

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЯ КАПИЛЛЯРНОСТИ

© 2015 Н. Е. Енукидзе

Горный институт им. Г. Цулукидзе, ул. Е. Миндели, 7, 0186 Тбилиси, Грузия
e-mail: tmi@mining.org.ge

Поступила в редакцию 22.05.2015 г.

Аннотация. Работа посвящена приближенному решению интегральной формы уравнения капиллярности методом последовательных приближений. Получены формулы для вычисления ординат контура, объема, площади поверхности, контактного угла и радиуса кривизны в вершине капли как функции абсцисс и числа Бонда. Составлены таблицы погрешностей формул.

Ключевые слова: капиллярность, сидящая капля, контур капли, объем, площадь поверхности, краевой угол, число Бонда.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретической основой экспериментальных методов исследования межфазных процессов является уравнение капиллярности Лапласа. Аналитического решения этого уравнения не найдено. Обширный список математических работ, посвященных различным аспектам решения уравнения капиллярности (в том числе приближенные аналитические и численные решения), даны в [1—4]. Обширные таблицы численного решения уравнения капиллярности впервые составлены Башфортом и Адамсом [3]. Более подробные таблицы, но в узком диапазоне чисел Бонда, выполнены В. И. Мелик-Гайказяном [5, 6] для висящих капель и Д. В. Хантадзе и др. для сидящих капель [4]. В последнее время появились новые работы по приближенному аналитическому решению уравнения капиллярности [7, 8, 9]. Аналитические решения помогают в теоретических работах по теории капиллярности (оценка свободной энергии поверхности раздела, растекание, вычисление объема площади поверхности, расчет краевого угла капель) и при необходимой точности, облегчают экспериментатору вычисление выше перечисленных параметров висящих или лежащих капель и являются предпосылкой к созданию устройств непрерывной автоматической регистрации поверхностного натяжения и краевого угла. Цель нашей работы — попытка получения такого приближенного решения.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ КАПИЛЛЯРНОСТИ

В работе [9] была получена интегральная форма уравнения капиллярности (1) для тяжелой (плотность флюида капли больше плотности среды) висящей капли:

$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{1 - x + \frac{\beta}{4} \left[x^2 + 2 \int \left[\frac{\int y^2 dx}{y^2} \right] dx \right]}{1 - \frac{\beta}{2} \left[x - \int \frac{y^2 dx}{y^2} \right]} dx, \quad (1)$$

где x — абсцисса, y — ордината контура капли, а β — число Бонда.

Следует особо отметить, что система координат, использованная в работе [9] (рис. 1) и в данной работе, отличается от общепринятой (рис. 2) [1—8].

В выбранной нами системе координат для тяжелой висящей капли число Бонда β положительное, а для лежащей тяжелой капли — отрицательное. В дальнейшем все преобразования будем проводить для положительных значений β . Заменяя в полученных формулах β на $(-\beta)$, получим формулы для тяжелых сидящих капель.

Приведем последовательность преобразований, с помощью которых получено уравнение (1). Исходным является дифференциальное уравнение капиллярности (2), которое получено вариационным методом при дополнительном условии (3) постоянства объема капли.

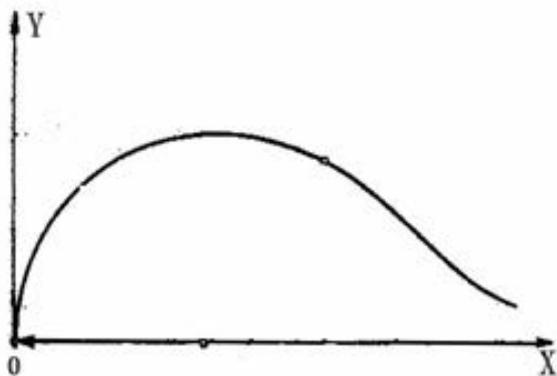


Рис. 1. Висящая капля. Система координат данной работы

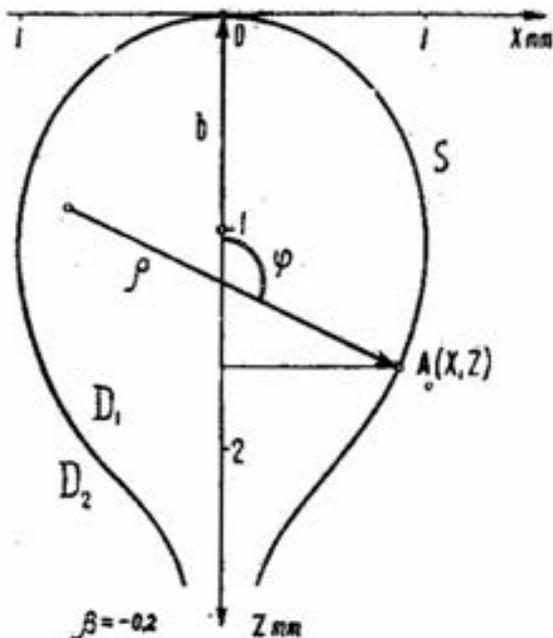


Рис. 2. Общепринятая система координат [1—8]

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} - \frac{y\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} + \beta xy - 2y = 0 \quad (2)$$

$$\int y^2 dx = const. \quad (3)$$

Интегрируя это уравнение по y переменной с учетом условий $y(0) = 0$ и $\dot{y}(0) = \infty$, получим:

$$\frac{1}{y\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{y^2} \int y^2 dx - x \right) + 1. \quad (4)$$

Вычитая (2) из (4) будем иметь:

$$\frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{y^2} \int y^2 dx + x \right) - 1. \quad (5)$$

Интегрирование уравнения (5) по x переменной дает:

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = \frac{\beta}{2} \int \left(\frac{1}{y^2} \int y^2 dx \right) dx + \frac{\beta}{4} x^2 - x + 1. \quad (6)$$

Делением (6) на (4) будем иметь:

$$y\dot{y} = \frac{1 - x + \frac{\beta}{4} \left[x^2 + 2 \int \left[\frac{\int y^2 dx}{y^2} \right] dx \right]}{\frac{1}{2} \left[x - \frac{\int y^2 dx}{y^2} \right]}. \quad (7)$$

Интегрированием уравнения (7) получим уравнение (1).

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КАПИЛЛЯРНОСТИ

В работе [9] для решения уравнения (1) были использованы степенные ряды. В первом приближении решение имеет вид:

$$Y^2 = 2 \left(1 + \beta / 6 \right) X - X^2 + 2\beta(1 - X) \text{LN}(1 - X/2) / 3. \quad (8)$$

Проверка этого приближения с использованием таблиц [5] показала, что для висящей капли при $\beta \leq 0.3$ и $x \leq 1.7$ погрешность в значениях $y(x, \beta)$ не превышает 3—5 %, а при вычислении максимального диаметра [6] при $\beta \leq 0.6$ погрешность меньше 1 %.

Для сидящих капель при малых значениях $|\beta| \leq 0.5$ относительная погрешность формулы (8) не более $3 \cdot 10^{-2}$, но заметно возрастает с ростом β . В тоже время, при изучении расплавов металлов, полимеров, стекол, шлаков, глазурей и т. д. используются большие сидящие капли и, следовательно, большие значения β .

Чтобы получить для больших β приближенное решение уравнения капиллярности (1), был использован метод последовательных приближений. В качестве первого приближения было использовано уравнение окружности:

$$Y^2 = 2X - X^2. \quad (9)$$

Обозначим через A числитель в формуле (7):

$$A = 1 - x + \frac{\beta}{4} \left[x^2 + 2 \int \left[\frac{\int y^2 dx}{y^2} \right] dx \right], \quad (10)$$

а знаменатель через B :

$$B = 1 - \frac{\beta}{2} \left[x - \frac{\int y^2 dx}{y^2} \right]. \quad (11)$$

Подстановка (9) в (10) и (11) дает:

$$A = 1 - x + \frac{\beta}{3} \left[x^2 - \frac{x}{2} - \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right]; \quad (12)$$

$$B = \left[\beta \frac{x^2}{3} - \frac{(2 + \beta)}{2} x + 2 \right] \frac{1}{(2 - x)} = \frac{B_1}{(2 - x)}, \quad (13)$$

где $B_1 = \beta x^2 / 3 - (2 + \beta) x / 2 + 2$.

В соотношении (12) разложим логарифм в ряд и ограничимся первыми двумя членами. Получим:

$$A \approx 1 - x + \frac{3\beta x^2}{8}. \quad (14)$$

После подстановки (13) и (14) в (1) будем иметь:

$$\frac{y^2}{2} \approx \int \frac{(2 - x) \left(1 - x + \frac{3\beta x^2}{8} \right)}{B_1} dx. \quad (15)$$

Можно показать, что выражение в числителе приводится к виду:

$$\begin{aligned} & (2 - x) \left(1 - x + \frac{3\beta x^2}{8} \right) = \\ & = (1 - x) B_1 + \beta x / 2 - \beta x^2 / 12 - \beta x^3 / 24 \end{aligned} \quad (16)$$

После подстановки в уравнении (15) соотношения (16) получим:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} &= \int (1 - x) dx + \frac{\beta}{2} \int \frac{x}{B_1} dx - \\ & - \frac{\beta}{24} \int \frac{x^2 (2 + x)}{B_1} dx + c, \end{aligned} \quad (17)$$

где c — постоянная интегрирования.

Первый член уравнения (17) легко интегрируется. Для интегрирования второго члена запишем B_1 в виде: $B_1 = \beta x^2 / 4 - (2 + \beta) x / 2 + 2 + \beta x^2 / 12$. Обозначим $\beta x^2 / 4 - (2 + \beta) x / 2 + 2 = B_2$, тогда выражение под интегралом запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{x}{B_1} &= \frac{x}{(B_2) + \frac{\beta x^2}{12}} = \frac{x}{(B_2) \left(1 + \frac{\beta x^2}{12 B_2} \right)} \approx \\ &\approx \frac{x}{B_2} \left(1 - \frac{\beta x^2}{12 B_2} \right) = \frac{x}{B_2} - \frac{\beta x^3}{12 B_2^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Полином B_2 запишем в виде:

$$B_2 = (\beta / 4)(4 / \beta - x)(2 - x), \quad (19)$$

где $4 / \beta$ и 2 корни квадратного трехчлена $x^2 - 2(2 + \beta)x / \beta + 8 / \beta$.

Ограничиваясь в выражении (17) первыми двумя членами, а в (18) первым членом, после подстановки (19) и (18) в (17) и интегрирования получим:

$$\begin{aligned} y^2 &= 2x - x^2 + 4 \int \frac{x}{\left(\frac{4}{\beta} - x \right) (2 - x)} dx = 2x - x^2 - \\ & - \frac{4}{(\beta - 2)} \left[2 \text{Ln} \left(1 - \frac{\beta x}{4} \right) - \beta \text{Ln} \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right] + C \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно граничному условию $Y(0) = 0$ и, следовательно, $C = 0$.

Изменив знак β , получим формулу для вычисления ординат для тяжелой сидящей капли:

$$y = \left[2x - x^2 + \frac{4}{(2 + \beta)} \left(2 \text{Ln} (1 + 0.25x\beta) + \beta \text{Ln} (1 - 0.5x) \right) \right]^{0.5}. \quad (21)$$

Для оценки погрешности уравнения (21) были использованы таблицы Башфорта-Адамса, составленные на основе численного решения уравнения капиллярности. В качестве независимой переменной авторы использовали угол ϕ между радиусом кривизны контура и осью вращения капли (рис. 1, 3), который изменяется в диапазоне $0 \leq \phi \leq 180^\circ$.

Погрешности вычисляли следующим образом: при фиксированных значениях β и ϕ выбирали табличные значения x_t и y_t , затем по формуле (21) вычисляли приближенные значения ординат y_k подстановкой x_t в формулу (21), а по формулам $dy_k = (y_t - y_k)$, $dy_k / y_k = (1 - dy_k / y_t)$ — абсолютную и относительные погрешности. Эти вычисления были проведены для значений β в диапазоне $0.125 \leq \beta \leq 20$. В табл. 1 приведены относительные погрешности для некоторых значений β . Как видно из таблицы, для всех приведенных значений β при $\phi \leq 90^\circ$ относительные погрешности малы, но при возрастании ϕ — возрастают. Для уменьшения погрешности при $\phi \leq 160^\circ$ в формуле (21) численный коэффициент 4, стоящий перед суммой логарифмов, можно заменить на 4.3. В этом случае, в конце диапазона ϕ погрешность уменьшается почти в три раза, но заметно возрастает в середине диапазона. В таблице даны значения y_k , рассчитанные при численном коэффициенте 4, перед суммой логарифмов.

ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЕМОВ СИДЯЩИХ КАПЕЛЬ

Интегрированием уравнения (20) получим величины объемов сидящих капель $V(x, \beta)$ для заданных значений x и β :

Таблица 1. Относительные погрешности ординат контура капли, рассчитанных по формуле (21) $K=4$

ϕ	$\beta=0.5$	$\beta=1$	$\beta=4$	$\beta=8$	$\beta=12$	$\beta=16$	$\beta=20$
5	-0.0003	5E-05	-0.00053	-0.0004	-0.0002967	-0.0003	-0.0004
15	-7E-06	-1E-05	-6E-06	-0.0002	-0.0003682	-0.0004	-0.0006
25	-2E-05	-8E-05	-0.00038	-0.0008	-0.0013473	-0.0018	-0.0023
35	-0.0001	-0.0003	-0.00114	-0.0022	-0.0032548	-0.0042	-0.0051
45	-0.0004	-0.0007	-0.00248	-0.0043	-0.0058049	-0.0071	-0.0083
55	-0.0009	-0.0016	-0.00435	-0.0068	-0.0086385	-0.0102	-0.0116
60	-0.0013	-0.0022	-0.00548	-0.0081	-0.0100873	-0.0117	-0.0131
65	-0.0018	-0.003	-0.0067	-0.0094	-0.0114653	-0.0131	-0.0146
70	-0.0024	-0.0039	-0.008	-0.0108	-0.0127694	-0.0144	-0.0158
75	-0.0032	-0.005	-0.00932	-0.012	-0.0139093	-0.0155	-0.0169
80	-0.0043	-0.0064	-0.01065	-0.0131	-0.01487	-0.0168	-0.0177
85	-0.0056	-0.0079	-0.01193	-0.014	-0.0155539	-0.0169	-0.0181
90	-0.0072	-0.0097	-0.01306	-0.0146	-0.0158851	-0.0171	-0.0182
95	-0.0091	-0.0117	-0.01399	-0.0148	-0.0158044	-0.0168	-0.0178
100	-0.0114	-0.0139	-0.0146	-0.0146	-0.0151943	-0.016	-0.0168
105	-0.0142	-0.0162	-0.01475	-0.0138	-0.0139653	-0.0145	-0.0152
110	-0.0174	-0.0186	-0.01431	-0.0123	-0.0119931	-0.0123	-0.0128
115	-0.0211	-0.021	-0.01307	-0.0099	-0.0091418	-0.0092	-0.0096
120	-0.0251	-0.0231	-0.01085	-0.0064	-0.0052781	-0.0051	-0.0054
125	-0.0295	-0.0246	-0.00737	-0.0018	-0.0002608	5.2E-05	-0.0002
130	-0.034	-0.0251	-0.00236	0.0043	0.00608939	0.00646	0.0063
135	-0.0381	-0.0242	0.004509	0.012	0.01392624	0.01429	0.01405
140	-0.0413	-0.021	0.013579	0.02154	0.02340856	0.02362	0.02325
145	-0.0423	-0.0148	0.0252	0.03315	0.03470186	0.03462	0.034
150	-0.0398	-0.0043	0.039732	0.04703	0.04794614	0.04739	0.04638
155	-0.0316	0.01178	0.057551	0.06337	0.06327758	0.06205	0.0605
160	-0.0149	0.03478	0.078996	0.08232	0.08082693	0.07865	0.07642
165	0.01334	0.0662	0.104351	0.10403	0.103211	0.09727	0.09416
170	0.05677	0.10744	0.133826	0.12857	0.1228094	0.11792	0.11376
175	0.11858	0.15961	0.167593	0.15597	0.14726434	0.14057	0.13516
180	0.20116	0.22345	0.205594	0.18618	0.17400169	0.16518	0.15833

$$\frac{V}{\pi} = x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{(2+\beta)} \left[\frac{8}{\beta} (1 + 0,25\beta x) \ln(1 + 0,25\beta x) - (2 + \beta)x \right] - \frac{4}{(2+\beta)} [\beta(2 - x) \ln(1 - 0,5x)] \quad (22)$$

Погрешности уравнения (22) для заданных значений абсцисс и чисел Бонда, рассчитывали, используя таблицы Башфорга—Адамса.

Расчеты показали, что в диапазоне $0.125 \leq \beta \leq 20$ относительные погрешности уравнения (22) не превосходят $2.5 \cdot 10^{-2}$ и значительно уменьшаются, если в формуле (22) знаменатель 3

в кубическом члене увеличить до 3.05 в диапазоне $0.125 \leq \beta \leq 2$, и до 3.1 в диапазоне $2 \leq \beta \leq 20$. Это важно при вычислении объема сидящей капли. В табл. 2 приведены относительные погрешности формулы (22) при значениях знаменателя кубического члена в указанном диапазоне.

Таблица 2. Относительные погрешности объема капель, рассчитанных по формуле (22)

ϕ	$\beta=0.5$	$\beta=1$	$\beta=4$	$\beta=8$	$\beta=12$	$\beta=16$	$\beta=20$
1	2	3	4	5	6	7	8
5	0.09444	0.09457	0.10491	-0.1057	-0.0926	-0.0797	-0.0668
15	0.00142	0.00089	-0.0013	0.00191	0.00115	0.00049	0.00035
25	0.00014	-0.001	0.00021	0.00031	0.00095	0.00176	0.00211
35	-0.0004	-0.0013	-0.0001	0.00113	0.00238	0.00357	0.00482
45	-0.0008	-0.0021	0.0002	0.00244	0.00436	0.00604	0.00754
55	-0.0012	-0.0028	0.00083	0.0041	0.00661	0.00871	0.01059
60	-0.0014	-0.0032	0.00126	0.0049	0.00772	0.00999	0.01196
65	-0.0016	-0.0035	0.00179	0.00578	0.00877	0.01123	0.01339
70	-0.0016	-0.0037	0.00233	0.00671	0.00989	0.01247	0.01468
75	-0.0017	-0.004	0.00287	0.00748	0.01082	0.01353	0.01582
80	-0.0016	-0.0041	0.0034	0.00828	0.01173	0.01448	0.01683
85	-0.0015	-0.0042	0.0039	0.00891	0.01242	0.01526	0.01769
90	-0.0013	-0.0042	0.00437	0.00945	0.013	0.01587	0.01836
95	-0.001	-0.0042	0.00474	0.00986	0.01338	0.01627	0.01872
100	-0.0006	-0.0042	0.005	0.01003	0.01361	0.01649	0.01896
105	-6E-05	-0.0041	0.00511	0.01008	0.0136	0.01645	0.01894
110	0.00051	-0.0041	0.00504	0.0099	0.01338	0.01621	0.01866
115	0.00114	-0.0041	0.00481	0.00951	0.01291	0.01574	0.01821
120	0.0018	-0.0042	0.00435	0.00889	0.01225	0.01505	0.01754
125	0.00246	-0.0044	0.00367	0.00803	0.01132	0.01413	0.01656
130	0.00308	-0.0047	0.00279	0.00697	0.01021	0.01299	0.01548
135	0.00362	-0.0052	0.00171	0.0057	0.00894	0.01172	0.01416

1	2	3	4	5	6	7	8
140	0.00401	-0.0058	0.00045	0.00429	0.00748	0.01025	0.01276
145	0.00423	-0.0066	-0.001	0.00277	0.00595	0.00873	0.01123
150	0.00425	-0.0076	-0.0025	0.00118	0.00436	0.00715	0.00969
155	0.00408	-0.0087	-0.004	-0.0004	0.00277	0.00562	0.00815
160	0.00373	-0.0098	-0.0055	-0.0019	0.00128	0.00414	0.00671
165	0.00328	-0.0109	-0.0069	-0.0033	-4E-05	0.00284	0.00544
170	0.00281	-0.0118	-0.008	-0.0044	-0.0011	0.0018	0.00443
175	0.00245	-0.0124	-0.0087	-0.0051	-0.0018	0.0011	0.00373
180	0.00229	-0.0127	-0.009	-0.0054	-0.0021	0.00087	0.00351

**ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ
КРАЕВЫХ УГЛОВ**

Из уравнений (6), (10) и (12) следует:

$$\sin \alpha = A \approx 1 - x + \frac{\beta}{3} \left[x^2 - \frac{x}{2} - \ln \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right] \quad (23)$$

где α угол касательной контура капли к оси X (ось вращения). В таблицах Башфорта—Адамса в качестве независимой переменной используется угол ϕ между осью вращения капли и радиусом кривизны контура капли (рис. 3). Из рисунка следует, что $\alpha + \phi = \pi/2$.

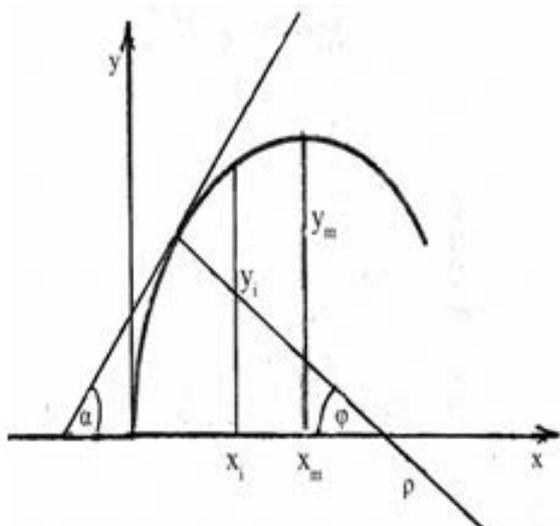


Рис. 3. Сидящая капля

Так как мы используем таблицы Башфорта—Адамса, то в уравнении (23) $\sin \alpha$ надо заменить

на $\cos \phi$ и следует поменять знак перед β , чтобы иметь уравнение для сидящей капли.

Погрешности уравнения (23) для заданных значений углов ϕ и чисел Бонда рассчитывали, используя таблицы Башфорта—Адамса, при значениях чисел Бонда $0.125 \leq \beta \leq 20$. Для определения погрешности по заданному углу ϕ вычисляли $\cos \phi$, затем по соответствующей абсциссе уравнением (23) вычисляли $\cos \phi_k$. Абсолютную погрешность d вычисляли по разности $d = \cos \phi - \cos \phi_k$, относительную — по формуле $1 - \cos \phi_k / \cos \phi$.

Расчеты показали, что погрешности уравнения (23) во всем исследованном диапазоне при $\phi \leq \pi/2$ не превосходят $2 \cdot 10^{-2}$ и значительно увеличиваются как с ростом ϕ , так и β . При $\beta = 20$ и $\phi \leq 2\pi/3$ относительная погрешность достигает величины 0.2. Но если в уравнении (23) численный коэффициент 0.333 перед третьим членом уравнения (23) увеличить до 0.37, погрешность при $\phi \geq \pi/2$ для всех исследованных значений β не превосходит $4 \cdot 10^{-2}$.

Результаты расчета погрешностей уравнения (23) для нескольких значений β при значении численного коэффициента перед третьим членом 0.37 приведены в табл. 3.

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ЧИСЛА БОНДА**

Как видно из рис. 3 при $x = x_m$ $y' = 0$ и следовательно согласно соотношениям (6) и (12)

$$A(x_m) = 0, \quad (24)$$

где x_m — абсцисса максимального диаметра капли y_m .

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЯ КАПИЛЛЯРНОСТИ

Таблица 3. Абсолютные погрешности косинуса краевых углов, рассчитанных по формуле (23)

ϕ	$\beta=0.5$	$\beta=1$	$\beta=4$	$\beta=8$	$\beta=12$	$\beta=16$	$\beta=20$
5	-2E-06	7.2E-07	-2E-06	1.8E-06	4.6E-06	6.9E-06	8.7E-06
15	2.5E-05	4.8E-05	0.00018	0.00031	0.00043	0.00053	0.00062
25	0.00018	0.00034	0.00111	0.00182	0.00232	0.00269	0.00298
35	0.00063	0.00118	0.00343	0.00508	0.00608	0.00675	0.00721
45	0.00159	0.00287	0.00733	0.01002	0.01144	0.01229	0.01285
55	0.00321	0.00558	0.01266	0.01616	0.01779	0.01866	0.01917
60	0.0043	0.00732	0.0157	0.01951	0.02112	0.02194	0.02237
65	0.00559	0.00929	0.0189	0.02289	0.02443	0.02514	0.02541
70	0.00704	0.01148	0.02217	0.02618	0.02759	0.02813	0.02829
75	0.00867	0.01384	0.02544	0.02935	0.03056	0.03087	0.03085
80	0.01042	0.01629	0.02856	0.03222	0.03314	0.03323	0.033
85	0.01229	0.01879	0.03144	0.03476	0.03533	0.03516	0.03466
90	0.01421	0.02125	0.03398	0.03683	0.03702	0.03655	0.03579
95	0.01612	0.02358	0.03607	0.03831	0.03816	0.03731	0.03636
100	0.01798	0.0257	0.03762	0.03925	0.03859	0.03746	0.03623
105	0.01967	0.02749	0.03855	0.03945	0.03836	0.03692	0.03542
110	0.02115	0.02884	0.03881	0.03893	0.0374	0.03564	0.03392
115	0.02229	0.02966	0.03826	0.03766	0.03572	0.03362	0.03168
120	0.02302	0.02984	0.03696	0.03562	0.03325	0.03094	0.02874
125	0.02321	0.02932	0.03488	0.03287	0.03018	0.02755	0.02525
130	0.02277	0.02801	0.03201	0.02939	0.02641	0.02364	0.02114
135	0.02159	0.02587	0.02841	0.02537	0.02209	0.01915	0.01661
140	0.01963	0.02292	0.02417	0.02079	0.01739	0.01437	0.01165
145	0.01689	0.0192	0.01946	0.01587	0.01233	0.00927	0.00655
150	0.01337	0.01486	0.01447	0.01074	0.00724	0.00414	0.00137
155	0.00921	0.01008	0.00936	0.00568	0.00222	-0.0009	-0.0036
160	0.00467	0.00516	0.00446	0.00091	-0.0025	-0.0055	-0.0083
165	0.00011	0.00047	2.1E-05	-0.0033	-0.0066	-0.0097	-0.0123
170	-0.004	-0.0036	-0.0036	-0.0068	-0.01	-0.0129	-0.0155
175	-0.0069	-0.0064	-0.0061	-0.009	-0.0122	-0.015	-0.0176
180	-0.0081	-0.0075	-0.007	-0.0099	-0.013	-0.0158	-0.0184

Используя условие (24), из уравнения (23) можно определить β . Заменив β на $(-\beta)$, получим формулу для тяжелой сидящей капли:

$$\beta = 2.666(x_m - 1) / [x_m^2 - 0.5x_m - \ln(1 - 0.5x_m)]. \quad (25)$$

Разложив логарифмический член в ряд и ограничившись первыми двумя членами, получим:

$$\begin{aligned} \beta &\approx 2,6(x_m - 1)(x_m)^2 = \\ &= k(x_m - 1) / (x_m)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

В диапазоне $0.125 \leq \beta \leq 100$ формула (26) дает достаточно высокую относительную погрешность: от $6 \cdot 10^{-3}$ до $8 \cdot 10^{-2}$. Если изменить в формуле (26) коэффициент k , например, на $k = 2.497$, то погрешность значительно понижается.

Погрешности формулы (26) при значениях коэффициента $k = 2.666$, $k = 2.5$ и $k = 2.497$ были вычислены с использованием таблиц Башфорта-Адамса [3] в диапазоне $0.125 \leq \beta \leq 100$. Результаты расчетов приведены в табл. 4.

Таблица 4. Относительные погрешности чисел Бонда, рассчитанных по формуле (26)

βt	X_{max}	$d\beta/\beta t$	$d\beta_1/\beta t$	$d\beta_2/\beta t$	$d\beta_3/\beta t$
1	2	3	4	5	6
0.125	0.95471	0.07059	-0.02308	0.06004	-0.00741
0.25	0.91656	0.00650	-0.02033	0.05946	-0.00796
0.5	0.85491	0.01098	-0.01597	0.05876	-0.00861
0.75	0.80641	0.01452	-0.01253	0.05848	-0.00888
1	0.76671	0.01732	-0.0098	0.05829	-0.00905
2	0.65717	0.02509	-0.00224	0.05844	-0.00891
3	0.58803	0.03011	0.00264	0.05905	-0.00834
4	0.53869	0.03384	0.00627	0.05981	-0.00763
5	0.50095	0.03683	0.00918	0.06061	-0.00688
6	0.47076	0.03931	0.01159	0.06139	-0.00615
7	0.44584	0.04135	0.01358	0.06207	-0.00552
8	0.42476	0.04320	0.01538	0.06278	-0.00485
10	0.39074	0.04635	0.01845	0.06414	-0.00357
15	0.3333	0.05207	0.02401	0.06694	-0.00095
20	0.29623	0.05627	0.02811	0.06934	0.00129
25	0.26966	0.05954	0.03128	0.07133	0.00316
30	0.24937	0.06213	0.03381	0.07297	0.00469
35	0.23317	0.06453	0.03615	0.07463	0.00624
40	0.21986	0.06647	0.03803	0.07595	0.00748
45	0.20865	0.06822	0.03973	0.07719	0.00864
50	0.19903	0.06986	0.04133	0.07840	0.00978
56	0.18912	0.07151	0.04294	0.07961	0.01090

1	2	3	4	5	6
60	0.18329	0.07263	0.04403	0.08047	0.01171
64	0.17799	0.07353	0.04490	0.08113	0.01233
70	0.17085	0.07484	0.04618	0.08213	0.01326
74	0.16654	0.07581	0.04712	0.08290	0.01399
80	0.16006	0.08589	0.05694	0.09276	0.02322
84	0.15709	0.07769	0.04895	0.08437	0.01536
90	0.15214	0.07888	0.05011	0.08534	0.01628
94	0.1491	0.07952	0.05073	0.08584	0.01674
100	0.14487	0.08040	0.05159	0.08654	0.01740

Обозначения в табл. 4:

β_t — значения чисел Бонда, использованные в таблицах Башфорта-Адамса;

X_m — абсцисса максимального диаметра лежащей капли для стоящего слева в таблице числа Бонда;

β — рассчитанные по формуле (25) величины чисел Бонда;

β_1 — рассчитанные по формуле (26) величины числа Бонда при значении $K = 2.666$;

β_2 — рассчитанные по формуле (26) величины числа Бонда при значении $K = 2.5$;

β_3 — рассчитанные по формуле (26) величины числа Бонда при значении $K = 2.496$;

$d\beta = (\beta_t - \beta_n) (n = 1, 2, 3)$ — абсолютная погрешность;

$d\beta_n / \beta_t = 1 - \beta_n / \beta_t$ — относительная погрешность.

ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ СИДЯЩЕЙ КАПЛИ

Площадь поверхности тел вращения дается формулой:

$$S = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (27)$$

Уравнение (4) с использованием обозначений уравнения (11) запишем в виде:

$$y \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{B}. \quad (28)$$

Согласно соотношениям (11), (18) и (28), уравнение (27) запишется в виде:

$$S = 2\pi \int \frac{(2-x)}{B_1} dx = \frac{8\pi}{\beta} \int \frac{1}{\left(\frac{4}{\beta} - x\right)} dx - \frac{8\pi}{3\beta} \int \frac{x^2}{\left(\frac{4}{\beta} - x\right)^2 (2-x)} dx \quad (29)$$

Во втором члене дробь $\frac{1}{2(1-0.5x)}$ разложим в ряд и ограничимся первыми двумя членами:

$$\frac{1}{2(1-0.5x)} \approx 0.5(1+0.5x). \quad (30)$$

После подстановки (30) в (29), интегрирования и несложных преобразований получим:

$$S = \frac{8\pi}{\beta} \ln(1+0.25\beta x) + \frac{\pi\beta}{36} x^3. \quad (31)$$

Для проверки уравнения (31) использовали данные работы [4]. Но тут мы столкнулись с непонятным для нас фактом: численные значения площади поверхности (S_i) сидящих капель из приложения 6 этой работы, как видно из табл. 6, с точностью до 1 % совпадали с рассчитанными по формуле (31) величинами S_k , при умножении S_i на 0.1. Поэтому относительную погрешность вычисляли по формуле $dS_k = 1 - S_k * 10 / S_i$.

В таблице 6 приведены рассчитанные по этой формуле погрешности вычисления площади поверхности сидящей капли для углов $\phi \leq 90^\circ$.

Чтобы убедиться в правильности уравнения (31), по этой же формуле (но поменяв знак β) рас-

считали площади поверхности висящих капель для двух значений β . Полученные результаты сравнивали с табличными данными работы [5], и вычис-

ляли относительные погрешности. Результаты вычислений даны в табл. 5.

Таблица 5. Погрешность вычисления площади поверхности висящей капли, рассчитанной по формуле (31) (знак β изменен)

	$\beta=0.1$				$\beta=0.25$		
xt	St	Sk	dSk	xt	Skt	Sk	dSK
0.04464	0.2806	0.28063	-0.0001	0.0446	0.2806	0.2806	-0.0001
0.23453	1.4778	1.47782	-0.0002	0.2336	1.4782	1.4783	0.0003
0.5436	3.4371	3.43711	0.00003	0.53936	3.4431	3.4433	-0.0001
0.92379	5.8618	5.86197	-0.0003	0.91509	5.896	5.8960	0.00001
1.41621	9.0054	9.0151	-0.001	1.41196	9.1636	9.1574	0.0007
1.7639	11.1818	11.2393	-0.0051	1.78844	11.5757	11.5668	0.0008
2.03517	12.7392	12.9663	-0.0178	2.12913	13.5522	13.6079	-0.0041
2.25423	13.4903	14.3517	-0.0638	2.44917	14.9524	15.2999	-0.0232
				3.00868	16.1813	17.3207	-0.0704

Таблица 6. Погрешность вычисления площади поверхности сидящей капли, рассчитанной по формуле (31)

ϕ	$\beta=0.5$	$\beta=1.5$	$\beta=3.5$	$\beta=7$	$\beta=22$	$\beta=38$	$\beta=54$
1	2	3	4	5	6	7	8
5	0.00082	-0.0007	0.00076	-0.0003	0.00082	-0.0005	0.00016
10	0.00034	-0.0004	0.00045	-2E-05	0.00034	0.00086	0.0014
15	0.00028	-1E-05	0.00019	-3E-06	0.00028	0.00196	-0.0029
20	0.0023	8.6E-06	0.00033	0.00023	0.0023	0.00424	0.00231
25	0.00387	-7E-06	0.00045	0.00076	0.00387	0.00705	0.00704
30	0.00576	3.5E-05	0.00035	0.00116	0.00576	0.01006	-0.2594
35	0.00736	5E-05	0.00068	0.002	0.00736	0.0129	0.04168
40	0.00976	0.00056	0.00089	0.00281	0.00976	0.0157	0.01852
45	0.01175	0.00064	0.00138	0.00406	0.01175	0.0181	0.02165
50	0.01365	0.0007	-0.4965	0.00504	0.01365	0.02047	0.02436
55	0.01536	0.00107	0.00291	0.0058	0.01536	0.02247	0.0267
60	0.01719	0.99001	0.00366	0.00674	0.01719	0.02443	0.02862

1	2	3	4	5	6	7	8
65	0.01879	0.00188	0.00453	0.00792	0.01879	0.0259	0.0301
70	0.02038	0.00263	0.00548	0.04386	0.02038	0.02746	0.03139
75	0.02176	0.00322	0.00661	0.011	0.02176	0.02864	0.0326
80	0.02276	0.00414	0.0078	0.01229	0.02276	0.02985	0.0336
85	0.02423	0.00544	0.00947	0.01377	0.02423	0.03105	0.03439
90	0.02604	0.0068	0.01096	0.01586	0.02604	0.03212	0.03523

ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАДИУСА КРИВИЗНЫ В ВЕРШИНЕ КАПЛИ

В уравнении (20) разложим логарифмические члены в ряд и ограничимся первыми тремя членами. Получим:

$$Y^2 = 2x - (1 + 0.25\beta)x^2 + \frac{\beta(2-\beta)}{24}x^3. \quad (32)$$

Поделим обе части уравнения на x^2 и запишем уравнение для сечения (рис. 3) i в виде:

$$\left(\frac{y_i}{x_i}\right) + (1 + 0.25\beta) - \frac{2}{x_i} = \frac{\beta(2-\beta)}{24}x_i. \quad (33)$$

Напишем аналогичное уравнение для сечения m :

$$\left(\frac{y_m}{x_m}\right)^2 + (1 + 0.25\beta) - \frac{2}{x_m} = \frac{\beta(2-\beta)}{24}x_m, \quad (34)$$

где X_m, y_m — абсцисса и ордината максимума контура капли.

После деления (33) на (34) и несложных преобразований получим:

$$\frac{A_i}{(1-k_i)} + (1 + 0.25\beta) = 2\frac{(1+k_i)}{x_i}, \quad (35)$$

где $A_i = \left(\frac{y_i}{x_i}\right)^2 - k_i\left(\frac{y_m}{x_m}\right)^2, k_i = \frac{x_i}{x_m}$.

Положим $i=1,2$. Получим два уравнения вида (33). Исключив член $(1+0.25\beta)$ из этих уравнений, после несложных преобразований получим:

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{c} \left(\frac{A_1}{1-k_1} - \frac{A_2}{1-k_2} \right), \quad (36)$$

$$C = 2 \left[(1+k_1)h - (1+k_2) \right], h = \frac{x_2}{x_1}.$$

Обозначим правую часть уравнения (36) через u и через z_i — измеряемое в эксперименте значение абсциссы контура капли. Тогда будем иметь:

$$x_i = \frac{z_i}{b} \text{ и } b = uz_2.$$

Абсолютную погрешность db определяли из соотношения $db \approx 1 - ux_2$. В диапазоне $0.125 \leq \beta \leq 8$ абсолютная погрешность не превосходит $3 \cdot 10^{-2}$.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Использованием интегральной и интегро-дифференциальных форм уравнения капиллярности получены приближенные формулы для вычисления геометрических параметров (ординат, объемов, радиуса кривизны в вершине, контактных углов, площади поверхности) и чисел Бонда для сидящей капли. Оценка погрешностей этих формул проведена для достаточно большого диапазона чисел Бонда $0.125 \leq \beta \leq 20$. Показано, что малые изменения численных коэффициентов в полученных формулах резко снижают погрешность во всем указанном диапазоне. Так как в экспериментах обычно изменение чисел Бонда происходит в более узком диапазоне, экспериментатор, заранее выбрав этот диапазон, имеет возможность уменьшить погрешность формул малым изменением численных коэффициентов. В принципе, изложенный материал является иллюстрацией того, как можно получить приближенные формулы использованием указанных уравнений. Для улучшения приближения можно использовать другие функции в качестве первого приближения, или интегрировать дополнительные члены в уравнениях, в которых используется разложение функции в ряд.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Финн Р. *Равновесные капиллярные поверхности*. М.: Мир, 1989, 310 с.
2. Адамсон А. *Физическая химия поверхностей*. М.: Мир, 1979, 568 с.
3. Bashforth F., Adams J. C. *An Attempt to Test the Theories of Capillary Action by Comparing the Theoretical and Measured Forms of Drops of Fluid*. Cambridge University Press, 1883, 158 p.
4. Хантадзе Д. В., Оникашвили Э. Г., Тавадзе Ф. Н. *Некоторые приложения теории капиллярности при физико-химическом исследовании расплавов*. Тбилиси, Мецниереба, 1971, 115 с.
5. Мелик-Гайказян В. И. // *Известия Томского политехнического института*, 1965, 136, с. 110—132.
6. Мелик-Гайказян В. И. // *Известия Томского политехнического института*, 1965, 136, с. 133—154.
7. Матюхин С. Ю., Фроленков К. Ю. // *Конденсированные среды и межфазные границы*, 2013, т. 15, № 3, с. 292—304.
8. Сокуров А. А., Рехвиашвили С. Ш. // *Конденсированные среды и межфазные границы*, 2013, т. 15, № 2, с. 173—178.
9. Енукидзе Н. // *Известия НАН Грузии, серия химическая*, 2014, т. 40, № 2—3, с. 153—159.

ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE INTEGRAL FORM OF THE CAPILLARITY EQUATION

© 2015 N. E. Enukidze

G. Tsulukidze Mining Institute, 7, E. Mindeli st., 0186 Tbilisi, Georgia
e-mail: tmi@mining.org.ge

Received 22.05.2015 г.

Abstract. In this paper it has been attempted to derive approximate formulas for calculation of main parameters of the sessile drop: ordinate contour, volume, contact angle, radius of curvature at the drop apex and Bond number as well. The essential feature required of formulas is that their error by an order of magnitudes must be same as the measurement error of the same parameters in experiments. For this purpose the integral and differential forms of the capillarity equation were used. For solution of the integral equation the method of successive approximations was applied. As a first approximation the equation of a circle was used. It should be emphasized that, as the independent variable the symmetry axis of the sessile drop was chosen. The approximate formulas for all abovementioned parameters were determined. The computation of errors of these formulas was carried out. As test values the data of Bashforth-Adams tables were taken and for estimation of error of surface area of sessile drops — data of V. I. Melik-Gaikazyan tables, as well as of D. Khantadze and others. The parameter values calculated using obtained formulas were compared with the tabulated ones and both absolute and relative errors in a range of Bond numbers in value $0.125 \leq \beta \leq 20$ were computed. The tables show, that at X -coordinate value $x \leq 0.8$, where H is the height of a sessile drop, error is no more than 1—2 %. The formulas allow to reduce the formula error in a more narrow range of β by small change of numerical coefficients in the formulas.

The presented material illustrates how to obtain approximate formulas by using mentioned equations. For improving approximation one can use the other functions as a first approximation too and integrate the additive terms in equations in which expansion of a function in a series is used.

Keywords: capillarity, sessile drop, contour of a drop, volume, surface area, contact angle, Bond number.

REFERENCES

1. Finn R. *Equilibrium Capillary Surfaces*. Grundlehren Series, vol. 284, Springer, New York, 1986. (Russ. ed.: Shapiro Z. Ya., Fomenko A. T. *Ravnovesnye kapillyarnye poverkhnosti*. Moscow, Mir Publ., 1989, 310 p.).
2. Adamson A. W. *Physical Chemistry of Surfaces*. John Wiley & Sons Inc, New York, 1967, 649 p. (Russ. ed.: Abidor I. G., Zorin Z. M., Muller V. M. *Fizicheskaya khimiya poverkhnosti*. Moscow, Mir Publ., 1979, 568 p.).
3. Bashforth F., Adams J. C. *An Attempt to Test the Theories of Capillary Action by Comparing the Theoretical and Measured Forms of Drops of Fluid*. Cambridge University Press, 1883, 158 p.
4. Khantadze D. V., Onikashvili E. G., Tavadze F. N. *Nekotorye prilozheniya teorii kapillyarnosti pri fiziko-kh-*

imicheskoy issledovaniy rasplavov. Tbilisi, Metsniereba Publ., 1971, 115 p.

5. Melik-Gaikazyan V. I. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo instituta*, 1965, 136, pp. 110—132.

6. Melik-Gaikazyan V. I. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo instituta*, 1965, 136, pp. 133—154.

7. Matyukhin S. Yu., Frolenkov K. Yu. *Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granitsy*, 2013, vol. 15, no. 3, pp.

292—304. Available at: http://www.kcmf.vsu.ru/resources/t_15_3_2013_012.pdf

8. Sokurov A. A., Rekhviashvili S. Sh. *Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granitsy*, 2013, vol. 15, no. 2, pp. 173—178. Available at: http://www.kcmf.vsu.ru/resources/t_15_2_2013_014.pdf

9. Enukidze N. *Bulletin of Georgian National Academy of Sciences, Chemical Series*, 2014, vol. 40, no. 2—3, pp. 153—159.

Енукидзе Николоз Евдокимович — химик-технолог, консультант Группы физико-химического анализа и технологии воды, Горный институт им. Г. Цулукидзе, Тбилиси, Грузия; тел.: +(995 99) 76 55 57; +(995 32) 295 55 23, e-mail: enuqniko@gmail.com

Enukidze Nikoloz E. — Chemist-Technologist, Consultant of the Group of Physical and Chemical Analysis and Technology of Water, G. Tsulukidze Mining Institute, Tbilisi, Georgia; ph.: +(995 99) 76 55 57; +(995 32) 295 55 23, e-mail: enuqniko@gmail.com