

Оригинальные статьи

Научная статья

УДК 532.6

<https://doi.org/10.17308/kcmf.2023.25/10980>

Равновесная форма поверхности развернутого капиллярного мениска

А. А. Сокуров✉

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»,

ул. Шортанова, 89 А, Нальчик 360000, Кабардино-Балкарская Республика, Российская Федерация

Аннотация

В работе рассматривается задача о равновесной форме развернутого капиллярного мениска в однородном гравитационном поле. Отличие принятого в настоящей работе подхода от уже существующих заключается в том, что учитывается размерная зависимость поверхностного натяжения. Наличие подобных моделей может позволить в будущем лучше понять особенности поведения малоразмерных капиллярных тел, а также выявить эффекты, обусловленные размерными зависимостями физических параметров. Для достижения поставленной цели предлагается использовать аналог известной формулы Толмена, выражающий размерную зависимость поверхностного натяжения для случая границы раздела фаз с произвольной геометрией. Учет размерной зависимости поверхностного натяжения приводит к уравнениям, которые ожидаемо сложнее классических. По причине сложной нелинейности они, как и раньше, не разрешимы в терминах элементарных функций, в связи с чем применяются численные методы. Математическая модель мениска представлена в форме, лучше подходящей для численного моделирования профилей. Проведены вычислительные эксперименты по определению степени и характера влияния параметра, отвечающего за размерную зависимость поверхностного натяжения, на равновесную форму мениска. Проанализированы частные случаи, когда удастся выписать точное решение уравнения Лапласа и получить точные соотношения между координатами профиля мениска.

Ключевые слова: капиллярный мениск, поверхностное натяжение, размерная зависимость, капиллярная поверхность, уравнение Лапласа, капиллярные явления, межфазные границы

Для цитирования: Сокуров А. А. Равновесная форма поверхности развернутого капиллярного мениска. *Конденсированные среды и межфазные границы*. 2023;25(1): 125–131. <https://doi.org/10.17308/kcmf.2023.25/10980>

For citation: Sokurov A. A. Equilibrium shape of rolled out meniscus. *Condensed Matter and Interphases*. 2023;25(1): 125–131. <https://doi.org/10.17308/kcmf.2023.25/10980>

✉ Сокуров Аслан Артурович, e-mail: asokuroff@gmail.com

© Сокуров А. А., 2023



1. Введение

Развернутые мениски, наряду с лежащими/висящими каплями и жидкими мостиками, относятся к числу основных типов осесимметричных капиллярных менисков. Обычно их можно наблюдать при неполном погружении цилиндрического стержня или шарообразного тела в жидкость. Вследствие смачивания поверхность жидкости искривляется, принимая определенную форму. Малый объем жидкости, который теперь начал возвышаться над нулевым уровнем, и есть развернутый мениск. В англоязычной литературе такие капиллярные системы называются по-разному – «островки» (holms), «стержневые мениски» (rod menisci) и др. В русскоязычной можно встретить название «шейка». Нами же используется терминология, принятая в монографии [1]. Отличительной чертой данного типа менисков служит поверхность, асимптотически переходящая в горизонтальную плоскость по мере удаления от линии смачивания.

Исследование физических проблем, связанных с развернутыми менисками, имеет большую теоретическую и практическую ценность [2–6]. Их конфигурации встречаются, например, в экспериментах по определению величин поверхностного и линейного натяжений, при изучении явлений смачивания и растекания, в технологиях по выращиванию монокристаллов из расплавов (способы Чохральского и Степанова), при изучении явлений тепломассопереноса и электропроводности в наносистемах, в теории флотации, зондовой микроскопии и литографии, нанофлюидике.

В подавляющем числе случаев, когда развернутый мениск привлекается в качестве модельного объекта, приходится сталкиваться с задачей о его равновесной форме. Суть задачи заключается в нахождении формы, принимаемой мениском во внешнем силовом поле. На основе ее решения можно сделать качественные и количественные выводы о закономерностях поведения некоторых процессов, протекающих на границе раздела несмешивающихся сред. Задача о равновесной форме в общей постановке не имеет точного решения. Поэтому принципиально важной следует считать также разработку численных методов, позволяющих в тех или иных ситуациях с хорошей точностью рассчитывать профили развернутых менисков. Среди работ, посвященных данному вопросу, выделим [7–13]. В целом, развернутым менискам в литературе уделено значительно меньше внимания, нежели каплям и мостикам.

В настоящей работе рассматривается задача о равновесной форме развернутого мениска, находящегося в однородном гравитационном поле. Новизна подхода состоит в том, что при построении модели учитывается размерная зависимость поверхностного натяжения, которая описывается обобщенной формулой Толмена.

2. Размерная зависимость поверхностного натяжения

Поверхностное натяжение σ является важнейшей термодинамической характеристикой границы раздела фаз; его проявление обуславливает практически все капиллярные явления [1]. Хорошо известно, что величина поверхностного натяжения при прочих равных условиях зависит от кривизны межфазной поверхности [14–18]. Эту зависимость принято называть размерной. Физически причина этой зависимости кроется в изменении межатомных или межмолекулярных взаимодействий вблизи поверхности раздела фаз. В качестве примера можно указать, что энергии, которые требуются для испарения атомов или молекул из плоской и искривленной поверхностей, могут отличаться друг от друга в десятки раз. Если поверхность вогнута, то энергия испарения будет выше, чем в случае плоской границы. Для выпуклой поверхности энергия испарения оказывается меньшей (см. рис. 1).

Влияние размерной зависимости поверхностного натяжения сильнее всего сказывается в малоразмерных термодинамических системах, ввиду чего ее изучение особенно актуально для развития современных нанотехнологий. На данный момент с уверенностью можно сказать, что теория размерных эффектов составляет самостоятельное (далеко незавершенное) направление в физике межфазных явлений, кото-

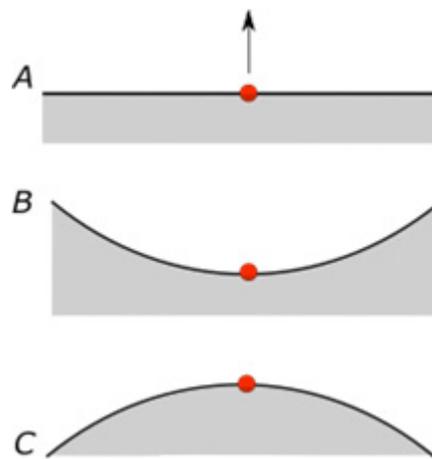


Рис. 1. Частица на границе раздела фаз

рое лежит в основе т. н. капиллярных явлений II-го рода (по терминологии Л. М. Щербакова).

Зависимость поверхностного натяжения для малой сферической капли дается хорошо известной формулой Толмена [14, 15]:

$$\sigma = \frac{\sigma^{(\infty)}}{1 + \frac{2\delta}{R}}, \tag{1}$$

где $\sigma^{(\infty)}$ – поверхностное натяжение плоской границы раздела фаз, R – радиус капли, δ – неотрицательный параметр, характеризующий толщину межфазной области (длина Толмена). Для границ раздела с произвольной геометрией мы будем использовать обобщение формулы (1) [19]:

$$\sigma = \frac{\sigma^{(\infty)}}{1 + \delta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}, \tag{2}$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхности раздела фаз в главных направлениях. Как легко видеть из (2), $\sigma \rightarrow \sigma^{(\infty)}$ при $\delta \rightarrow 0$.

3. Теоретическая модель

Прежде чем перейти к выводу уравнений, обратим внимание на следующее. Обычно о размерной зависимости поверхностного натяжения принято говорить, когда объемы конденсированной фазы достаточно малы. Влияние же силы тяжести на форму мениска, напротив, существенно проявляется в области больших размеров. Т. е., там, где учитывается размерная зависимость поверхностного натяжения, наличие силы тяжести можно игнорировать, и наоборот. Однако с возрастанием температуры растет толщина межфазного слоя δ . Поэтому зависимость поверхностного натяжения от кривизны поверхности, по-видимому, должна сказываться и в макроскопических системах, например, вблизи критической точки. Во-вторых, в рассуждениях, проведенных ниже, ничто не мешает поле силы тяжести заменить искусственным однородным гравитационным полем с большей напряженностью; в задаче это повлияет только на численное значение всего лишь одного параметра. В любом случае представляет интерес вывести наиболее общие уравнения, которые учитывали бы одновременно и размерную зависимость поверхностного натяжения, и поле силы тяжести.

Рассмотрим развернутый мениск, образованный касанием вертикально расположенного цилиндра свободной поверхности жидкости.

Никаких ограничений относительно радиуса цилиндра в данной задаче нет. Он, однако, не должен быть настолько мал, чтобы макроскопическое описание мениска было уже неприменимо.

Связанная с профилем мениска система координат и принятые обозначения приведены на рис. 2: s – длина дуги профиля, отмеряемая от точки касания, φ – угол наклона касательной к профилю мениска с горизонтальной осью x , (x, z) – координаты произвольной точки профиля. В поле силы тяжести условие механического равновесия мениска определяется формулой Лапласа для избыточного давления [1]:

$$\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -|\rho_l - \rho_v|gz, \tag{3}$$

где ρ_l, ρ_v – плотности жидкой и газообразной фаз соответственно, g – ускорение свободного падения. Далее будем иметь ввиду, что величина поверхностного натяжения σ непостоянна как считалось раньше, а зависит от средней кривизны поверхности согласно формуле (2). После подстановки (2) в (3) получим:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{\beta z}{1 + \delta\beta z}, \tag{4}$$

где $\beta = |\rho_l - \rho_v|g / \sigma^{(\infty)}$ – капиллярная постоянная. Если поверхность обладает вращательной симметрией, ее главные кривизны определяются через меридиональное сечение $z(x)$:

$$\frac{1}{R_1} = \pm \frac{d^2z / dx^2}{\left[1 + (dz / dx)^2 \right]^{3/2}},$$

$$\frac{1}{R_2} = \pm \frac{dz / dx}{x \left[1 + (dz / dx)^2 \right]^{1/2}}.$$

Тогда, определившись со знаками, (4) перейдет в уравнение:

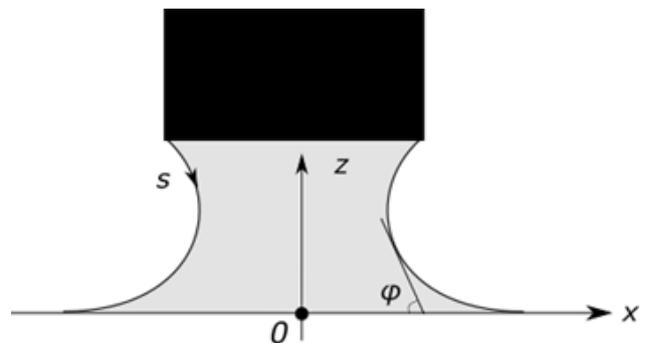


Рис. 2. Профиль мениска

$$\frac{d^2z / dx^2}{\left[1 + (dz / dx)^2\right]^{3/2}} + \frac{dz / dx}{x \left[1 + (dz / dx)^2\right]^{1/2}} = \frac{\beta z}{1 + \delta \beta z}. \quad (5)$$

Обычно к уравнению для профиля развернутого мениска добавляются краевые условия вида:

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = \tan(\pi - \varphi_0), \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x \rightarrow +\infty} = 0, \quad (6)$$

где x_0 – радиус зоны контакта, т. е. цилиндра, φ_0 – угол наклона касательной в точке $x = x_0$. Первое условие (6) обусловлено смачиванием жидкостью цилиндра, второе – асимптотическим вырождением поверхности мениска в плоскость при удалении от линии соприкосновения.

Главные кривизны поверхности вращения можно записать и по-другому:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \varphi}{x}. \quad (7)$$

Исходя из (7), основное уравнение (4) переписывается так:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\beta z}{1 + \delta \beta z} - \frac{\sin \varphi}{x}. \quad (8)$$

С другой стороны, для гладкой плоской кривой справедливы выражения:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dz}{ds} = -\sin \varphi. \quad (9)$$

Комбинируя (8) и (9), окончательно приходим к системе уравнений:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{(1 + \delta \beta z)x \cos \varphi}{\beta x z + (1 + \delta \beta z) \sin \varphi}, \quad (10a)$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{(1 + \delta \beta z)x \sin \varphi}{\beta x z + (1 + \delta \beta z) \sin \varphi}. \quad (10b)$$

Таким образом, равновесные профили развернутого мениска в поле силы тяжести и с учетом размерной зависимости поверхностного натяжения описываются решениями уравнений (5) или (10). Легко проверить, что в отсутствие размерных эффектов, когда параметр δ равен нулю, эти уравнения переходят в известные из литературы уравнения [1, 10]. Заметим, что здесь речь идет только об осесимметричных конфигурациях. В отсутствие симметрии математическая сторона вопроса сильно усложняется, и вместо обыкновенных дифференциальных уравнений возникают уравнения в частных производных.

Выписать аналитически общее решение (5) или (10) не представляется возможным, в связи с чем приходится обращаться к численным методам. Наиболее удобная методика численного моделирования профилей развернутых менисков [10] основана на линеаризации уравнения (5). Положим пока $\delta = 0$. Для больших значений переменной x выполняется неравенство $dz / dx \ll 1$. Поэтому, если в знаменателе пренебречь бесконечно малыми величинами более высокого порядка, (5) перейдет в уравнение:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} - \beta z = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11), обладающее горизонтальной асимптотой, дается выражением:

$$z(x) = C K_0(\sqrt{\beta x}), \quad (12)$$

где C – постоянная интегрирования, $K_0(y)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Функция (12) описывает только «хвост» профиля мениска, а он не особо интересен: $z \approx 0$. Чтобы найти лежащую в области малых x часть профиля, сначала необходимо при фиксированном C произвольному, но достаточно большому значению $x = x^*$, с помощью представления (12) подобрать соответствующие $z = z^*$ и угол $\varphi = \varphi^*$:

$$\varphi^* = \tan^{-1} \left[\sqrt{\beta} C K_1(\sqrt{\beta x}) \right],$$

где $K_1(y)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка. Затем набор чисел φ^* , x^* и z^* используется в качестве начальных данных задачи Коши для системы (10). Последняя эффективно решается, например, методами Рунге–Кутты или Адамса.

Однако описанная выше процедура не годится при $\delta > 0$, т. к. уравнение (5) не линеаризуемо прежним образом. В этом случае возьмем за основу систему (10). Проведем в ней замену $\psi = \pi - \varphi$:

$$\frac{dx}{d\psi} = -\frac{(1 + \delta \beta z)x \cos \psi}{\beta x z + (1 + \delta \beta z) \sin \psi}, \quad (13a)$$

$$\frac{dz}{d\psi} = \frac{(1 + \delta \beta z)x \sin \psi}{\beta x z + (1 + \delta \beta z) \sin \psi}. \quad (13b)$$

По свойству развернутого мениска $z \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow +\infty$. Значит, условия к (13) должны быть следующие:

$$x(\psi = \psi_0) = x_0 < +\infty, \quad z(\psi = \pi) = 0. \quad (14)$$

Задача (13)–(14) тоже относится к краевым задачам. Но в отличие от (5)–(6) она рассматривается на конечном отрезке $\psi \in [\psi_0, \pi]$ и ее численное решение методом стрельбы не вызывает никаких трудностей.

Для перехода в системе (13) к безразмерным координатам в качестве характерной величины целесообразно выбирать капиллярную длину $1/\sqrt{\beta}$. Поделив обе части каждого из уравнений (13) на $\sqrt{\beta}$, получим:

$$\frac{dX}{d\psi} = -\frac{(1+Z'')X \cos \psi}{XZ + (1+Z'') \sin \psi}, \tag{15a}$$

$$\frac{dZ}{d\psi} = -\frac{(1+Z'')X \sin \psi}{XZ + (1+Z'') \sin \psi}, \tag{15b}$$

$$X(\psi = \psi_0) = X_0, Z(\psi = \pi) = 0. \tag{16}$$

где $X = \sqrt{\beta}x$, $Z = \sqrt{\beta}z$ и $'' = \sqrt{\beta}\delta$. На рис. 3 проиллюстрированы типичные решения задачи

(15)–(16). Результаты трехмерного моделирования поверхности развернутого мениска можно видеть на рис. 4.

Выше было отмечено, что задача о равновесной форме капиллярной поверхности не разрешима аналитически. Сказывается сложная нелинейность уравнения Лапласа. Иногда, все же, удается упростить характер нелинейности и выписать разного рода точные формулы или аналитические приближения к теоретическому профилю. Например, в отсутствие внешних силовых полей капиллярная поверхность превращается в поверхность с постоянной средней кривизной. Лежащая (висящая) капля принимает сферическую форму, поверхность мостика – форму катеноида. Аналогично, если в уравнении равновесия (5) для развернутого мениска пренебрегать вкладом силы тяжести, положив $\beta = 0$, точным решением будет:

$$z(x) = C_1 \pm C_2 \ln(x + \sqrt{x^2 - C_2^2}), \tag{17}$$

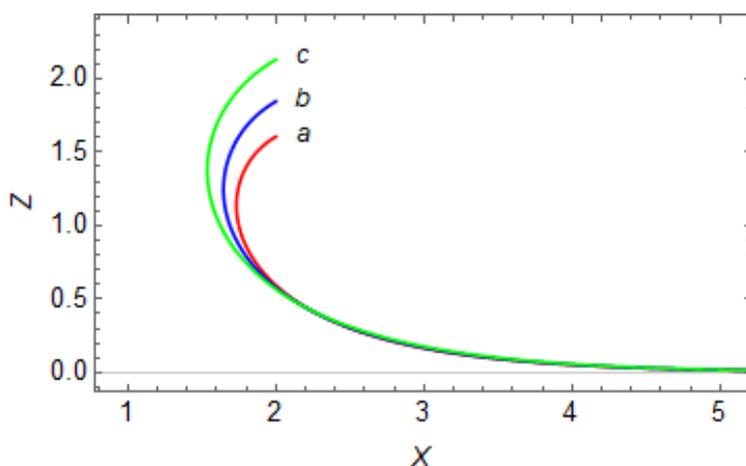


Рис. 3. Безразмерные профили мениска при $X_0 = 2$, $\psi_0 = 30^\circ$ и разных Δ : $a = 0$, $b = 0.4$, $c = 1$ $c = 1$

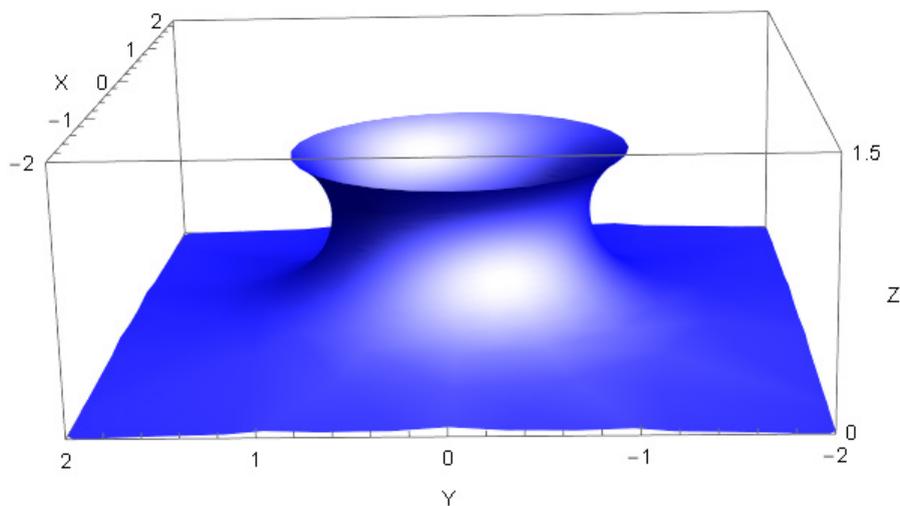


Рис. 4. 3D модель мениска

где $C_{1,2}$ – постоянные. В (17), однако, значение постоянной C_2 должно равняться нулю, иначе функция $z(x)$ окажется неограниченной. В итоге поверхность мениска вырождается в плоскость $z \equiv 0$. Данное тривиальное решение, очевидно, физического интереса не имеет. Вообще, в отличие от других основных типов менисков образование развернутого мениска в условиях полной невесомости принципиально невозможно – без воздействия силового поля жидкость ограниченного объема собирается в шар, и удовлетворить второе краевое условие (6) невозможно.

Более важным частным случаем являются двумерные (цилиндрические) мениски, у которых азимутальная кривизна $1/R_2$ в каждой точке равняется нулю: $\sin \varphi / x \approx 0$. Для развернутого мениска это приводит к соотношению между координатой z и углом φ :

$$\frac{z}{\delta} - \frac{\ln(1 + \delta\beta z)}{\beta\delta^2} = 1 - \cos \varphi. \quad (18)$$

Выразить из него z элементарным образом при положительных δ по-прежнему не удается. Приходится решать нелинейное уравнение, но оно уже скалярное, а не дифференциальное. Протабулировав с помощью (18) функцию $z(\varphi)$ в некотором диапазоне изменения угла φ , соответствующие значения x легко вычислить из определения производной.

Если параметр δ устремить к нулю, левая часть равенства (18) устремится к $\beta z^2 / 2$. Тогда из (10) и (18) получаются известные из литературы точные выражения для x и z [1]:

$$z = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad x = C - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\ln \tan \frac{\varphi}{4} + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right), \quad (19)$$

где константа C определяется условием $x(\varphi_0) = x_0$. Из (19) следует, что максимально возможная высота z_0 развернутого мениска составляет $2 / \sqrt{\beta}$, причем в независимости от величины x_0 . У трехмерных менисков максимальная высота, как правило, увеличивается при увеличении радиуса контактной линии.

С другой стороны, хотя из соотношения (18) z не удастся выразить аналитически, оно позволяет проанализировать характер зависимости максимальной высоты мениска z_0 от параметров β и δ . Подставим $\varphi = \pi$ в (18):

$$\frac{z_0}{\delta} - \frac{\ln(1 + \delta\beta z_0)}{\beta\delta^2} = 2. \quad (20)$$

Воспользовавшись теоремой о дифференци-

руемости неявной функции, из неявного уравнения (20) найдем:

$$\frac{dz_0}{d\beta} < 0, \quad \frac{dz_0}{d\delta} > 0,$$

т. е. увеличение δ сопровождается увеличением z_0 , а увеличение β – уменьшением. Заметим, что и с учетом размерной зависимости поверхностного натяжения максимальная высота z_0 мениска не зависит от x_0 . Не зависит от длины Толмена δ также и поведение z_0 при изменении капиллярной постоянной β .

4. Заключение

Равновесная поверхность развернутого капиллярного мениска в однородном гравитационном поле описывается решениями нелинейных дифференциальных уравнений и их систем. Учет размерной зависимости поверхностного натяжения приводит в уравнениях к появлению дополнительных членов, еще больше усложняющих характер нелинейности. Выписать их точные решения в общем виде невозможно. Поэтому для расчета профилей менисков необходимо использовать численные методы. Из-за специфических краевых условий применение многих численных приемов также ограничено. Наиболее практичная методика численного моделирования профилей развернутых менисков, основанная на линеаризации уравнения Лапласа, неприменима в присутствии параметра, отвечающего за размерную зависимость. Таким образом, остается иметь дело только с краевыми задачами. Однако при должном выборе переменной параметризации дуги профиля мениска область, где ищется решение, получается свести к ограниченному отрезку вместо бесконечной полуоси. Далее становятся доступными хорошо известные численные методы, например, метод пристрелки.

В настоящей работе проведены вычислительные эксперименты, целью которых являлось выявление степени и характера влияния параметров математической модели мениска на его равновесную форму. Из анализа их результатов, в частности, следует, что размерная зависимость поверхностного натяжения способна приводить к существенному искажению формы мениска.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет известных финансовых конфликтов интересов или личных отношений, которые могли бы повлиять на работу, представленную в этой статье.

Список литературы

1. Русанов А. И., Прохоров В. А. *Межфазная тензиометрия*. СПб.: Химия; 1994. 400 с.
2. Rapacchietta A. V., Neumann A. W., Omenyi S. N. Force and free-energy analyses of small particles at fluid interfaces: I. Cylinders. *Journal of Colloid and Interface Science*. 1977;59(3): 541–554. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(77\)90050-9](https://doi.org/10.1016/0021-9797(77)90050-9)
3. Ivanov I. B., Kralchevsky P. A., Nikolov A. D. Film and line tension effects on the attachment of particles to an interface: I. Conditions for mechanical equilibrium of fluid and solid particles at a fluid interface. *Journal of Colloid and Interface Science*. 1986;112(1): 97–107. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(86\)90072-X](https://doi.org/10.1016/0021-9797(86)90072-X)
4. Bozon A., Fries L., Kammerhofer J., Forny L., Niederreiter G., Palzer S., Salman A. Effect of heterogeneous hydrophobic coating on floating of insoluble particles. *Powder Technology*. 2022;395: 592–603. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.10.015>
5. Feng D., Nguyen A. Contact angle variation on single floating spheres and its impact on the stability analysis of floating particles. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2017;520: 442–447. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2017.01.057>
6. Klochko L., Mandrolko V., Castanet G., Pernot G., Lemoine F., Termentzidis K., Lacroix D., Isaiev M. Molecular dynamics simulation of thermal transport across solid/liquid interface created by meniscus. *arXiv*. 2021; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.11609>
7. Ward T. Evaporation driven detachment of a liquid bridge from a syringe needle in repose. *Physics of Fluids*. 2020;32: 084105. <https://doi.org/10.1063/5.0016257>
8. Lee J. The static profile for a floating particle. *Colloids and Interfaces*. 2018;2(2): <https://doi.org/10.3390/colloids2020018>
9. Huh C., Mason S. G. The flotation of axisymmetric particles at horizontal liquid interfaces. *Journal of Colloid and Interface Science*. 1974;47(2): 271–289. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(74\)90259-8](https://doi.org/10.1016/0021-9797(74)90259-8)
10. Huh C., Scriven L. E. Shapes of axisymmetric fluid interfaces of unbounded extent. *Journal of Colloid and Interface Science*. 1969;30(3): 323–337. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(69\)90399-3](https://doi.org/10.1016/0021-9797(69)90399-3)
11. O'Brien S. B. G. The meniscus near a small sphere and its relationship to line pinning of contact lines. *Journal of Colloid and Interface Science*. 1996;183(1): 51–56. <https://doi.org/10.1006/jcis.1996.0517>
12. Lo L. The meniscus on a needle – a lesson in matching. *Journal of Fluid Mechanics*. 1983;132: 65–78. <https://doi.org/10.1017/S0022112083001470>
13. Hyde A., Phan C., Ingram G. Determining liquid-liquid interfacial tension from a submerged meniscus. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2014;459: 267–273. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2014.07.016>
14. Русанов А. И. *Фазовые равновесия и поверхностные явления*. Л.: Химия; 1967. 388 с.
15. Tolman R. C. The effect of droplet size on surface tension. *The Journal of Chemical Physics*. 1949;17: 333–337. <https://doi.org/10.1063/1.1747247>
16. Рехвиашвили С. Ш., Киштикова Е. В. О размерной зависимости поверхностного натяжения. *Журнал технической физики*. 2011;81(1): 148–152. Режим доступа: <http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/10213>
17. Рехвиашвили С. Ш. Размерная зависимость поверхностного натяжения малой капли в предположении постоянства длины Толмена: критический анализ. *Коллоидный журнал*. 2020;82(3): 386–390. <https://doi.org/10.31857/s0023291220030088>
18. Burian S., Isaiev M., Termentzidis K., Sysoev V., Bulavin L. Size dependence of the surface tension of a free surface of an isotropic fluid. *Physical Review E*. 2017;95(6): 062801. <https://doi.org/10.1103/physreve.95.062801>
19. Сокуров А. А., Рехвиашвили С. Ш. Моделирование равновесных капиллярных поверхностей с учетом размерной зависимости поверхностного натяжения. *Конденсированные среды и межфазные границы*. 2013;15(2):173–178. Режим доступа: http://www.kcmf.vsu.ru/resources/t_15_2_2013_014.pdf

Информация об авторе

Сокуров Аслан Артурович, к. ф.-м. н., м. н. с. отдела теоретической и математической физики, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук» (Нальчик, Российская Федерация).

<https://orcid.org/0000-0001-9886-3602>
asokuroff@gmail.com

Поступила в редакцию 05.07.2022; одобрена после рецензирования 15.07.2022; принята к публикации 15.09.2022; опубликована онлайн 25.03.2023.