал, расположенной на сравнительно большой территории S , системой точечных масс. При любом местоположении такой аномалии будет выполняться интегральное соотношение $\iint_{\infty}^{\infty} \Delta g(x, y) dS = 2\pi f M$ между гравитационным полем Δg и эффективными массами M . Экспериментально установлено, что во всех случаях $i = \overline{1, N}$ суммы $M = \sum_{j=1}^{j=N} b_{ji}$ близки между собой, поэтому для оценки $\|\mathbf{G}^{-1}\|_1$ достаточно однократно осуществить аппроксимацию (12). Нужно отметить, что аномальные значения масс сосредоточены в небольшой области с размерами около 3–4 шагов сети задания поля (рис. 4).

В табл. 2 приведены значения оценок γ нормы $\|\mathbf{G}^{-1}\|_1$ обратной матрицы коэффициентов, хорошо совпадающие с ранее полученными результатами методом Шульца (рис. 5).

Вычислительные затраты предлагаемого метода сопоставимы с выполнением единичного цикла искообразной аппроксимации, поэтому он может быть реализован для СЛАУ большой размерности. В табл. 3 приведены результаты метода для этой же территории, включающей в себя КОД, при шаге задания поля 20' ($N = 2623$). Глубины размещения точечных масс отвечали расстояниям: между точками на северной рамке площади – 21.9 км; между точками на южной рамке площади – 28.5 км; между точками по меридиану – 37.1 км; между точками по меридиану, увеличенному в 1.5 раза – 55.7 км; между точками по меридиану, увеличенному в 2 раза – 74.2 км.

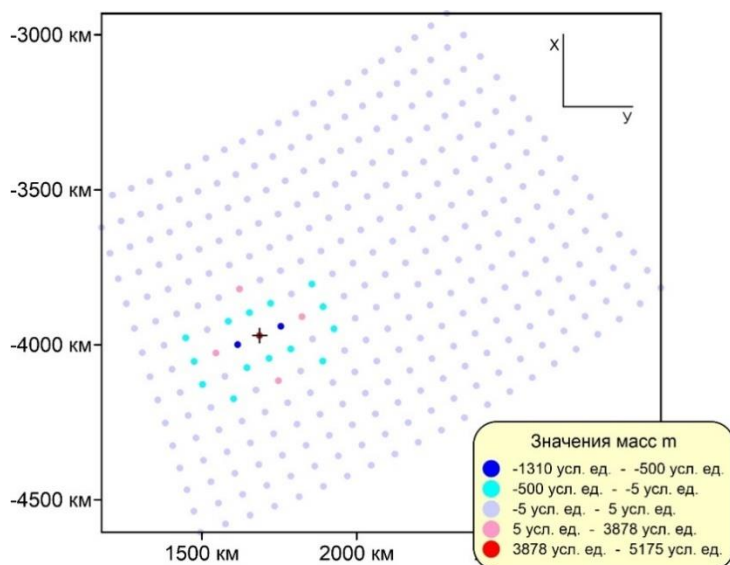


Рис. 4. Результат аппроксимации точечной аномалии гравитационного поля амплитудой 1 мГал в глобальной геоцентрической системе координат. Примечание: местоположение аномалии показано крестиком.

[**Fig. 4.** The result of approximation of a point gravity field anomaly with an amplitude of 1 mGal in the global geocentric coordinate system. *Note:* The location of the anomaly is indicated by a cross.]

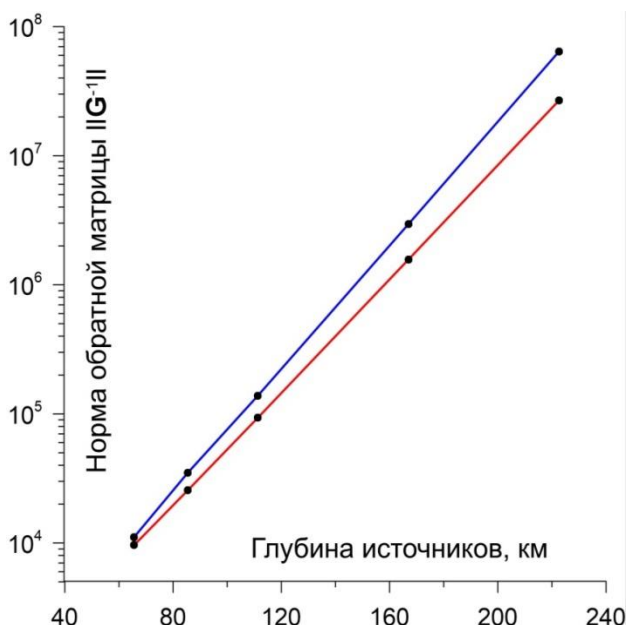


Рис.5. Сопоставление результатов определения $\|G^{-1}\|_1$, полученных методом Шульца (синий цвет) и путем аппроксимации точечной аномалии амплитудой 1 мГал (красный цвет).

[**Fig. 5.** Comparison of the determination results $\|G^{-1}\|_1$ obtained by the Schulz method (blue color) and by a point anomaly approximating with an amplitude of 1 mGal (red color).]

Табл. 2. Значения оценок нормы $\gamma \leq \|G^{-1}\|_1$ обратной матрицы коэффициентов СЛАУ ($N = 314$)

[**Table 2.** Values of norm estimates $\gamma \leq \|G^{-1}\|_1$ of the inverse matrix coefficients of system of linear algebraic equations ($N = 314$)

R^* , км	65.6	85.4	111.3 км	167.3	222.6
γ	9633	25589	93309	1571305	26795299

Табл. 3. Значения оценок нормы $\gamma \leq \|G^{-1}\|_1$ обратной матрицы коэффициентов СЛАУ ($N = 2623$)

[**Table 3.** Values of norm estimates $\gamma \leq \|G^{-1}\|_1$ of the inverse matrix coefficients of system of linear algebraic equations ($N = 2623$)

R^* , км	21.9	28.5	37.1	55.7	74.2
γ	1091	2887	10271	167366	2717253

Можно видеть, что полученные значения оценок γ примерно на один десятичный порядок ниже по сравнению с данными табл. 2. Однако значения нормы $\|G\|_1$ в этом случае примерно в 10 раз больше, поэтому принципиальных различий в числах обусловленности ν_G для моделей гравитационного поля с разрешением 1° и $20'$ не выявлено (рис. 6). Нужно подчеркнуть, что в обоих случаях сохранялись одинаковые соотношения между параметрами сети задания поля и глубинами эквивалентных источников R^* .

Оценка устойчивости решения СЛАУ с использованием вектора ошибки

Широко известно, что большое число обусловленности является более важным критерием «плохой СЛАУ», чем малость определителя матрицы коэффициентов или ее большой порядок [15]. Они часто используются как средства априорной оценки ошибок при решении СЛАУ. Иногда числа обусловленности могут давать значительно завышенные характеристики относительной погрешности $\tau(5)$ решения СЛАУ [27]. Значения ν_G можно считать оценкой сверху устойчивости получаемых решений относительно помех в исходных данных Δu .

Однако существуют и другие подходы, использующие анализ вектора ошибки Δm в значениях неизвестных. Авторы полностью разделяют точку зрения Е. В. Боловина и А. С. Глазырина о том, что «система уравнений считается хорошо обусловлен-

ной, если малые изменения в коэффициентах матрицы или в правой части вызывают малые изменения в решении» [28]. Эти изменения могут быть связаны с погрешностью округления, величина ко-

торой определяется двумя факторами: точностью представления вещественных чисел в ЭВМ и чувствительностью данного алгоритма к погрешностям округления.

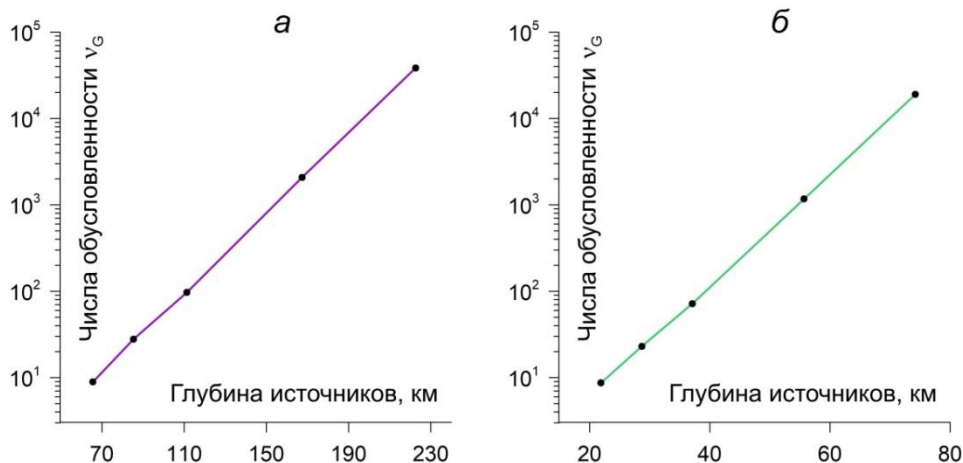


Рис. 6. Числа обусловленности матриц коэффициентов СЛАУ для моделей гравитационного поля с разрешением 1° (фиолетовый цвет) и 20' (зеленый цвет).

[Fig. 6. Condition numbers of coefficient matrices of system of linear equations for gravitational field models with resolution 1° (purple) and 20' (green).]

Для экспериментальной оценки влияния ошибок округления проводились два цикла расчета с использованием одних и тех исходных данных по району КОД. В данном случае сеть значений поля и высот сгущена до 20'×20' (матрицы 61 строка, 43 столбца). В первом случае для представления вещественных чисел и массивов использовался тип single (4 байта, 7–8 значащих цифр), во втором – тип double (8 байт, 15–16 значащих цифр). Глубина источников $R^* = \Delta\varphi = 37.1$ км, для решения использовался метод Зейделя. В обоих случаях за 54 итерации была достигнута точность аппроксимации ~0.0009 мГал в евклидовой метрике. Средняя относительная погрешность определения значений масс эквивалентных источников $\approx 0.002\%$. При этом максимальное по модулю расхождение в значениях гравитационного поля V_R , пересчитанного на высоту 100 км с использованием single и double типов составляет всего 0.001 мГал. Диапазон изменения поля V_R на этой высоте составляет [-148, 142] мГал.

Для этого же набора данных рассмотрим другой вариант оценки погрешностей округления [13] – умножение правой части системы (1) на $\sqrt[3]{3}$. Относительные различия в значениях неизвестных масс $\Delta\mathbf{m}/\mathbf{m}$, полученных в двух циклах решения СЛАУ (при использовании в качестве исходных данных поля \mathbf{u} и $\sqrt[3]{3}\mathbf{u}$) не превышают 0.014%. Следовательно, чувствительность алгоритма к погрешностям округления не слишком высокая.

Выполним решения серии СЛАУ при наличии наложенной нормально распределенной помехи $\Delta\mathbf{u}$ в правой части, характеризующейся среднеквадратическим отклонением (СКО) 0.015, 0.15, 1.5 мГал, что

составляет примерно 0.01%, 0.1% и 1% от дисперсии самого поля \mathbf{u} , соответственно. При этом возникают относительные ошибки в определении масс $\Delta\mathbf{m}/\mathbf{m}$ системы точечных источников ~0.12%, 1.2% и 12%, превышающие изменения относительные поля примерно в 10 раз. Однако специфика задачи аппроксимации заключается в том, что отклонения в значениях неизвестных масс (вектор ошибки $\Delta\mathbf{m}$) не представляют практического интереса, важна оценка отвечающих им аномальных эффектов при последующим вычислении трансформант. Для модели масс, полученной при помехе 0.1%, результаты пересчета гравитационного поля в верхнее полупространство на высоту 100 км оказываются очень слабо «зашумленными»: отличия от точных значений лежат в диапазоне от -0.003 до 0.004 мГал при СКО ~0.001 мГал. Для помехи в 1% величина невязки возрастает до 0.09 мГал, что также весьма незначительно по сравнению с точностью самой модели поля.

В работе [28] предлагается проводить оценку обусловленности СЛАУ на основе соответствия малых изменений в коэффициентах матрицы (в нашем случае \mathbf{G}), которым должны отвечать малые изменения в решении (в нашем случае это массы \mathbf{m}). Малыми изменениями считаются изменения, составляющие 0.1% от самих значений. Согласно такому критерию рассматриваемая в данном разделе СЛАУ ($R^* = \Delta\varphi = 37.1$ км) является плохо обусловленной. Контраргументом является известный факт отсутствия четких границ между хорошо и плохо обусловленными системами уравнений [29].

В целом можно говорить о том, что полученные решения СЛАУ являются достаточно устойчивыми, т.к. ошибки округления и наличие помех не приводят

к коренным изменениям результатов численных расчетов. Инструментом для этих расчетов служил итерационный метод Зейделя, в котором накопление ошибок округления обычно не играет заметную роль. Кроме того, по мнению авторов, для данного класса задач отмечается эффект саморегуляризации – регулирующего влияния соотношения k между шагом сети Δ и относительной глубиной R^* источников поля [30, 31]. Предположительно, механизм саморегуляризации решения в данном случае обусловлен тем, что итерационный процесс решения СЛАУ (1) эквивалентен работе фильтра низких частот, полоса пропускания которого регламентируется количеством итераций n , а крутизна частотной характеристики – пара-

метром k аппроксимационной конструкции $k = R^*/\Delta$, где R^* – глубина точечных масс, Δ – шаг сети задания поля. Для 2D случая процесс фильтрации в спектральной области выглядит следующим образом [32]:

$$\psi^{(n)}(\omega, r^*) = 1 - (1 - e^{-|\omega|R^*})^n \quad (13)$$

и представлен графически на рис. 7. Соответственно, линейный обратный оператор G^{-1} при численном решении задачи (1) всегда будет ограниченным. Нужно отметить, что явление саморегуляризации выявлено при решении многих естественно-научных задач, в частности – интегральных уравнений Вольтерры I рода в дискретном виде [31].

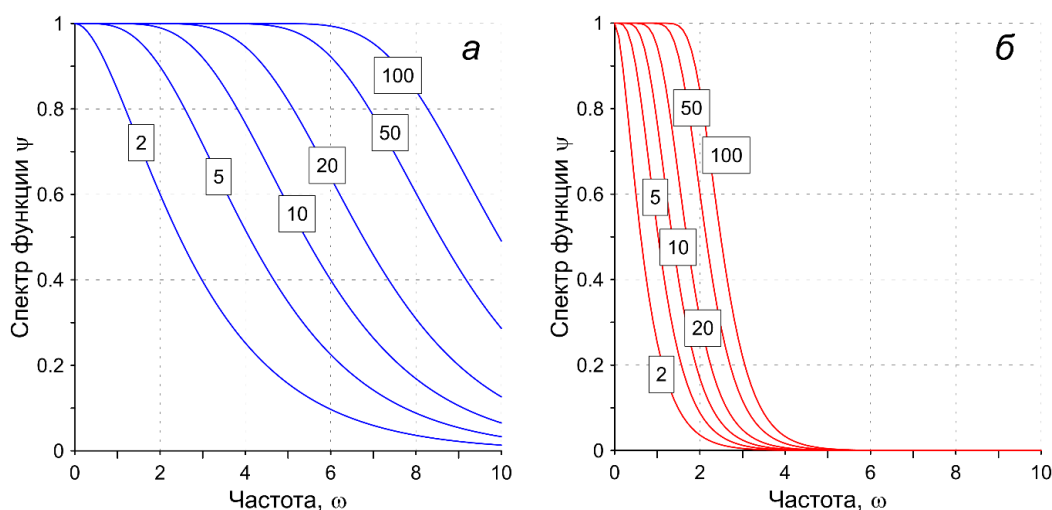


Рис. 7. Частотные характеристики процесса истокообразной аппроксимации при разных параметрах системы точечных масс: $k = 0.5$ (а); $k = 2$ (б).

[Fig. 7. Frequency characteristics of the source wise approximation process for different parameters of the system of material points: $k = 0.5$ (a); $k = 2$ (b).]

Закключение

Модель «сферической Земли» позволяет осуществлять высокоточный расчет трансформант аномального гравитационного поля с использованием системы точечных масс и геодезических координат точек задания поля. Основные сложности возникают при истокообразной аппроксимации поля и связаны с необходимостью решения СЛАУ большой размерности ($N = 10^4 - 10^6$) с приближенно заданной правой частью. Точность и скорость решения этих СЛАУ зависят от их обусловленности.

Выполнены оценки обусловленности матриц \mathbf{G} коэффициентов СЛАУ при разных глубинах размещения эквивалентных источников для района КОД. При вычислении чисел обусловленности $\nu_G = \|\mathbf{G}\|_1 \|\mathbf{G}^{-1}\|_1$ использовалось обращение матрицы методом Шульца. Предложен эффективный метод приближенного определения нормы $\|\mathbf{G}^{-1}\|_1$ без вычисления обратной матрицы в явном виде. Метод может применяться к задачам большой размерности, т.к. затраты машинного времени на его реализацию сопоставимы с временем приближенного решения СЛАУ (1) для тех же цифровых данных.

Выявлено резкое увеличение ν_G для цифровых моделей аномального гравитационного поля с постоянным шагом $\Delta\varphi = \Delta\lambda = const$ при погружении источников на глубину $R^* > \Delta\varphi$. Это увеличение существенно сказывается, в первую очередь, на скорости приближенного решения СЛАУ итерационными методами, поэтому в условиях низких и средних широт (до 60°) при формировании аппроксимационной конструкции желательно соблюдать условие $R^* \approx \Delta\varphi$.

Вычислительные эксперименты показали достаточно высокую устойчивость численного решения СЛАУ, возникающих при истокообразной аппроксимации, предположительно обусловленную саморегуляризацией. Поэтому, по мнению авторов, применение сложных регуляризованных алгоритмов решения СЛАУ не является необходимым условием при моделировании аномалий силы тяжести в региональном варианте.

Конфликт интересов: Авторы декларируют отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аронов В. И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. М.: Недра, 1990. 301 с.
2. Долгаль А. С., Костицын В. И., Новикова П. Н., Пугин А. В. Алгоритмы аппроксимации геопотенциальных полей истокообразными функциями // *Геофизика*. 2016. № 5. С. 4–10
3. Балк П. И., Долгаль А. С., Пугин А. В., Мичурин А. В., Симанов А. А., Шархимуллин А. А. Эффективные алгоритмы истокообразной аппроксимации геопотенциальных полей // *Физика Земли*. 2016. № 6. С. 112–128. DOI: 10.7868/S0002333716050021
4. Долгаль А. С., Пугин А. В., Новикова П. Н. История метода истокообразных аппроксимаций геопотенциальных полей // *Физика Земли*. 2022. № 2. С. 3–26. DOI: 10.31857/S0002333722020028
5. Долгаль А. С., Пугин А. В. Некоторые вычислительные аспекты аппроксимации геопотенциальных полей // *Теория и практика разведочной и промысловой геофизики*: сб. науч. трудов. Т. 3. Вып. 8. Пермь: ПГНИУ, 2020. С. 92–98
6. Долгаль А. С. Оценка влияния формы поверхности измерений в методе истокообразной аппроксимации геопотенциальных полей // *Горное эхо*. 2020. № 2(79). С. 49–57. DOI: 10.7242/echo.2020.2.10
7. Раевский Д. Н., Степанова И. Э. Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант // *Физика Земли*. 2015. № 2. С. 44–54. DOI: 10.7868/S0002333715020106
8. Долгаль А. С., Костицын В. И., Новикова П. Н. и др. Аппроксимация аномалий силы тяжести при региональных исследованиях с учетом шарообразной формы Земли // *Геофизика*. 2021. № 5. С. 36–43.
9. Долгаль А. С., Костицын В. И., Пугин А. В., Хохлова В. В. Выбор модели Земли для трансформации аномалий силы тяжести в процессе региональных исследований // *Геофизика*. 2022. № 5. С. 6–12.
10. Минц М. В., Глазнев В. Н., Муравина О. М. Глубинное строение коры юго-востока Воронежского кристаллического массива по геофизическим данным: геодинамическая эволюция в палеопротерозое и современное состояние коры // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Геология*. 2017. № 4. С. 5–23
11. Глазнев В. Н., Якуба И. А. Гравитационный эффект осадочного чехла территории Республики Нигер // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Геология*. 2021. № 2. С. 71–82. DOI: 10.17308/geology.2021.2/3490
12. Белкин А. М., Миронов Н. Ф., Рублев Ю. И., Сарайский Ю. Н. Воздушная навигация: справочник. М.: Транспорт, 1988. 303 с.
13. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 2000. 622 с.
14. Фадеев Д. К. Об обусловленности матриц // *Труды МИАН СССР*. 1959. Т. 53. С. 387–391
15. Цей Р., Шумафов М. М. Число обусловленности матрицы как показатель устойчивости при решении прикладных задач // *Труды ФОРА*. 2011. № 16. С. 61–67
16. Математический форум Math Help Planet [Электронный ресурс] URL: <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=iteratsionnyi-metod-shultsa-nakhozheniya-obratnoi-matritsy> (дата обращения 02.02.2023)
17. Balmino G., Vales N., Bonvalot S., et al. Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies // *Journal of Geodesy*. 2012. Vol. 86. P. 499–520.
18. Bonvalot S., Balmino G., Briais A., et al. Commission for the Geological Map of the World. Eds. BGI-CGMW-CNES-IRD. Paris, 2012.
19. Amante C., Eakins B.W. ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, Data Sources and Analysis. NOAA Technical Memorandum NESDIS NGDC-24, 2009.
20. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике: справочник геофизика. Под ред. В. М. Дмитриева. 2-е изд. М.: Недра, 1990. 498 с.
21. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение (пер. с англ.) 2-е изд. М.: Мир, 2001. 575 с.
22. Форсайт Д., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений (пер. с англ.). М.: Мир, 1969. 166 с.
23. Hager W. W. Condition estimates // *SIAM Journal on scientific and statistical computing*. 1984. Vol. 5. No. 2. P. 311–316.
24. Higham N. J. FORTRAN codes for estimating the onenorm of a real or complex matrix, with applications to condition estimation // *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1988. Vol. 14. No. 4. P. 381–396.
25. Higham N. J., Tisseur F. A block algorithm for matrix 1-norm estimation, with an application to 1-norm pseudospectra // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 2000. Vol. 21. No. 4. P. 1185–1201.
26. Рогалев А. Н., Доронин С. В. Использование критериев обусловленности при численных расчетах напряженного состояния силовых конструкций // *Системы. Методы. Технологии*. 2016. № 2(30). С. 91–99.
27. Макарова И. Д. Оценка погрешности решения системы линейных алгебраических уравнений: два подхода // *Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе*. 2015. № 3. С. 112–119.
28. Боловин Е. В., Глазырин А. С. Способы повышения обусловленности матриц при решении систем разностных уравнений в задачах идентификации параметров динамических объектов // *Известия Томского политехнического университета*. 2013. Т. 322. № 2. С. 51–55.
29. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. К.: Наукова думка, 1978. 228 с.
30. Долгаль А. С., Пугин А. В. Саморегуляризация в задачах истокообразной аппроксимации аномалий силы тяжести // *Теория и практика разведочной и промысловой геофизики*: сборник научных трудов / гл. ред. В. И. Костицын. Пермский государственный национальный исследовательский университет. Пермь, 2022. Вып. 5 (10). С. 64–69.
31. Васин В. В. Основы теории некорректных задач. Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2020. 313 с.
32. Гордин В. М., Михайлов В. О., Михайлов Б. О. Физические аспекты аппроксимации и фильтрации аномальных полей // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1980. № 1. С. 78–93.

Computational aspects of gravity anomalies modeling by a point masses system

©2023 A. S. Dolgal[✉], P. N. Novikov

*Mining Institute Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
78a Sibirskaya ul., Perm, 614007, Russian Federation*

Abstract

Introduction: Approximation of the Bouguer gravity anomalies by a system of equivalent sources in regional geophysical surveys was considered. The field values are set at the nodes of a regular network of points on the surface of a spherical Earth - the Kavraisky sphere. Each node corresponds to 4 parameters: latitude, longitude, geodetic height and the first radial derivative of the gravitational potential. Material points are located under all nodes of the network. The mass values are determined by the approximate solution of a system of linear algebraic equations.

Materials and Methods: The initial materials were two global models of the gravity field in the Bouguer reduction WGM2012 and the earth's relief ETOPO1 in the system of geodetic parameters WGS84 for the Kuril island arc and adjacent water areas. The resolution of the models was 1° and 20". The study area was limited by coordinates 40°–54° N, 142°–162° E; its area is about 2.4 million km². Estimations of conditionality of matrices of coefficients of systems of equations at different depths of placement of equivalent sources were carried out. For the condition numbers, the second-order Schultz method and a new method developed by the authors which does not require explicit calculation of the inverse matrix were used. The latter is based on Hager's approach for estimations of the norms of the inverse matrix based on the available coefficients of the system. It is designed for the operation with high-dimensional data. The proximity of the condition numbers calculated by two different methods for matrices of size 314×314 and 2623×2623, respectively, was demonstrated. The comparison of the calculating speed was carried out at different depths of placement of material points. Also an experimental assessment of the effect of rounding errors and noise in the original data on the system solution vector was performed.

Results and Discussion: Quantitative estimates of the norms of coefficient matrices and condition numbers of various approximation structures are presented. There was a sharp increase in the condition numbers when the sources were immersed to a depth exceeding the grid step of setting the field in latitude. This was accompanied by a decrease in the speed of the iterative Seidel method when solving systems of equations. The high stability of the numerical solution of systems of equations, probably due to self-regularization, was revealed. Therefore, for the modelling of regional gravity anomalies, additional regularization methods may not be used. Under the conditions of low and middle latitudes when forming an approximation structure it is recommended to observe an approximate equality between the network step along the meridian and the depths of point masses.

Conclusions: The specific features of solving systems of equations arising from the source wise approximation of gravity anomalies on the Kavraisky sphere were studied. The results obtained will improve the accuracy and the calculating speed of the transformants of the anomalous gravitational field of large areas.

Keywords: Gravity field, equivalent sources, system of equations, coefficient matrix, norm, condition number, Kavraisky sphere, transformation.



The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

✉ Alexander S. Dolgal, e-mail: asdolgal@inbox.ru

Funding: The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 23–27–00113, <https://rscf.ru/project/23-27-00113/>

For citation: Dolgal A.S., Novikova P. N. Computational aspects of gravity anomalies modeling by a point masses system//*Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Geologiya – Proceedings of Voronezh State University. Series: Geology*, 2023, no. 2, pp. 82–93. DOI: <https://doi.org/10.17308/geology/1609-0691/2023/2/82-93>

Conflict of interests: The authors declare the absence of obvious and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

REFERENCES

1. Aronov V. I. *Metody postroyeniya kart geologo-geofizicheskikh priznakov i geometrizatsiya zalezhey nefi i gaza na EVM* [Methods for constructing maps of geological and geophysical features and geometrization of oil and gas deposits on a computer]. Moscow, Nedra publ., 1990, 301 p. (In Russ.)
2. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, Naukapubl., 2000, 622 p. (In Russ.)
3. Balk P. I., Dolgal' A. S., Pugin A. V., Michurin A. V., Simanov A. A., Sharhimullin A. A. Jeffektivnyye algoritmy istokoobraznoj approksimacii geopotencial'nyh polej [Effective algorithms of source-like approximation of geopotential fields]. *Fizika Zemli – Physics of the Earth*, 2016, no. 6, pp. 112–128. DOI: 10.7868/S0002333716050021 (In Russ.)
4. Dolgal' A. S., Pugin A. V., Novikova P. N. Istorija metoda istokoobraznykh approksimacij geopotencial'nyh polej [History of the method for sourcewise approximations of geopotential fields]. *Fizika Zemli – Physics of the Earth*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 149–171. DOI: 10.31857/S0002333722020028 (In Russ.)
5. Dolgal A.S., Pugin A.V. Nekotoryye vychislitel'nyye aspekty approksimatsii geopotentsial'nykh polej [Some computational aspects of approximation of geopotential fields]. *Teoriya i praktika razvedochnoy i promyslovoj geofiziki: sb. nauch. trudov* [Theory and practice of exploration and production geophysics: collected scientific papers], vol. 3, I. 8, Perm: Perm State National Research University publ., 2020, pp. 92–98 (In Russ.)
6. Dolgal A.S. Otsenka vliyaniya formy poverkhnosti izmereniy v metode istokoobraznoy approksimatsii geopotentsial'nykh polej [Evaluation of the shape influence of the measurement surface in the sourcelike approximation method of geopotential fields]. *Gornoyeekho– Mountain echo*, 2020, no. 2(79), pp. 49–57 DOI: 10.7242/echo.2020.2.10 (In Russ.)
7. Raevskij D. N., Stepanova I. Je. Modificirovannyj metod S-approksimacij. Regional'nyj variant [Modified method of S-approximations. Regional version]. *Fizika Zemli – Physics of the Earth*, 2015, no. 2, pp. 44–54. DOI: 10.7868/S0002333715020106 (In Russ.)
8. Dolgal A. S., Kostitsyn V. I., Novikova P. N. Approksimatsiya anomalii sily tyazhesti pri regional'nykh issledovaniyakh s uchedom sharoobraznoy formy Zemli [Approximation of gravity anomalies in regional studies taking into account the spherical shape of the Earth]. *Geofizika– Geophysics*, 2021, no. 5, pp. 36–43 (In Russ.)
9. Dolgal A. S., Kostitsyn V. I., Pugin A. V., Khokhlova V. V. Vybor modeli Zemli dlya transformatsii anomalii sily tyazhesti v protsesse regional'nykh issledovaniy [Choice of the Earth model for the transformation of gravity anomalies in the process of regional studies]. *Geofizika– Geophysics*, 2022, no. 5, pp. 6–12 (In Russ.)
10. Mints M. V., Glaznev V. N., Muravina O. M. Glubinnoye stroyeniye kory yugo-vostoka Voronezhskogo kristallicheskogo massiva po geofizicheskim dannym: geodinamicheskaya evolyutsiya v paleoproterozoye i sovremennoye sostoyaniye kory [Deep structure of the crust of the southeast of the Voronezh crystalline massif according to geophysical data: geodynamic evolution in the Paleoproterozoic and the current state of the crust]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Geologiya – Proceedings of the Voronezh State University. Series: Geology*, 2017, no. 4, pp. 5–23 (In Russ.)
11. Glaznev V. N., Yakuba I. A. The gravitational effect of the sedimentary cover located in the Republic of Niger. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Geology*, 2021, no. 2, pp. 71–82 DOI: 10.17308/geology.2021.2/3490
12. Belkin A.M., Mironov N. F., Rublev Yu. I., Saraisky Yu. N. *Vozdushnaya navigatsiya: spravochnik* [Air navigation: a guide]. Moscow, Transport publ., 1988, 303 p. (In Russ.)
13. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow, Naukapubl., 2000, 622 p. (In Russ.)
14. Fadeev D. K. Ob obuslovennosti matrits [On the conditionality of matrices]. *Trudy MIAN SSSR – Proceedings of the USSR Institute of Mathematics*, 1959, vol. 53, pp. 387–391 (In Russ.)
15. Tsei R., Shumafov M. M. Chislo obuslovennosti matritsy kak pokazatel' ustoychivosti pri reshenii prikladnykh zadach [The Matrix Condition Number as an Indicator of Stability in Solving Applied Problems]. *Trudy FORA – Proceedings of FORA*, 2011, no. 16, pp. 61–67 (In Russ.)
16. Matematicheskij forum Math Help Planet [Math Help Planet Mathematical Forum] Available at: <http://mathhelp-planet.com/static.php?p=iteratsionnyj-metod-shultsa-nakhozheniya-obratnoi-matritsy> (accessed 02.02.2023)
17. Balmino G., Vales N., Bonvalot S., et al. Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies. *Journal of Geodesy*, 2012, vol. 86, pp. 499–520.
18. Bonvalot S., Balmino G., Briais A., et al. Commission for the Geological Map of the World. Eds. BGI-CGMW-CNES-IRD. Paris, 2012.
19. Amante C., Eakins B.W. ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, Data Sources and Analysis. NOAA Technical Memorandum NESDIS NGDC-24, 2009.
20. *Vychislitel'naya matematika i tekhnika v razvedochnoy geofizike: spravochnik geofizika* [Computational Mathematics and Engineering in Exploration Geophysics: A Handbook of Geophysics]. Ed. V. M. Dmitriev. 2nd ed.. Moscow, Nedra publ., 1990, 498 p. (In Russ.)
21. Kahaner D., Moler K., Nash S. *Chislennyye metody i programnoye obespecheniye* [Numerical methods and software]. (translated from English) 2nd ed.. Moscow, Mirpubl., 2001, 575 p. (In Russ.)
22. Forsythe D., Moler K. *Chislennoye resheniye sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy* [Numerical solution of systems of linear algebraic equations (translated from English)]. Moscow, Mirpubl., 1969, 166 p. (In Russ.)
23. Hager W.W. Condition estimates. *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, 1984, vol. 5, no. 2, pp. 311–316.
24. Higham N.J. FORTRAN codes for estimating the onenorm of a real or complex matrix, with applications to condition esti-

- mation. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1988, vol. 14, no. 4, pp. 381–396.
25. Higham N. J., Tisseur F. A block algorithm for matrix 1-norm estimation, with an application to 1-norm pseudospectra. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 2000, vol. 21, no. 4, pp. 1185–1201.
26. Rogalev A. N., Doronin S. V. Ispol'zovaniye kriteriyev obuslovlennosti pri chislennykh raschetakh napryazhennogo sostoyaniya silovykh konstruksiy [The use of conditionality criteria in numerical calculations of the stress state of power structures]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii–Sistemy. Methods. Technologies*, 2016, no. 2(30), pp. 91–99 (In Russ.)
27. Makarova I. D. Otsenka pogreshnosti resheniya sistemy lineynykh algebraicheskikh uravneniy: dva podkhoda [Evaluation of the error in solving a system of linear algebraic equations: two approaches]. *Aktual'nyye problem prepodavaniya matematiki v tekhnicheskoy vuzе– Actual problems of teaching mathematics in a technical university*, 2015, no. 3, pp. 112–119 (In Russ.)
28. Bolovin E. V., Glazyrin A. S. Sposoby povysheniya obuslovlennosti matrits pri reshenii sistem raznostnykh uravneniy v zadachakh identifikatsii parametrov dinamicheskikh ob"yektov [Methods for increasing the conditionality of matrices in solving systems of difference equations in problems of identifying the parameters of dynamic objects]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 2, pp. 51–55 (In Russ.)
29. Starostenko V. I. *Ustoychivyye chislennyye metody v zadachakh gravimetrii* [Stable numerical methods in gravimetry problems]. Kyiv, Naukovadumkapubl., 1978, 228 p. (In Russ.)
30. Dolgal A. S., Pugin A. V. amoregulyarizatsiya v zadachakh istokoobraznoy approksimatsii anomalii sily tyazhesti [Self-Regularization in Problems of Source-like Approximation of Gravity Anomalies]. *Teoriya i praktika razvedochnoy i promyslovoy geofiziki* [Theory and practice of exploration and production geophysics]. Sb. nauch. trudov. ed. V. I. Kostitsyn, Perm: State National Research University publ., 2022, I. 5 (10), pp. 64–69 (In Russ.)
31. Vasin V. V. *Osnovy teorii nekorrektnykh zadach* [Fundamentals of the theory of ill-posed problems]. Novosibirsk, Publishing House of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences publ., 2020, 313 p. (In Russ.)
32. Gordin V. M., Mikhailov V. O., Mikhailov B. O. Fizicheskiye aspekty approksimatsii i fil'tratsii anomal'nykh poley [Physical aspects of approximation and filtering of anomalous fields]. *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli – Izv. Academy of Sciences of the USSR. Physics of the Earth*, 1980, no. 1, pp. 78–93 (In Russ.)

Долгалъ Александр Сергеевич, д. ф.-м. н., гл. н. с., Горный институт УрО РАН, Пермь, Российская Федерация; e-mail: asdolgal@inbox.ru; ORCID 0000-0003-0099-3471

Новикова Полина Николаевна, к. г.-м. н., н. с., Горный институт УрО РАН, Пермь, Российская Федерация; e-mail: polinagfz@gmail.com; ORCID 0009-0008-6313-1485

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Alexander S. Dolgal, Dr. habil. in Physics and Mathematics, Leading Researcher, Mining Institute Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation; e-mail: asdolgal@inbox.ru; ORCID 0000-0003-0099-3471

Polina N. Novikova, PhD habil. In Geology and Mineralogy, Researcher, Mining Institute Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation; e-mail: polinagfz@gmail.com; ORCID 0009-0008-6313-1485

Authors have read and approved the final manuscript.