УДК 531.3 517.9

К ВОПРОСУ ОБОБЩЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОСТРАНСТВА НЕЦЕЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

© 2011 С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Московский авиационный институт (государственный технический университет), Волоколамское ш. 4, 125993 Москва, ГСП-3, А-80, Россия

Поступила в редакцию 29.04.2011 г.

Аннотация. Благодаря введению операции дробного дифференцирования дано обобщение квазиклассического кинетического уравнения для электронной функции распределения с целью описания ряда физических свойств фрактальных металлических структур. Как пример его приложения вычислен коэффициент теплопроводности металлического образца, обладающего фрактальной размерностью.

Ключевые слова: фрактал, дробное дифференцирование, кинетическое уравнение, теплопроводность.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время широкое распространение получили исследования, связанные с изучением свойств фрактальных объектов. Стремительный прорыв в этой области начался, по — видимому, с обзора [1], где впервые были сформулированы основные принципы и идеи этого нового научного направления. Подавляющее количество результатов, описанных в этом обзоре, было получено благодаря методам численного моделирования или опытным путем [2—3].

Именно поэтому, целью настоящей работы является разработка чисто теоретического подхода, с помощью которого можно будет описывать не только равновесные, но и различные диссипативные характеристики физических фрактальных структур [4].

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Обычное квазиклассическое кинетическое уравнение [5, 6] позволяет вычислять массу разнообразных диссипативных характеристик весьма широкого спектра кристаллических структур (например, магнетиков, диэлектриков, металлов, и т. п.). При этом, как правило, ограничиваются простыми геометрическими формами образцов типа сферы, куба или тонкой пластины. Как уже было отмечено, подобными формами все природное многообразие материальных объектов не ограничивается, и при более внимательном знакомстве с возможностями природной трансформации выясняется, что все — таки наиболее распространенными объектами служат фрактальные и самоподобные структуры типа кривой Коха, ковра и куба Серпинского (см. [1, 7—8]).

Суть нашего подхода в сильной степени связана с возможностью применения к подобного рода структурам операции дробного дифференцирования, которую, как было показано в работах [9, 10], весьма удобно ввести с помощью интеграла Фурье для определенного класса абсолютно интегрируемых функций.

Попытки применить известные уравнения математической физики к фрактальным объектам предпринимались, например, в работах [2, 11, 12]. Однако надо заметить, что во всех этих работах применялась операция дробного дифференцирования, которую впервые ввел, по-видимому, А. В. Летников [13].

Мы будем придерживаться несколько иной концепции [9, 10], которая, на наш взгляд, является более удобной и перспективной при решении чисто физических задач.

При этом линейный оператор обычного дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x}$ заменяется на оператор (тоже линейный) $\hat{A}$, действие которого на некоторую функцию $\phi(x)$ вводится как:

$$\hat{A}\,\phi(x) = i\int_{-\infty}^{\infty} k^{1+\varepsilon}\phi_k e^{-ikx}\,\frac{dk}{2\pi}, \qquad (1)$$

где число $|\varepsilon| < 1$, а ϕ_k —Фурье-образ оригинала функции $\phi(x)$.

С помощью этого оператора $\hat{A}$ квазиклассическое кинетическое уравнение можно тогда записать в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u_{i\varepsilon}\hat{A}_i f=L\{f\}, \qquad (2)$$

где $L\{f\}$ — интеграл столкновений, индекс $i=1,2,\ldots 6$, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Значения $i=1,2,3$ соответствуют декартовым координатам x,y,z, а $i=4,5,6$ — импульсному пространству и координатам соответственно p_x,p_y,p_z. $u_{i\varepsilon}$ представляет собой обобщенную скорость в фазовом пространстве с числом состояний $\Delta\Gamma=\frac{d^3pd^3x}{(2\pi\hbar)^3}$, где обычная скорость есть $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$, а $\dot{\vec{p}}=(u_4,u_5,u_6)$. Индекс ε указывает на зависимость обобщенной скорости от фрактальной размерности.

При интегрировании обеих частей уравнения (2) по фазовому объему, получаем $\frac{\partial}{\partial t}\int fd\Gamma+\int i\vec{k}'\left(\vec{u}\vec{k}'\right)e^{-i\vec{k}'\vec{x}}f_{\vec{k}'}d\Gamma\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}=\int L\{f\}d\Gamma$. В силу *Н*-теоремы интеграл в правой части тождественно обращается в нуль (независимо бозоны это или фермионы). Поскольку скорость $\vec{u}=\frac{\vec{p}}{m}$ (если речь идет об электронах, где m — масса электрона), то второе слагаемое также исчезает в силу того, что $\int\left(\vec{p}\vec{k}'\right)d^3k'd^3p=0$ и у нас автоматически получается, как и должно быть [5, 6], уравнение вида $\frac{\partial N}{\partial t}=0$, которое представляет собой закон сохранения числа частиц консервативной системы $N=\int fd\Gamma=const$ сохраняется.

С помощью уравнения (2) можно вычислить ряд кинетических коэффициентов в случае фрактальных материальных структур. Покажем, к примеру, как можно найти коэффициент теплопроводности металлического образца, который представим себе в виде проволоки, согнутой по законам построения фрактального объекта.

Согласно определению теплового потока имеем:

$$\vec{q}=-\kappa\vec{A}T=-i\kappa\int k^{\varepsilon}\vec{k}e^{-i\vec{k}\vec{r}}T_k\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (3)$$

С другой стороны, тепловой поток можно выразить через функцию распределения f:

$$\vec{q}=\int(\varepsilon(p)-\mu_0)\vec{u}_{\varepsilon}f_p\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \qquad (4)$$

где μ_0 — химический потенциал электронов и традиционно [5, 6] дисперсия электронов обозначается как $\varepsilon(p)$.

Однако в отличие от обычного трехмерного изотропного импульсного пространства, когда закон дисперсии можно выбрать в простейшем виде $\varepsilon(p)=\frac{p^2}{2m}$ [5], в случае пространств нецелой размерности дисперсия электронов становится сильно анизотропной функцией, зависящей от декартовых координат импульса p_x,p_y,p_z.

Как было доказано в работе [14], для случая квазитрехмерного импульсного пространства закон дисперсии электронов можно представить, в виде следующей зависимости: $\varepsilon_p=\frac{1}{2m}\left(p_x^{2-2\varepsilon}+p_y^{2-2\varepsilon}+p_z^{2-2\varepsilon}\right)$.

Здесь уместно подчеркнуть, что во избежание недоразумений и путаницы по поводу похожести обозначений, везде далее параметр фрактальности будет обозначаться, как это принято в теории фракталов, через ε, а дисперсия электронов, как это принято в теории металлов [5], через $\varepsilon(p)$ или ε_p.

Положим, что $f_p=\bar{f}+\delta f$, где

$$\bar{f}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon(p)-\mu_0}{T(\vec{r})}}+1} \qquad (5)$$

представляет собой квазиравновесную неоднородную функцию распределения электронов, а $\delta f=\frac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}\delta T$ малая поправка к функции распределения.

Тогда формула (4) примет вид:

$$\vec{q}=\int(\varepsilon(p)-\mu_0)\vec{u}_{\varepsilon}\delta f\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \qquad (6)$$

Для вычисления δf воспользуемся τ-приближением.

В стационарном случае получаем:

$$\vec{v}\nabla\bar{f}=-\frac{\delta f}{\tau_p},$$

где $L(f)\approx-\frac{\delta f}{\tau_p}$.

Отсюда:

$$\delta f=-\tau_p\vec{v}\nabla\bar{f}=-\tau_p\vec{v}\frac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}\nabla T.$$

С учетом полученного выражения для δf формула (6) примет вид:

$$\vec{q} = -\int (\varepsilon_p - \mu_0)\vec{u}_\varepsilon (\tau_p \vec{u}_\varepsilon \frac{\partial \overline{f}}{\partial T_o} \vec{A}T) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \\ = -i\int (\varepsilon_p - \mu_0)\tau_p \vec{u}_\varepsilon \vec{k}^\varepsilon (\vec{u}_\varepsilon \vec{k}) \frac{\partial \overline{f}}{\partial T_0} T_k \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (7)$$

Из условия равенства выражений (3) и (7), находим искомый тензор теплопроводности фрактального объекта:

$$\kappa_{ik} = \int (\varepsilon_p - \mu_0)\tau_p u_{\varepsilon_i} u_{\varepsilon_k} \frac{\partial \overline{f}}{\partial T_0} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (8)$$

Для вычисления интеграла (8) сделаем несколько упрощающих предположений.

Во-первых, предположим, что изучается кристаллическая структура, обладающая кубической симметрией, в силу чего наш фрактальный объект в целом можно будет считать изотропным.

При этом предположении тензор теплопроводности κ_{ik} можно представить как $\kappa_{ik} = \kappa \cdot \delta_{ik}$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Тогда в правой части равенства (8) произведение компонент вектора скорости $u_{\varepsilon_i} u_{\varepsilon_k}$ следует заменить на $\frac{u_\varepsilon^2}{3} \cdot \delta_{ik}$, где множитель 1/3 появляется в результате усреднения по направлениям $\vec{u}$. Поскольку скорость определяется как $\vec{u}_\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{p}} = \frac{1-\varepsilon}{m}(p_x^{1-2\varepsilon}\vec{i} + p_y^{1-2\varepsilon}\vec{j} + p_z^{1-2\varepsilon}\vec{k})$, то $\frac{\vec{u}_\varepsilon^2}{3} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{3m^2}(p_x^{2(1-2\varepsilon)} + p_y^{2(1-2\varepsilon)} + p_z^{2(1-2\varepsilon)})$.

Во-вторых, в силу того, что спектр электронов фрактального металла является анизотропным, время релаксации электронов τ_p является функцией ε. Поэтому при выполнении интегрирования (благодаря применению теоремы о среднем) время релаксации можно вынести за знак интеграла и приписать ему индекс ε, то есть вместо τ_p писать теперь $\overline{\tau}_\varepsilon$.

И, наконец, последнее упрощающее предположение. Будем предполагать, что электронный газ является вырожденным и для него выполняется условие $T \ll \varepsilon_F$.

В соответствии с этим производная от равновесной функции распределения по энергии согласно [5, 6] может быть представлена в виде $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon(\vec{p})} \approx \approx -\delta\left(\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon_F^{1-2\varepsilon}\right)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

А потому $\frac{\partial f_0}{\partial T} = -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon(\vec{p})} \frac{\varepsilon(p)}{T^{1-2\varepsilon}} \approx \frac{\varepsilon(\vec{p})}{T^{1-2\varepsilon}} \delta\left(\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon_F^{1-2\varepsilon}\right)$.

В результате выражение для коэффициента теплопроводности примет вид:

$$\kappa = \frac{\overline{\tau}_\varepsilon}{6m^3 T^{1-2\varepsilon}} \int \left(p_x^{2(1-2\varepsilon)} + p_y^{2(1-2\varepsilon)} + p_z^{2(1-2\varepsilon)}\right) \times \\ \times \left(\varepsilon(\vec{p}) - \mu_0^{1-2\varepsilon}\right) \delta\left(\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon_F^{1-2\varepsilon}\right) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (9)$$

Однако, даже, несмотря на все прозвучавшие выше упрощения, полученный интеграл вычисляется совсем не просто.

Удобнее всего провести его вычисление в сферической системе координат: $p_x = p\sin\theta\cos\varphi$, $p_y = p\sin\theta\sin\varphi$, $p_z = p\cos\theta$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

После некоторых довольно сложных и громоздких преобразований, с использованием свойств дельта-функции, получаем в результате:

$$\kappa = \frac{\overline{\tau}_\varepsilon(1-2\varepsilon)}{24\pi m^{2(1-2\varepsilon)}} \cdot \frac{p_F^{3-10\varepsilon} T^{1-2\varepsilon}}{\hbar^{3(1-2\varepsilon)}} \nu_\varepsilon g(\varepsilon), \quad (10)$$

где функция

$$g(\varepsilon) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin^{2(1-2\varepsilon)}\theta\cos^{2(1-2\varepsilon)}\phi + \right. \\ \left. + \sin^{2(1-2\varepsilon)}\theta\sin^{2(1-2\varepsilon)}\phi + \cos^{2(1-2\varepsilon)}\right]\sin\theta d\theta d\phi \quad (11)$$

а фигурирующая в решении (10) мера ν_ε, обеспечивает правильную размерность коэффициента теплопроводности фрактального металла.

Как видим, коэффициент теплопроводности оказывается сложной функцией параметра фрактальности ε, что и дает аналитическую связь между чисто физическими свойствами фракталов и геометрическими [9, 10, 14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложено обобщение кинетического уравнения на случай образца не целой размерности.

2. В качестве примера его приложения дано вычисление коэффициента теплопроводности фрактальной металлической проволоки.

3. Практическое приложение предложенного выше подхода может быть осуществлено в прикладных задачах, например, в теории фрактальных антенн, где исследование тепловых и радиолокационных свойств проводится в основном экспериментально [15—17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. Ижевск: РХД, 2002. 665 с.

2. Фракталы в прикладной физике / Под общей ред. А. Е. Дубинова. ВНИИЭФ. Арзамас-16. 1995. 216 с.

3. Фракталы в физике // Труды 6 межд.симпозиума

по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9—12 июля. 1985.) / Под ред. Л. Пьетронезе и Э. Тозатти. Пер. с англ. под ред. Я. Г. Синая и И. М. Халатникова. М.: Мир, 1988. 672 с.

4. *Гладков С. О.* О некоторых специфических свойствах нового типа дискретных материалов // Доклады РАН. 2006. Т. 408. В. 2. С. 182—187.

5. *Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И.* Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 450 с.

6. *Гладков С. О.* Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.

7. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.

8. *Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д.* Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // УФН. 1985. Т. 146. Вып. 3. С. 493—506.

9. *Гладков С. О.* К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности. // ЖТФ. 1997. Т. 67. В. 7. С. 8—12.

10. *Gladkov S. O., Bogdanova S. B.* // Physica B: J. of Condensed matter. 2010. V. 405. P. 1975—1977.

11. *Wyss W.* The fractional diffusion equation // J. Math. Phys. 1986. V. 27 № 11. P. 2782—2785.

12. *Бабенко Ю. И.* Применение дробного дифференцирования в задачах теории теплопроводности. Л.: Государственный институт прикладной химии, 1975. 91 с.

13. *Летников А. В.* Теория дифференцирования с произвольным указателем. М.: 1868. 96 с.

14. *Гладков С. О., Богданова С. Б.* // Вестник Московского государственного областного университета. Физика-математика. № 2. 2010. С. 76—80.

15. *Кравченко В. Ф., Масюк В. М.* Современные методы аппроксимации в теории антенн. Кн.3. М.: ИПРЖР. 2002. 72 с.

16. *Werner D. H. and Werner P. L.* // Radio Science. 1996. V. 31. № 6. P. 3331—3343.

17. *Слюсар В.* // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. 2007. № 5. С. 8—83.

Гладков Сергей Октябринович — профессор, кафедры математического моделирования, Московский авиационный институт; тел.: (495) 434-7505, e-mail: sglad@newmail.ru

Богданова Софья Борисовна — ст. преп. кафедры математического моделирования, Московский авиационный институт; тел.: (903) 290-9503, e-mail: sonjaf@list.ru

Gladkov Sergey O. — professor, department of mathematical modeling, Moscow Aviation Institute; tel.: (495) 434-7505, e-mail: sglad@newmail.ru

Bogdanova Sofia B. — the senior teacher, department of mathematical modeling, Moscow Aviation Institute; tel.: (903) 290-9503, e-mail: sonjaf@list.ru