

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ В ЭЛЕКТРОМЕМБРАННЫХ СИСТЕМАХ С ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИЕЙ

© 2011 А. М. Узденова, А. В. Коваленко, В. В. Никоненко, М. Х. Ургенов

*Кубанский государственный университет, Институт мембран,
ул. Ставропольская 149, 350040 Краснодар, Россия*

Поступила в редакцию 06.06.2011 г.

Аннотация. В статье предлагается математическая модель влияния электроконвекции на перенос ионов соли в диффузионном слое камеры обессоливания электродиализного аппарата. Выявлены основные закономерности процесса электроконвекции.

Ключевые слова: математическое моделирование, электроконвекция, электродиализный аппарат, электромембранные системы.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение электроконвекции в электромембранных системах (ЭМС) важно для лучшего понимания механизмов сверхпредельного тока и интенсификации массопереноса в электродиализных аппаратах [1, 2], а также для управления потоками жидкостей в электрокинетических микро- и наноустройствах [3—5].

Электрокинетические явления в электромембранных системах обусловлены существованием на границе раздела фаз двойного электрического слоя. Его строение определяет особенности электроконвекции и прохождения тока через электромембранную систему. Так, в зависимости от структуры двойного электрического слоя для электроосмотического скольжения у проводящей селективной границы выделяют два различных режима: электроосмос первого и второго родов.

Теория электроосмоса первого рода или квазиравновесного электроосмоса у селективной границы была разработана С. С. Духиным, Б. В. Дерягиным, Н. А. Мищук и другими [6, 7]. Скорость электроосмотического скольжения находилась из решения уравнения Навье — Стокса, в котором фигурировали две силы: первая из них обусловлена действием тангенциального поля на объемный заряд диффузионного слоя, вторая — изменением давления.

При сверхпредельных токах область пространственного заряда расширяется и выходит далеко за пределы равновесного двойного электрического слоя, занимая макроскопическую область, суще-

ственно меньшую, но уже сопоставимую с толщиной диффузионного слоя [8, 9]. Внешнее электрическое поле не только индуцирует неравновесный пространственный электрический заряд, но и вызывает движение (скольжение) жидкости относительно неподвижной поверхности. Этот конвективный перенос и называют электроосмосом второго рода. Плотность и толщина слоя индуцированного заряда быстро увеличиваются с ростом плотности тока, создавая скорости, превышающие скорости электроосмоса первого рода на порядок и более. Теория электроосмоса второго рода развита в работах И. Рубинштейна, Б. Зальцмана [9—14] и др.

В работе [12] рассматривается раствор, заключенный между двумя мембранами, в условиях отсутствия вынужденной конвекции. Решаются уравнения Навье — Стокса совместно с уравнениями Нернста — Планка и условием электронейтральности. Для учета воздействия внешнего электрического поля на расширенный пространственный заряд, индуцируемый в обедненном растворе на границе с одной из мембран, используется специальное граничное условие (условие скольжения):

$$V_y \Big|_{x=0} = -\frac{1}{8} (\Delta\phi)^2 \frac{\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial c}{\partial x}} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{8} (\Delta\phi)^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

где $V_y \Big|_{x=0}$ — скорость тангенциального скольжения на границе рассматриваемой области ($x = 0$), в которой решаются уравнения Навье — Стокса —

Нернста — Планка; $\Delta\phi$ — скачок потенциала в системе (примерно равный скачку потенциала в расширенной области пространственного заряда).

Условие скольжения было выведено Рубинштейном и Зальцманом [13] с использованием асимптотической теории неравновесного ДЭС, развитой ранее Листовничим [15].

Авторы [12] теоретически вывели возможность существования трех различных режимов электроконвекции, которые были в дальнейшем экспериментально подтверждены в работе [16]. Режим 1 достигается после преодоления некоторого порогового значения скачка потенциала ($\Delta\phi_1$) и соответствует переходу от устойчивости к неустойчивости: при превышении $\Delta\phi_1$ любое малое возмущение скорости или концентрации приводит к формированию парных вихрей у поверхности мембраны. Эти вихри после некоторого количества осцилляций и реорганизации в форме и размере становятся стационарными. Со временем осцилляции скачка потенциала, вызванные колебаниями вихрей, затухают и $\Delta\phi$ более не меняется во времени. В режиме 2, который имеет место после превышения второго порогового значения скачка потенциала ($\Delta\phi_2$), скачок потенциала не становится постоянным, а испытывает регулярные колебания. В режиме 3, достигаемом при еще больших значениях $\Delta\phi_1 \geq \Delta\phi_3$, колебания скачка потенциала становятся хаотическими, а их амплитуда возрастает. Размер вихрей увеличивается с ростом плотности тока / скачка потенциала; они все более интенсивно перемешивают раствор вблизи границы с мембраной. Следствием такого перемешивания является более эффективная доставка раствора из ядра потока к поверхности мембраны, что можно интерпретировать как уменьшение эффективной толщины диффузионного слоя.

Однако в работах Рубинштейна и Зальцмана [12, 13] при математическом моделировании электроконвекции накладываются некоторые ограничения: отсутствует вынужденная конвекция, уравнение Пуассона используется лишь для одномерного случая, а в двумерном случае вместо него используется условие электронеutrальности в сочетании с условием скольжения (1) на межфазной границе. В данной работе предлагается моделирование и исследование электроконвекции без указанных выше ограничений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Чтобы оценить влияние электроконвекции на процессы в электромембранной системе, рассмо-

трим двумерную задачу нестационарного переноса бинарного электролита в диффузионном слое, примыкающем к селективной катионообменной гомогенной мембране в камере обессоливания электродиализного аппарата.

Пусть H — ширина рассматриваемой области раствора (будем ассоциировать ее с полной толщиной диффузионного слоя); L — длина канала; V_0 — средняя линейная скорость вынужденного течения раствора; координата $x=0$ соответствует условной межфазной границе катионообменной мембрана/раствор; $x=H$ — внешней границе диффузионного слоя, $y=0$ — входу, а координата $y=L$ — выходу из камеры обессоливания.

Для моделирования электроконвекции в данных условиях будем использовать связанную систему электродиффузионных уравнений [17] и уравнений Навье — Стокса [18], с учетом пространственной силы. Векторная запись этой системы для бинарного электролита, в случае отсутствия химических реакций, имеет вид:

$$\vec{j}_i = \frac{F}{RT} z_i D_i C_i \vec{E} - D_i \text{grad } C_i + C_i \vec{V}, i=1,2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}_i, \quad i=1,2 \quad (2)$$

$$\varepsilon_0 \Delta \phi = -F(z_1 C_1 + z_2 C_2) \quad (3)$$

$$\vec{I} = F(z_1 \vec{j}_1 + z_2 \vec{j}_2) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \frac{1}{\rho_0} \vec{f}, \quad (5)$$

$$\text{div}(\vec{V}) = 0, \quad (6)$$

где ∇ — градиент, Δ — оператор Лапласа, $\vec{f} = \varepsilon_0 \Delta \phi \nabla \phi$ — плотность силы электрического поля, \vec{V} — скорость течения раствора, ρ_0 — характерная плотность раствора, P — давление, C_1, C_2 — концентрации катионов и анионов в растворе, соответственно, z_1, z_2 — зарядовые числа катионов и анионов, D_1, D_2 — коэффициенты диффузии катионов и анионов, соответственно, ϕ — потенциал электрического поля, ε_0 — диэлектрическая проницаемость раствора электролита, F — постоянная Фарадея, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, t — время, ν — коэффициент кинематической вязкости. В данной задаче $P, \vec{V}, \phi, C_1, C_2$ — неизвестные функции, зависящие от времени t и координат x, y . В системе уравнений (1)—(6) уравнения (1)—(4) описывают поля концентраций и потенциала, а уравнения Навье — Стокса (5), (6) — поле скоростей, формируемое под действием

вынужденного течения и пространственной электрической силы.

В данной работе рассматривается потенциостатический режим, которому соответствует условие:

$$\phi(H, y, t) - \phi(0, y, t) = d_\phi = \text{const}, \quad (7)$$

означающее, что величина падения потенциала в диффузионном слое постоянна.

После ряда преобразований уравнения (1)—(6) запишутся в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \frac{1}{\rho_0} \varepsilon_0 \Delta \phi \nabla \phi, \quad (8)$$

$$\text{div}(\vec{V}) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -\text{div} \left(-\frac{F}{RT} z_1 D_1 C_1 \nabla \phi - D_1 \nabla C_1 + C_1 \vec{V} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = -\text{div} \left(-\frac{F}{RT} z_2 D_2 C_2 \nabla \phi - D_2 \nabla C_2 + C_2 \vec{V} \right), \quad (11)$$

$$\Delta \phi = -\frac{F}{\varepsilon_0} (z_1 C_1 + z_2 C_2) \quad (12)$$

Наряду с условием (7) будем использовать следующие граничные условия:

1) На поверхности катионообменной мембраны, $x = 0, y \in [0, L], t \geq 0$, будем считать граничную концентрацию катионов равной фиксированному заряду внутри мембраны:

$$C_1(0, y, t) = C_m \quad (13)$$

Кроме того, предположим, что катионообменная мембрана идеально селективна, т.е. непроницаема для анионов:

$$\left(\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{F}{RT} z_2 C_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) (0, y, t) = 0. \quad (14)$$

Для скорости используем условие прилипания на границе мембрана/раствор:

$$V_i(0, y, t) = 0, i = 1, 2 \quad (15)$$

2) На внешней границе диффузионного слоя (в ядре потока), $x = H, y \in [0, L], t \geq 0$, будем считать концентрацию ионов постоянной:

$$C_i(H, y, t) = C_{i,0}, i = 1, 2 \quad (16)$$

Для скорости течения раствора будем использовать условие исчезновения нормальной скорости и вязкое напряжение на внешней границе диффузионного слоя:

$$V_1(H, y, t) = 0, \frac{\partial V_2(H, y, t)}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

где V_2 — продольная составляющая скорости течения жидкости. Таким образом, условие (17) огра-

ничивает область развития вихрей областью $x < H, y \in [0, L]$.

3) На входе в рассматриваемую область, $y = 0, x \in [0, H], t \geq 0$, будем считать, что концентрации, потенциал и скорость течения раствора распределены линейно, причем их распределение соответствует предельной плотности тока и при $x \in (0, H]$ выполняется условие электронейтральности ($(z_1 C_1(x, 0, t) + z_2 C_2(x, 0, t)) = 0$):

$$C_i(x, 0, t) = \frac{C_{i,0} x}{H}, i = 1, 2; \phi(x, 0, t) = d_\phi \left(1 - \frac{x}{H} \right),$$

$$V_1(x, 0, t) = 0, V_2(x, 0, t) = V_0 \frac{x}{H}. \quad (18)$$

Как следует из (17) и (18), граничные условия в точке $x = 0, y = 0$ не согласованы. Однако при численном решении разрывы в распределении концентраций и потенциала достаточно быстро сглаживаются.

4) На выходе из рассматриваемой области $y = L, x \in [0, H], t \geq 0$ будем использовать условия:

$$\frac{\partial C_i(x, L, t)}{\partial y} = 0, i = 1, 2; \frac{\partial \phi(x, L, t)}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

$$P(x, L, t) = P_0.$$

5) Начальные условия при $t = 0$ примем согласованными с остальными граничными условиями:

$$C_i(x, y, 0) = C_{i,0} x / H, i = 1, 2; \phi(x, y, 0) = d_\phi \left(1 - \frac{x}{H} \right),$$

$$V_1(x, y, 0) = 0, V_2(x, y, 0) = V_0, \quad (20)$$

Для решения задачи (8)—(20) применяется метод конечных элементов:

1) Физическая область задачи делится на подобласти (конечные элементы).

2) Зависимые переменные аппроксимируются функциями специального вида на каждом конечном элементе и, следовательно, во всей области. Параметры этих аппроксимаций в последующем становятся неизвестными параметрами задачи.

3) Подстановка аппроксимаций в определяющие уравнения (или эквивалентные им) дает систему множества уравнений с неизвестными параметрами. Решая эти уравнения, можно определить значения этих параметров и, следовательно, получить приближенное решение задачи [19].

Нами были проведены численные эксперименты для раствора NaCl в широком спектре таких параметров, как начальная концентрация, скорость вынужденного течения раствора, межмембранное расстояние, длина канала, скачок электрического потенциала, и определены основные закономер-

ности изменения электрохимических (концентрации анионов и катионов, напряженности и потенциала электрического поля, и т.д.) и гидродинамических полей. Ниже представлены некоторые результаты численных экспериментов при следующих входных параметрах: ширина рассматриваемой области $H = 0.5$ мм, длина канала $L = 0.3$ мм, средняя скорость вынужденного течения раствора $V_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ м/с, начальная концентрация раствора $C_0 = 10$ моль/м³, температура раствора $T = 293$ К, начальная плотность раствора $\rho_0 = 1002.5$ кг/м³, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 1.006 \cdot 10^{-6}$ м²/с, коэффициент диффузии катиона и аниона, соответственно, $D_1 = 1.33 \cdot 10^{-9}$ м²/с и $D_2 = 2.05 \cdot 10^{-9}$ м²/с, падение электрического потенциала в диффузионном слое: а) $d_\phi = -0.1$ В, б) $d_\phi = -0.3$ В, в) $d_\phi = -0.5$ В.

Заметим, что скачок потенциала d_ϕ представляет собой основной вклад (более 99% при сверхпредельных плотностях тока) в скачок потенциала $\Delta\phi_{tot}$ между точками, соответствующими внешним границам обедненного и обогащенного диффузионных слоев, в которых обычно устанавливаются кончики капилляров измерительных электродов. Связь между $\Delta\phi_{tot}$ и d_ϕ в стационарном состоянии определяется формулой, вытекающей из известных уравнений для расчета скачка потенциала [20, 21]:

$$\Delta\phi_{tot} = d_\phi - \frac{RT}{F} \ln \frac{C_s^{II}}{C_m} - iR_m - \frac{RT}{F} \ln \frac{C_s^{II}}{C_0}, \quad (21)$$

где второе слагаемое дает диффузионный (донна-новский) скачок потенциала между точкой $x = 0$ и правой обогащенной границей мембраны (где предполагается выполнение условия электронейтральности), третье слагаемое дает омический скачок потенциала в объеме мембраны (R_m — омическое сопротивление мембраны в Ом см²), а четвертое — скачок потенциала в обогащенном диффузионном слое возле идеально селективной мембраны. Граничная концентрация электролита у обогащенной поверхности мембраны (C_s^{II}) в стационарном состоянии равна:

$$C_s^{II} = C_0 \left(1 + \frac{i}{i_{lim}^{II}} \right), \quad (22)$$

где i_{lim}^{II} — предельная плотность тока, рассчитанная для обогащенного диффузионного слоя толщиной δ^{II} .

Выбор величины C_m не является принципиальным. Как показано в [21], значение его практически не влияет на распределение концентраций и напряженности поля на расстояниях больше порядка дебаевской длины L_D от поверхности мембраны.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРОЦЕССА ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ

1. Закономерности изменения электрохимических и гидродинамических полей при увеличении абсолютной величины скачка потенциала d_ϕ .

При $d_\phi = -0.1$ В (рис. 1а) концентрация катионов практически линейно убывает почти до нуля и только в окрестности мембраны увеличивается и удовлетворяет граничному условию (13), при этом концентрация анионов линейно уменьшается практически до нуля. Расчеты показывают, что поле электрического потенциала (рис. 2а) и линии тока жидкости практически не возмущены, течение является безвихревым. Такое распределение концентраций качественно соответствуют допредельному и предельному режимам.

При $d_\phi = -0.3$ В (рис. 1б) профиль концентрации катионов, оставаясь близким к предыдущему случаю, уже слегка искривлен. Заметим, что при этом графики распределения концентрации анионов и потенциала электрического тока аналогичны предыдущему случаю (рис. 2а). При $d_\phi = -0.5$ В на графике потенциала видны периодические искривления (рис. 2б). Как видно из рис. 3а, при $d_\phi = -0.3$ В, на входе и выходе рассматриваемой области появляются два вихря, вызванные действием силы электрического поля на раствор электролита.

При $d_\phi = -0.5$ В в области диффузионного слоя образуется множество периодических парных вихрей, которые занимают всю область диффузионного слоя (рис. 3б), профили концентраций катионов (рис. 1в) и анионов (рис. 1г), а также электрического потенциала (рис. 2в) имеют периодические искривления, связанные с периодической структурой течения раствора.

Нами было проведено исследование динамики возникновения вихревого движения раствора при изменении времени при $d_\phi = -0.5$ В, которое показало, что вначале (приблизительно до 0.5 с) происходит накопление искривлений скорости течения раствора, которое в некоторый момент времени приводит к возникновению двух вихрей на входе и выходе в рассматриваемой области. Затем эти вихри увеличиваются в размерах, продолжая возмущать граничащий с мембраной раствор, и приблизительно при $t = 5.5$ с возникает большое количество парных вихрей, которые, однако, вдали от входа и выхода имеют небольшие размеры. В дальнейшем размер вихрей увеличивается, а затем течение раствора стабилизируется, и при $t = 8$ с выходит на стационарный режим, (рис. 3б), т. е. форма и размеры вихрей больше не меняются.

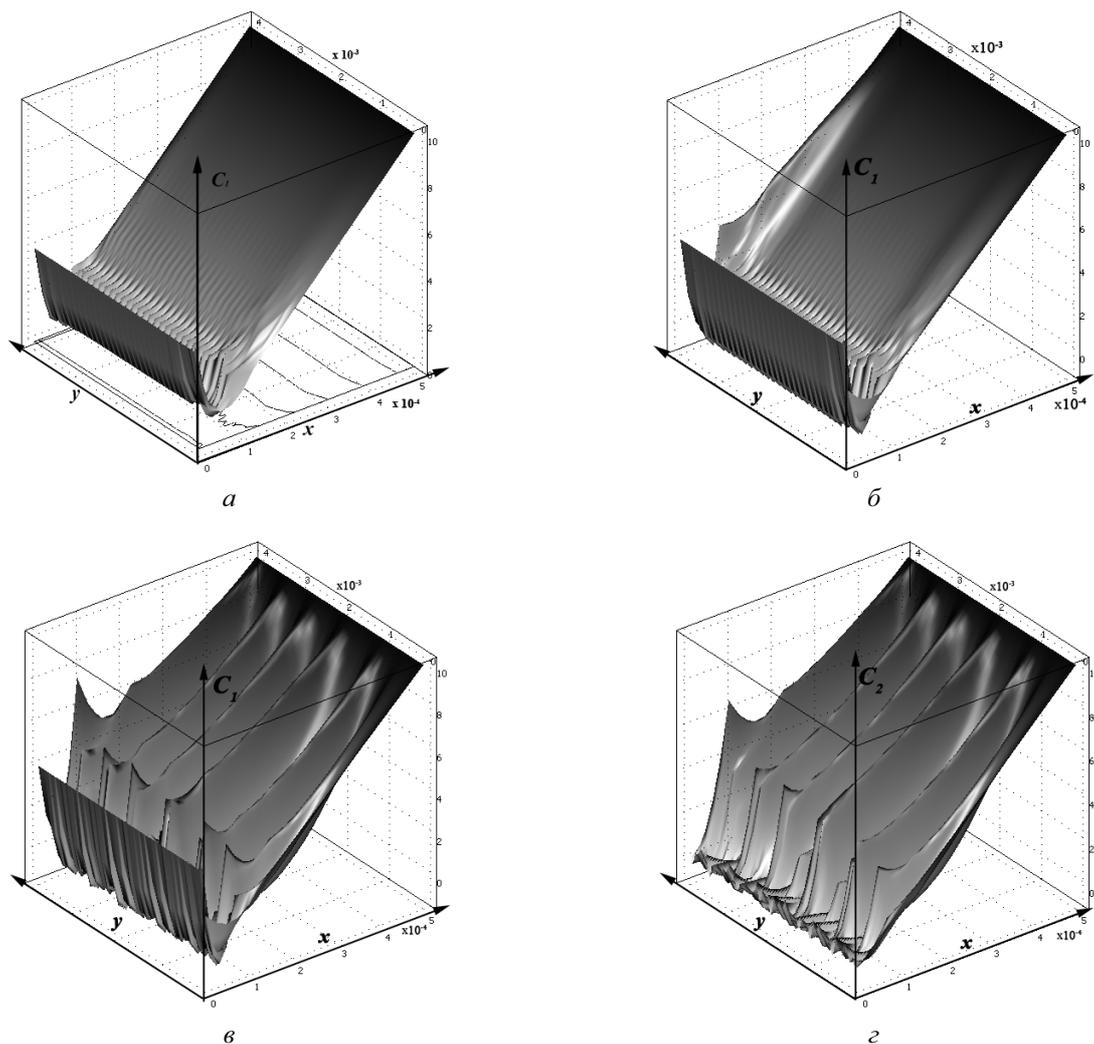


Рис. 1. Поля концентраций катионов в диффузионном слое, рассчитанные спустя 1000 секунд с момента включения электрического тока при линейной скорости вынужденного течения раствора $V_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ м/с и скачке потенциала: $d_\phi = -0.1$ В (а); $d_\phi = -0.3$ В (б); $d_\phi = -0.5$ В (в); поле концентрации анионов при $d_\phi = -0.5$ В (г)

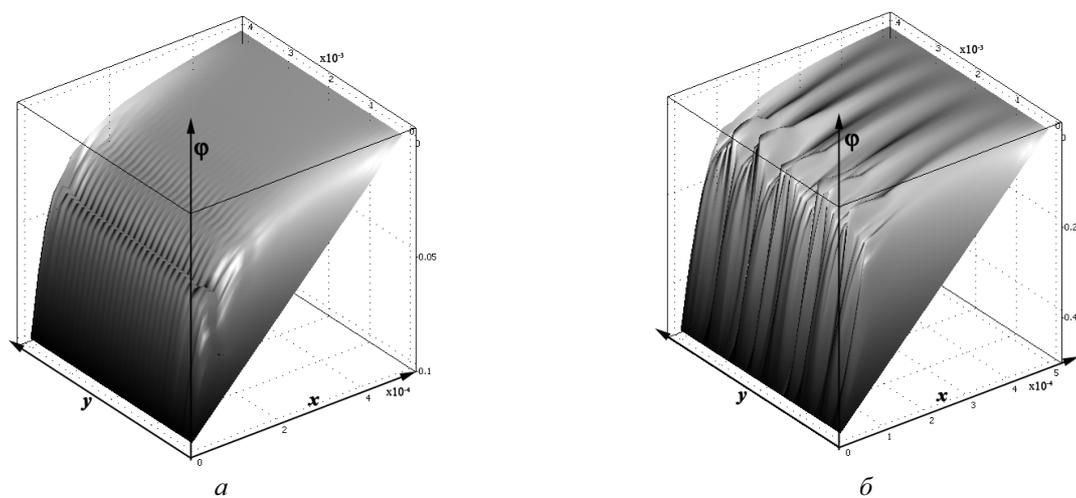


Рис. 2. Поля электрического потенциала в диффузионном слое, рассчитанные спустя 1000 секунд с момента включения электрического тока при скорости вынужденного течения раствора $V_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ м/с и скачке потенциала: $d_\phi = -0.1$ В (а); $d_\phi = -0.5$ В (б)

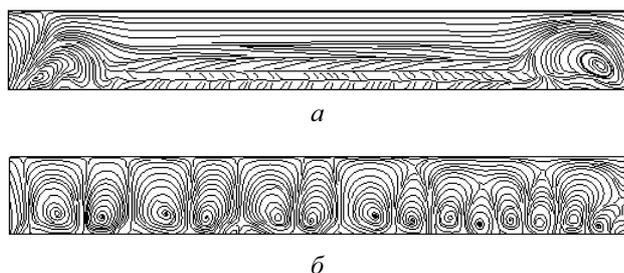


Рис. 3. Линии тока жидкости в рассматриваемой области при скорости вынужденного течения раствора $V_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ м/с и значениях скачка потенциала: $d_\phi = -0.3$ В (а); $d_\phi = -0.5$ В (б)

2. Закономерности изменения электрохимических и гидродинамических полей при увеличении величины линейной скорости вынужденного течения раствора.

При скорости $V_0 = 10^{-2}$ м/с линии тока жидкости практически во всем диффузионном слое не искривлены, при $V_0 = 10^{-3}$ м/с вихревая область охватывает примерно 20% диффузионного слоя. При $V_0 = 10^{-4}$ м/с вихревая область охватывает примерно половину диффузионного слоя, при скорости вынужденного течения $V_0 = 10^{-5}$ м/с вихри заполняют весь диффузионный слой, а при скорости вынужденного течения меньше $V_0 = 10^{-6}$ м/с вихри, по-видимому, выходят далеко за его пределы.

Сопоставление полученных нами результатов с результатами численных расчетов и экспериментов из работ [2, 16], показывает их совпадение на качественном уровне.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные в данной работе расчеты показывают, что скорость скольжения, рассчитанная по формуле Рубинштейна и Зальцмана, намного меньше скорости вынужденного течения раствора, реально применяемого на практике, и, соответственно, не оказывает существенного влияния на исследуемые процессы. Поэтому используемый этими авторами подход для моделирования электроконвекции, неприменим при наличии вынужденной конвекции. Тем не менее, и при наличии вынужденной конвекции действие электрического поля на пространственный заряд, образующийся при сверхпредельных токах в примыкающем к мембране диффузионном слое, приводит к образованию парных периодических вихрей, схожих по структуре с рассчитанным Рубинштейном и Зальцманом вихревым течением, т.е. к возникновению электроконвекции.

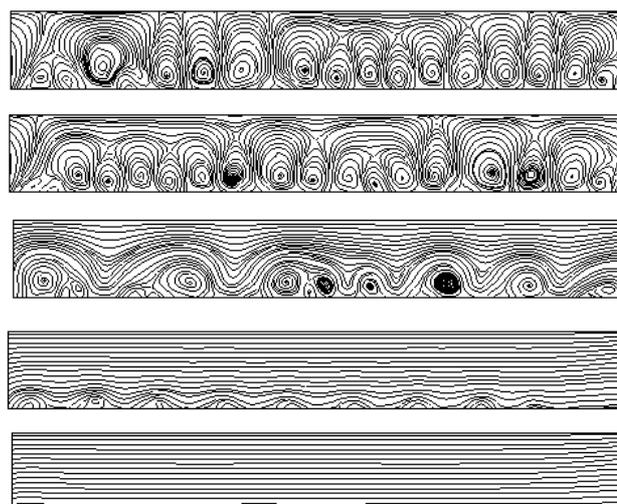


Рис. 4. Линии тока жидкости в рассматриваемой области при изменении скорости вынужденного течения раствора от $V_0 = 10^{-6}$ м/с до $V_0 = 10^{-2}$ м/с и значениях скачка потенциала $d_\phi = -0.5$ В

При наличии вынужденной конвекции электроконвекция характеризуется следующими свойствами:

- возникает в диффузионном слое, прилегающем к катионообменной мембране при истощении концентрации катионов соли при сверхпредельной плотности тока при некотором соотношении между падением потенциала и скорости вынужденного течения. При увеличении скорости вынужденного течения электроконвекция возникает при больших падениях потенциала (по абсолютной величине), и, наоборот, при уменьшении скорости вынужденного течения электроконвекция возникает при меньшем падении потенциала;

- процесс возникновения, развития и стабилизация структуры вихревого движения происходит достаточно быстро;

- несмотря на наличие вынужденного течения электроконвекция обеспечивает доставку раствора из ядра потока к границе мембрана/раствор, что приводит к дополнительному переносу ионов и интенсификации массопереноса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mishchuk N.* // Adv. Colloid Interface Sci. 2010. V. 60. № 1—2. P. 16.
2. *Nikonenko V., Pismenskaya N., Belova E., et al.* // Adv. Colloid Interface Sci. 2010. V. 160. P. 101.
3. *Kim S.-J., Ko S.-H., Kang K. H., et al.* // Nature Nanotech. 2010. V. 5. P. 297.
4. *Mishchuk N., Trond H., Tormod V., et al.* // J. of Microfluidics and Nanofluidics. 2011. V. 11. P. 675.

5. Tallarek U., Leinweber F., Nischang I. // Electrophoresis. 2005. V. 26. P. 39.
6. Духин С. С., Дерягин Б. В. Электрофорез. М.: Наука, 1976. 256 с.
7. Духин С. С., Мицук Н. А., Тахистов П. В. // Коллоидный журнал. 1989. Т. 51. № 3. С. 616.
8. Уртенев М. Х. Краевые задачи для системы уравнений Нернста — Планка — Пуассона (факторизация, декомпозиция, модели, численный анализ). Краснодар: Кубанский государственный университет, 1998. 140 с.
9. Rubinshtein I. // J. Chem. Soc. Faraday Trans. 1990. V. 86. № 10. P. 1857.
10. Рубинштейн И., Зальцман Б., Прец И., и др. // Электрохимия. 2002. Т. 38. № 8. С. 956.
11. Rubinshtein I., Maletzki F. // J. Chem. Soc., Faraday Trans. II, 1991. V. 87. № 13. P. 2079.
12. Rubinstein I., Zaltzman B. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. №. 2. P. 2238.
13. Rubinstein I., Zaltzman B. // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 2001. 11. P. 263.
14. Rubinstein I., Zaltzman B. // J. Fluid Mech. 2007. V. 579. P. 173.
15. Listovnichy A. V. // Электрохимия. 1989. V. 25. P. 1651.
16. Belova E., Lopatkova G., Pismenskaya N., et al. // J. Phys. Chem. B. 2006. V. 110. P. 13458.
17. Ньюман Дж. Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 463 с.
18. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
19. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 304 с.
20. Sizat Ph., Kozmai A., Pismenskaya N., et al. // Electrochim. Acta. 2008. V. 53. P. 6380.
21. Urtenov M. A.-Kh., Kirillova E. V., Seidova N. M., et al. // J. of Physical Chemistry B. 2007. V. 111. № 51. P. 14208.

Узденова Аминат Магомедовна — аспирантка, Кубанский государственный университет; тел.: 8918) 7123471, e-mail: kpm@fpm.kubsu.ru

Uzdenova Aminat M. — the post graduate student, Kuban State University; tel.: (918) 7123471, e-mail: kpm@fpm.kubsu.ru

Коваленко Анна Владимировна — доцент, Кубанский государственный университет; тел.: 8918) 4440042, e-mail: savanna-05@mail.ru

Kovalenko Anna V. — associate professor, Kuban State University; tel.: (918) 4440042, e-mail: savanna-05@mail.ru

Никоненко Виктор Васильевич — профессор, Кубанский государственный университет; тел.: (861) 2199573, e-mail: v_nikonenko@mail.ru

Nikonenko Victor V. — professor, Kuban State University; tel.: (861) 2199573, e-mail: v_nikonenko@mail.ru

Уртенев Махамет Хусеевич — профессор, Кубанский государственный университет; тел.: (918) 4659466, e-mail: urtenovmax@mail.ru

Urtenov Mahamet K. — professor, Kuban State University; tel.: (918) 4659466, e-mail: urtenovmax@mail.ru