

ФОРМА КАПЕЛЬ ЖИДКОСТИ, ПОМЕЩЕННЫХ НА ТВЕРДУЮ ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

© 2013 С. И. Матюхин, К. Ю. Фроленков

Государственный университет — учебно-научно-производственный комплекс, Наугорское шоссе, 29,
302020 Орёл, Россия
e-mail: sim1@mail.ru

Поступила в редакцию 22.05.2013 г.

Аннотация. Представлен обзор существующих методов расчета равновесной формы капель, сидящих или висящих на гладкой горизонтальной поверхности в поле силы тяжести. Прослежена связь геометрических параметров капель с критическими углами смачивания, играющими важную роль с точки зрения экспериментального определения поверхностного натяжения.

Ключевые слова: форма капли, сидящая капля, висящая капля, твердая поверхность, критический угол смачивания (угол смачивания), поверхностное натяжение, межфазные границы, адгезионные свойства, энергетическое состояние, капиллярное давление, смачивание.

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день поверхностные явления являются одним из актуальных объектов исследования. Информация о поверхностном натяжении и состоянии поверхности играет определяющую роль в трибологии и жидкостной хроматографии, лежит в основе современных технологий вытеснения из пластов нефти и газа, флотационных методов обогащения полезных ископаемых, методов нанесения красок и покрытий, очистки жидкостей и газов от примесей, а также пропитки строительных и текстильных материалов специальными составами. Эти характеристики во многом определяют скорость образования зародышей новой фазы и существенно сказываются на эффективности теплообменных процессов. Изменение поверхностного натяжения под действием поверхностно активных веществ (ПАВ) используется при мойке и стирке, а также при бурении горных пород, механической обработке высокопрочных материалов и измельчении, обуславливая значительное сокращение энергозатрат на проведение этих операций. Поверхностные эффекты широко используются в металлургии и могут изменять биосовместимость различных жидкостей и полимеров, применяемых в современной медицине для протезирования. Огромное значение имеет поверхностное натяжение в биологических процессах.

Многие виды композитов и композиционных материалов формируются из жидкой дисперсионной среды — матрицы, обладающей той или иной вязкостью и твердой дисперсионной фазы — наполнителя, вводимого в систему тем или иным образом. Важное условие формирования таких гетерогенных систем — оптимальное соотношение между твердой и жидкой фазами. На практике, как правило, стремятся обеспечить максимальную концентрацию твердых частиц наполнителя в матрице. Очевидно, что для получения необходимой механической прочности таких материалов жидкая фаза должна в процессе их формирования охватить всю поверхность твердой частицы, внедриться в ее поры, и тем самым обеспечить максимально возможное молекулярное взаимодействие между матрицей и наполнителем. Следовательно, максимальная концентрация твердых частиц наполнителя в матрице помимо их размеров, формы и упаковки должна зависеть от смачивающей способности жидкой дисперсионной среды по отношению к поверхности твердых частиц, а значит от величины краевого угла смачивания жидкой фазой поверхности твердой.

Знание краевых углов, или точнее, критических углов смачивания дает информацию о поверхностном натяжении [1—12], а также об адгезионных свойствах веществ и энергетическом состоянии

атомов и молекул на межфазных границах [1—16]. Однако классическая теория явлений на межфазных границах [17—19], базирующаяся на двух физических параметрах — коэффициенте поверхностного натяжения жидкости и краевом угле смачивания жидкостью поверхности твердого тела не учитывает влияние на значения краевого угла и форму капель, сидящих или висящих на гладкой горизонтальной поверхности, гравитационных сил. Поэтому применение этой теории на практике, как правило, дает только качественные результаты.

Целью настоящего обзора основных методов расчета равновесной формы капель, сидящих или висящих на твердой горизонтальной поверхности в поле силы тяжести, явилось изучение возможности определения по их форме критических углов смачивания и поверхностного натяжения жидкости, что является важным как с точки зрения фундаментальной, так и прикладной науки.

1. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ КАПЕЛЬ, ОСНОВАННЫЕ НА ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Как известно [17], первые количественные исследования формы поверхности жидкости, соприкасающейся с твердой поверхностью, относятся к началу XIX века, когда были сформулированы закон постоянства краевого угла смачивания Юнга (1804 г., [18]) и закон капиллярного давления Лапласа (1806 г., [19]):

$$\Delta P = \sigma_{LG} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

где $\Delta P = P_L - P_G$ — разность давления P_L внутри жидкости и давления газа P_G снаружи, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности, σ_{LG} — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. При этом Юнг нашел также количественное соотношение, связывающее краевой угол θ с коэффициентами поверхностного натяжения межфазных границ твердое тело — газ σ_{SG} , твердое тело — жидкость σ_{SL} и жидкость — газ σ_{LG} (рис. 1):

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{SG} - \sigma_{SL}}{\sigma_{LG}}. \quad (2)$$

Уравнение (1), являясь, по сути, условием механического равновесия капли, может быть положено в основу численных методов расчета ее поверхности.

Будем считать, что распределение жидкости по твердой подложке определяется только поверхностными силами и силой тяжести. Тогда разность ΔP может быть выражена как линейная функция переменной z [1]:

$$\Delta P = \Delta P_0 \pm gz\Delta\rho, \quad (3)$$

где z — вертикальная координата точки, принадлежащей поверхности капли (рис. 1), ΔP_0 — разность давлений на плоскости $z = 0$, g — ускорение свободного падения, $\Delta\rho$ — разность плотностей капли и окружающего газа.

Знак «+» в выражении (3) и далее соответствует капле, сидящей на подложке (рис. 1а). Знак «-» — висящей капле (рис. 1б).

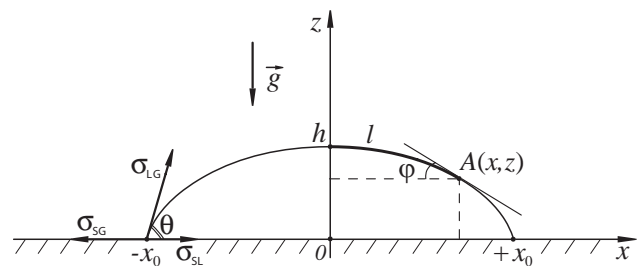


Рис. 1. Геометрия капли, сидящей (а) и висящей (б) на твердой горизонтальной поверхности

Принимая во внимание осевую симметрию капли, для её вершины можно записать: $R_1 = R_2 = R_0 = 1/b$, где R_0 и b — радиус кривизны и кривизна поверхности капли в вершине соответственно. Помещая начало координат в эту вершину, получим:

$$\Delta P_0 = \frac{2\sigma_{LG}}{R_0} = 2b\sigma_{LG}. \quad (4)$$

С учетом равенств (3) и (4) для обладающих осевой симметрией капель из (1) имеем:

$$\sigma_{LG} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2b\sigma_{LG} \pm gz\Delta\rho, \quad (5)$$

или, используя капиллярную постоянную $c = \pm g\Delta\rho / \sigma_{LG}$,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2b + cz. \quad (6)$$

В цилиндрической системе координат с осью симметрии z [1]:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{z'}{x(1+z'^2)^{1/2}}, \quad (8)$$

где $z' = dz/dx$, а $z'' = d^2z/dx^2$.

Таким образом, равновесная форма капель, обладающих осевой симметрией, определяется дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{x(1+z'^2)^{1/2}} = 2b + cz, \quad (9)$$

граничными условиями для которого являются краевой угол θ на межфазной границе твердая поверхность — жидкость и объём капли, который можно заменить её высотой.

Интересно, что путём перехода к новым безразмерным переменным X и Z , определяемым выражениями:

$$X = x\sqrt{c}, \quad Z = \left(z + \frac{2b}{c}\right)\sqrt{c}, \quad (10)$$

в которых величина c под корнем берется со знаком «+», уравнение (9) может быть преобразовано к автомодельному виду [20]:

$$\frac{Z''}{(1+Z'^2)^{3/2}} + \frac{Z'}{X(1+Z'^2)^{1/2}} = \pm Z. \quad (11)$$

Выражение (11) не содержит никаких параметров, кроме геометрических, то есть является универсальным для любых жидкостей и для любого поля тяжести $g \neq 0$.

Уравнение Лапласа (9) для случая сидящей капли было решено численно еще в 1883 году Бэшфортом и Адамсом [21]. Удивительно при этом, что эти авторы работы [21] произвели свои расчеты вручную и табулировали полученное решение для различных значений, так называемых чисел Бонда $\beta = g\Delta\rho R_0^2 / \sigma_{LG} = cR_0^2$, которые не имеют размерности и, по сути, являются мерой отклонения формы капель от сферической. Сегодня, в век компьютеров, любой студент может повторить вычисления Бэшфорта и Адамса в течение нескольких минут, причем, для любых наперед заданных

значений чисел Бонда β как для сидящей, так и для висящей капли.

Для этого удобно вернуться к уравнению (6) и перейти в нём от переменных R_1, R_2, x и z к новым переменным l, φ, x и z , где x — горизонтальная координата точки, принадлежащей поверхности капли, l — длина дуги на её поверхности, а φ — угол отклонения касательной к поверхности капли от горизонтальной оси Ox (рис. 1). Тогда, исходя из геометрических соображений, можно записать:

$$R_1 d\varphi = dl, \quad R_2 \sin \varphi = x \quad (12)$$

и представить равенство (6) в виде [10, 22]:

$$\frac{d\varphi}{dl} = 2b + cz - \frac{\sin \varphi}{x}. \quad (13)$$

Уравнение (13) совместно с геометрическими соотношениями:

$$\frac{dx}{dl} = \cos \varphi, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \varphi, \quad (14)$$

полностью определяет форму поверхности капли в поле силы тяжести.

Система уравнений (13) — (14) представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка для трех функций длины дуги l , которые должны решаться со следующими начальными условиями [10, 22]:

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{dl} \right|_{l=0} = b. \quad (15)$$

Решение этой системы может быть получено численными методами, например, в среде MathCAD или MatLab и позволяет легко определить объём V и площадь поверхности S обладающей осевой симметрией капли:

$$V = \int_0^L \pi x^2 \sin \varphi dl, \quad (16)$$

$$S = \int_0^L 2\pi x dl. \quad (17)$$

Максимальное значение L переменной интегрирования l задается критическим углом смачивания θ :

$$\varphi(L) = \theta. \quad (18)$$

Результаты вычислений, проведенных по формулам (13) — (18) для капель воды различного объема, представлены на рис. 2. Вычисления проводились в пакете MathCAD методом Рунге-Кутты четвертого порядка [23, 24].

Численное интегрирование уравнения Лапласа можно также произвести методом Эйлера [23, 24], исходя из уравнения (9) или (11). Для этого необходимо, например, уравнение (11) записать в так называемой стандартной форме, представив это уравнение второго порядка в виде пары уравнений первого порядка [20]:

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dX} = Y, \\ \frac{dY}{dX} = -\frac{Y(1+Y^2)}{X} \pm Z(1+Y^2)^{3/2}. \end{cases} \quad (19)$$

Удобным также может оказаться представление уравнения (11) в виде пары уравнений [25, 26]:

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\varphi} = \frac{X \cos \varphi}{\pm XZ - \sin \varphi}, \\ \frac{dZ}{d\varphi} = \frac{X \sin \varphi}{\pm XZ - \sin \varphi}, \end{cases} \quad (20)$$

в которых угол отклонения касательной к поверхности капли от горизонтали φ играет роль параметра.

2. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ КАПЕЛЬ

Следует отметить, что для определения равновесной формы поверхности жидкости часто бывает удобно использовать не условие равновесия, записанное в виде уравнения Лапласа (1), а решение вариационной задачи о минимуме полной энергии капли U [27—29], которую можно представить в виде суммы поверхностной энергии U_1 и потенциальной энергии жидкости U_2 в поле силы тяжести:

$$U = U_1 + U_2. \quad (21)$$

Рассмотрим плоское сечение капель, изображенных на рис. 1.

Поверхностную энергию U_1 таких капель (на единицу длины их контура) можно представить в виде:

$$U_1 = \int_{-x_0}^{x_0} \left[(\sigma_{SG} - \sigma_{SL}) + \sigma_{LG} \sqrt{1+z'^2} \right] dx \quad (22)$$

где величина x_0 представляет собой радиус капли (рис. 1).

Значение потенциальной энергии U_2 (также на единицу длины контура) можно записать как:

$$U_2 = \pm \frac{1}{2} g \Delta \rho \int_{-x_0}^{x_0} z^2 dx. \quad (23)$$

Таким образом, исходя из уравнений (21) — (23), значение полной энергии капли U можно представить в виде:

$$U = \sigma_{LG} \int_{-x_0}^{x_0} \left[\frac{\sigma_{SG} - \sigma_{SL} + \sigma_{LG}}{\sigma_{LG}} + \sqrt{1+z'^2} + \frac{cz^2}{2} \right] dx. \quad (24)$$

При условии постоянства площади поперечного сечения капли задача о форме её поверхности сводится к определению минимума функционала (24). По-видимому, впервые точное решение этой задачи для сидящей капли было получено в [30].

Чтобы найти минимум функционала (24), составим вспомогательный функционал:

$$U_\lambda = \sigma_{LG} \int_{-x_0}^{x_0} \left[\frac{\sigma_{SG} - \sigma_{SL} + \sigma_{LG}}{\sigma_{LG}} + \sqrt{1+z'^2} + \frac{cz^2}{2} - \lambda z \right] dx, \quad (25)$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Поскольку σ_{LG} , σ_{SG} и σ_{SL} при фиксированном значении температуры есть величины постоянные, минимум функционала (25) будет определяться подынтегральной функцией:

$$F = \sqrt{1+z'^2} + \frac{cz^2}{2} - \lambda z. \quad (26)$$

В свою очередь, условный минимум этой функции, как известно [31], определяется решением уравнения Эйлера — Лагранжа:

$$F'_z - \frac{d}{dx} F'_{z'} = 0, \quad (27)$$

которое в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} - cz + \lambda = 0. \quad (28)$$

Уравнение (28) имеет первый интеграл [31]:

$$F - z'F'_z = C_1, \quad (29)$$

который для нашего случая принимает вид:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} + \frac{cz^2}{2} - \lambda z = C_1. \quad (30)$$

Учитывая, что $1/\sqrt{1+z'^2} = \cos \varphi$ (рис. 1) и что при $z = 0$ угол $\varphi = \theta$, из (30) находим, что постоянная $C_1 = \cos \theta$.

Таким образом, выражение (30) может быть записано в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = -\frac{cz^2}{2} + \lambda z + \cos \theta. \quad (31)$$

Используя уравнение (31) и учитывая при этом, что при $z = z_{\max} = h$ угол $\varphi = 0$, находим, что неопределенный множитель Лагранжа λ определяется выражением:

$$\lambda = \frac{ch}{2} + \frac{1 - \cos \theta}{h}. \quad (32)$$

Подставив (32) в (31), получаем [30]:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = -\frac{cz^2}{2} + \left(\frac{ch}{2} + \frac{1 - \cos \theta}{h} \right) z + \cos \theta. \quad (33)$$

Решение уравнения (33) и будет определять равновесную форму поверхности капли.

Это решение может быть представлено в виде интеграла [30]:

$$x(z) = \int_0^z \frac{f(t)dt}{\sqrt{1+[f(t)]^2}} + C_2, \quad (34)$$

где в качестве $f(z)$ обозначена правая часть уравнения (33):

$$f(z) = -\frac{cz^2}{2} + \left(\frac{ch}{2} + \frac{1 - \cos \theta}{h} \right) z + \cos \theta. \quad (35)$$

Значение постоянной C_2 в выражении (34) зависит от выбора начала координат, и если выбрать это начало в точке, соответствующей левому краю капли (рис. 1), это значение может быть положено равным нулю: $C_2 = 0$, так как в этом случае $x(0) = 0$.

Анализ равенства (34) показывает, что с увеличением массы жидкости под действием возрастающей силы тяжести капля все больше деформируется (рис. 2). При этом увеличивается площадь контакта жидкости с твердой подложкой и возрастает высота капли h . Однако в случае сидящей капли при некотором критическом значении массы жидкости $m = m^*$, увеличение высоты капли прекращается, и при значениях $m > m^*$ высота $h = h^*$ остается постоянной [30]. Дальнейшее увеличение массы приводит только к росту площади контакта жидкости с твердой поверхностью и к увеличению плато — плоской горизонтальной части верхушки капли, которая все больше становится похожей на диск [32, 33]. Таким образом, появляется признак, по которому можно отличить сидящую каплю от тонкого слоя жидкости, свободно распределенной на горизонтальной твердой поверхности.

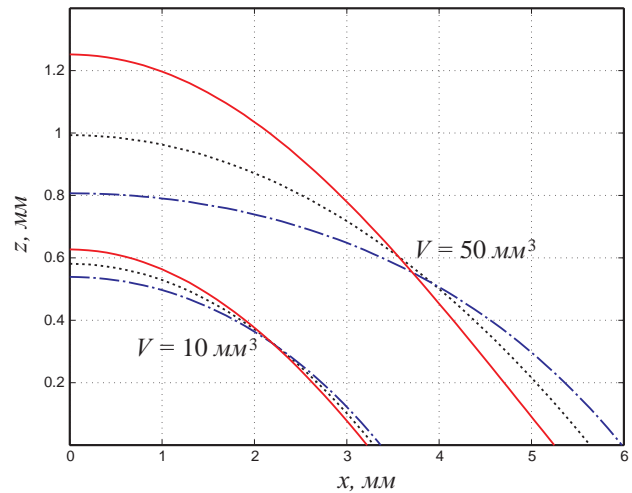


Рис. 2. Расчетная форма поверхности капель воды различного объема, сидящих (штрих-пунктир) и висящих (сплошные кривые) на горизонтальной подложке с критическим углом смачивания $\theta = 20^\circ$. Пунктирные кривые соответствуют сферической форме капель того же объема

Максимальное значение высоты капли h^* соответствует экстремальному значению множителя Лагранжа (32) [30]. Взяв производную $d\lambda/dh$ и приравняв её к нулю, из (32) находим:

$$h^* = 2a \sin(\theta/2), \quad (36)$$

что согласуется с результатами [32]. Таким образом, жидкость стремится распределиться по твердой поверхности так, чтобы толщина её слоя была равна h^* .

В качестве a в выражении (36) обозначена капиллярная длина $a = 1 / \sqrt{c} = \sqrt{\sigma_{LG} / g\Delta\rho}$, которая определяет характерные размеры капель, при которых начинают сказываться гравитационные эффекты. При $\theta \rightarrow 180^\circ$ (несмачивающая жидкость) толщина слоя $h^* \rightarrow 2a = 2\sqrt{\sigma_{LG} / g\Delta\rho}$; при $\theta \rightarrow 0^\circ$ (полное смачивание) $h^* \rightarrow 0$, т. е. жидкость стремится растечься по всей поверхности.

Радиус капли жидкости, как это следует из (34), равен:

$$x_0 = \int_0^h \frac{f(t)dt}{\sqrt{1+[f(t)]^2}}, \quad (37)$$

и, как и высота капли h , определяется её объемом V :

$$V = \pi \int_0^h [x_0 - x(z)]^2 dz. \quad (38)$$

Как показывает опыт [32, 33], при фиксированном значении краевого угла смачивания θ с увеличением массы жидкости увеличение высоты до предельного значения h^* сопровождается ростом радиуса основания капли x_0 практически по линейному закону. Это позволяет записать соотношение [30]:

$$x_0 = A_0 h \operatorname{ctg}(\theta / 2), \quad (39)$$

в котором A_0 — это коэффициент пропорциональности.

Степень согласия расчетов, произведенных по формулам (37) и (39) для воды при углах смачивания $\theta = 20^\circ$, можно оценить, исходя из рис. 3.

3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ КАПЕЛЬ

Как известно, численные методы решения задач в большинстве случаев проигрывают аналитическим. Вследствие этого появление точного аналитического решения задачи о форме капель (34) — (35) можно рассматривать как важное достижение математической физики последних десятилетий. В то же время это решение является достаточно сложным для анализа, так как оно представлено

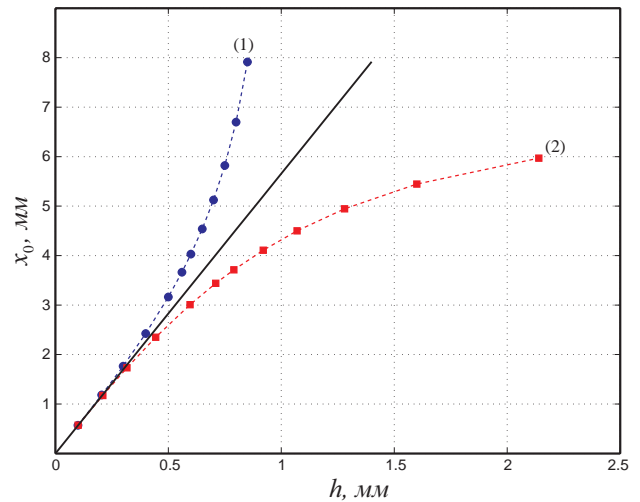


Рис. 3. Зависимость радиуса капли x_0 от её высоты h в случае сидящей (1) и висящей (2) капли воды при углах смачивания $\theta = 20^\circ$. Сплошная прямая соответствует расчетам, произведенным по формуле (39) при $A_0 = 1$

в интегральном виде (34). Поэтому имеет смысл рассмотреть некоторые приближенные методы описания поверхности капель, многие из которых появились задолго до работы [30].

В основе большинства из этих методов лежит разложение решения уравнения Лапласа (6) или функционала (25) по некоторому малому параметру задачи ϵ , роль которого в зависимости от условий могут играть числа Бонда β или обратные числа Бонда β^{-1} (при $\beta \gg 1$) [34—39]. Само же решение задачи о форме поверхности капли в этом случае может быть найдено, как это было впервые предложено Эрлихом [40], по теории возмущений.

Используя этот подход, автору работы [36] удалось получить следующее приближенное выражение для поверхности сидящей капли ($\beta \ll 1$):

$$r(\alpha) \approx R - \frac{cR^3}{3} \cos \alpha \ln(1 + \cos \alpha), \quad (40)$$

где r и α — координаты точки на поверхности капли в сферической системе координат, а R — максимальный радиус сечения этой капли в горизонтальной плоскости (рис. 4). Заметим, что этот радиус не имеет ничего общего с радиусом невозмущенной капли в отсутствие силы тяжести, так как и объем, и угол смачивания реальной капли будут отличаться от объема и угла смачивания невозмущенной капли, изображенной на рис. 4 пунктиром.

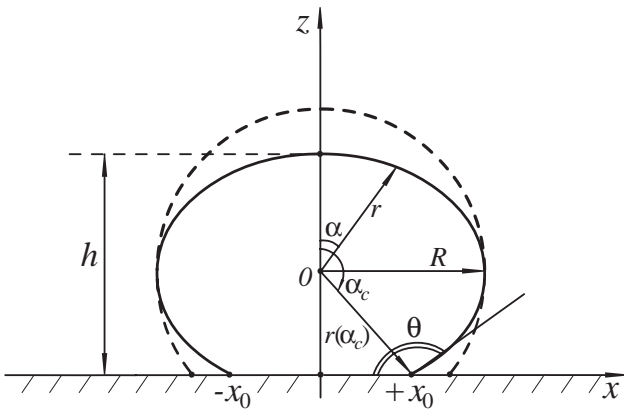


Рис. 4. Сидящая на горизонтальной поверхности капля в сферической системе координат (r, α)

Как показывают оценки [36], выражение (40) удовлетворительно описывает форму поверхности капли, если радиус её горизонтального сечения $R \leq \sqrt{\ln 2 / c}$. При этом критический угол смачивания θ равен:

$$\theta \approx \alpha_c - \frac{cR^2 \sin \alpha_c [(1 + \cos \alpha_c) \times \ln(1 + \cos \alpha_c) + \cos \alpha_c]}{(1 + \cos \alpha_c) [3 - cR^2 \cos \alpha_c \times \ln(1 + \cos \alpha_c)]}, \quad (41)$$

а объем капли V определяется выражением:

$$V \approx \frac{\pi R^3}{3} [1 - \cos \alpha_c]^2 \{2 + \cos \alpha_c - cR^2 [(1 + \cos \alpha_c)^2 \ln(1 + \cos \alpha_c) + 0.5]\}, \quad (42)$$

где α_c — максимальное значение угла α .

Это значение можно определить экспериментально, по радиусу капли на подложке x_0 и высоте капли h (рис. 4):

$$\operatorname{tg} \alpha_c = \frac{x_0}{r(0) - h} = \frac{x_0}{R - h - \frac{cR^3}{3} \ln 2}, \quad (43)$$

или, если непосредственное измерение x_0 по каким-либо причинам невозможно, путём решения трансцендентного уравнения:

$$h = r(0) + \frac{cR^3}{3} \cos^2 \alpha_c \ln(1 + \cos \alpha_c) - R \cos \alpha_c = R + \frac{cR^3}{3} [\cos^2 \alpha_c \ln(1 + \cos \alpha_c) - \ln 2] - R \cos \alpha_c, \quad (44)$$

которое является следствием простого геометрического соотношения (см. рис. 4):

$$h - r(0) = r(\alpha_c) \cos(\pi - \alpha_c) = -r(\alpha_c) \cos(\alpha_c) \quad (45)$$

Отметим, что полученные выражения справедливы также и для висящих капель при $\beta \ll 1$. Однако они плохо описывают форму таких капель вблизи подложки, т. е. при углах α , близких к α_c .

Похожие результаты, но несколько иными методами были получены в работе [6], в которой для поиска решения задачи о форме сидящей капли использовалось разложение:

$$r(\alpha) \approx R_0 [1 + \varepsilon p(\alpha)], \quad (46)$$

в котором ε — это малый параметр, а $p(\alpha)$ — функция, характеризующая отклонение формы капли от сферической.

Исходя из уравнения Лапласа (6), для $r(\alpha)$ было получено представление:

$$r(\alpha) \approx R_0 - \frac{cR_0^3}{3} \times \left[\cos \alpha \left(\frac{\ln(1 + \cos \alpha) - \ln 2 - 0.5}{- \ln 2 - 0.5} \right) + 0.5 \right]. \quad (47)$$

В отличие от (40) в это выражение вместо радиуса горизонтального сечения R входит радиус кривизны поверхности капли в её вершине R_0 . При этом объем капли V равен:

$$V \approx \frac{\pi R_0^3}{3} [1 - \cos \alpha_c]^2 \times \left(2 + \cos \alpha_c - cR_0^2 [(1 + \cos \alpha_c)^2 \ln(1 + \cos \alpha_c) - (\cos \alpha_c + 2)(\cos \alpha_c (\ln 2 + 0.5) - 1) - \ln 2] \right). \quad (48)$$

Сравнение выражений (42) и (48) позволяет записать следующее трансцендентное уравнение, связывающее величину R_0 с R :

$$R_0^3 \left(2 + \cos \alpha_c - cR_0^2 [(1 + \cos \alpha_c)^2 \ln(1 + \cos \alpha_c) - (\cos \alpha_c + 2)(\cos \alpha_c (\ln 2 + 0.5) - 1) - \ln 2] \right) \approx R^3 \{ 2 + \cos \alpha_c - cR^2 [(1 + \cos \alpha_c)^2 \times \ln(1 + \cos \alpha_c) + 0.5] \}. \quad (49)$$

В работах [26, 41, 42] разложение по малому параметру $\varepsilon = R/a$, впервые предложенное в [43], использовалось для приближенного решения уравнения Лапласа (11), записанного в параметрической форме (20). При этом было показано [26], что решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям $X(0) = 0$, $Z(0) = 0$ и $X(\pi/2) = 1$, с точностью до членов порядка ε^3 имеет вид:

$$\begin{aligned}
 X(\varphi) \approx & \varepsilon \left\{ \sin \varphi - \frac{\pi - \varphi}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\varepsilon^2}{3(\pi - \varphi)^2}} \right) \right\} + \\
 & + \frac{\varepsilon^3}{3} \left\{ \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{2}{(\pi - \varphi)} \right\} \\
 Z(\varphi) \approx & \varepsilon \left\{ 1 - \cos \varphi + \left(\frac{\pi - \varphi}{2} \right)^2 \times \right. \\
 & \left. \times \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8\varepsilon^2}{3(\pi - \varphi)^2}} \right) \right\} + \\
 & + \frac{\varepsilon^3}{3} \left\{ 1 + \cos \varphi - \cos^2 \varphi + \right. \\
 & \left. + 2 \ln \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8\varepsilon^2}{3(\pi - \varphi)^2}} \right] \right) \right\},
 \end{aligned} \quad (50)$$

или, в обычных переменных:

$$\begin{aligned}
 x(\varphi) \approx & R \left\{ \sin \varphi - \frac{\pi - \varphi}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8cR^2}{3(\pi - \varphi)^2}} \right) \right\} + \\
 & + \frac{cR^3}{3} \left\{ \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{2}{(\pi - \varphi)} \right\} \\
 z(\varphi) \approx & R \left\{ 1 - \cos \varphi + \left(\frac{\pi - \varphi}{2} \right)^2 \times \right. \\
 & \left. \times \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8cR^2}{3(\pi - \varphi)^2}} \right) \right\} + \\
 & + \frac{cR^3}{3} \left\{ 1 + \cos \varphi - \cos^2 \varphi + \right. \\
 & \left. + 2 \ln \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8cR^2}{3(\pi - \varphi)^2}} \right] \right) \right\}.
 \end{aligned} \quad (51)$$

К достоинствам выражений (52) и (53) относится тот факт, что они позволяют связать радиус капли x_0 , её высоту h и её объем V непосредственно с критическим углом смачивания $\theta = \varphi_{\max}$:

$$\begin{aligned}
 x_0(\theta) \approx & R \left\{ \sin \theta - \frac{\pi - \theta}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8cR^2}{3(\pi - \theta)^2}} \right) \right\} + \\
 & + \frac{cR^3}{3} \left\{ \cos^2 \theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{2}{(\pi - \theta)} \right\} \\
 h(\theta) \approx & R \left\{ 1 - \cos \theta + \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right)^2 \times \right. \\
 & \left. \times \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8cR^2}{3(\pi - \theta)^2}} \right) \right\} + \\
 & + \frac{cR^3}{3} \left\{ 1 + \cos \theta - \cos^2 \theta + \right. \\
 & \left. + 2 \ln \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8cR^2}{3(\pi - \theta)^2}} \right] \right) \right\},
 \end{aligned} \quad (52)$$

$$V(\theta) = \int_0^\theta \pi x^2(\varphi) \frac{dz(\varphi)}{d\varphi} d\varphi. \quad (53)$$

К недостаткам формул (52) и (53), а также выражений (40) — (44) и (54) — (56) следует отнести то обстоятельство, что они содержат радиус горизонтального сечения капли R , который становится неизмеримой величиной при $\theta \ll \pi/2$, т. е. для хорошо смачиваемых поверхностей.

На практике в этом случае приходится рассматривать R как подгоночный параметр и подбирать его методом итераций — так, чтобы расчетная форма капель наилучшим образом совпадала с наблюдаемой. Ещё одна возможность обойтись без R заключается в том, чтобы исключить эту величину из рассмотрения, используя независимые измерения радиуса капли x_0 и её высоты h , равенства (54) — (55) и численные методы.

Приближенные формулы, лишенные этих недостатков, которые описывают форму сидящих капель при малых углах смачивания $\theta < \pi/6$, были получены по теории возмущений в работе [44].

В этой работе производилась линеаризация уравнения Лапласа (9) путем разложения его решения по малому параметру z/x_0 . При этом было показано, что это решение имеет вид:

$$z(x) \approx \frac{V}{\pi x_0^2} \frac{I_0(x/a) - 1}{I_0(x_0/a) - 2aI_1(x_0/a)/x_0}, \quad (57)$$

где $I_0(y)$ и $I_1(y)$ — модифицированные функции Бесселя, соответственно, нулевого и первого порядка, a — капиллярная длина, а тангенс критического угла смачивания $\operatorname{tg}\theta = z'(x_0)$ определяется выражением:

$$\operatorname{tg}\theta \approx \frac{V}{\pi x_0^2 a} \frac{I_1(x_0/a)}{I_0(x_0/a) - 2aI_1(x_0/a)/x_0}. \quad (58)$$

При $x_0/a > 4$ формула (58) может быть записана в более простом виде [44]:

$$\theta \approx \frac{V}{\pi x_0^2 a} \frac{x_0}{x_0 - 3a/2}. \quad (59)$$

При $x_0/a < 1$ [44]:

$$\theta \approx \frac{4V}{\pi x_0^3}. \quad (60)$$

Последнее выражение соответствует сферическому приближению для формы капли [26, 44—46], в рамках которого предполагается, что возмущающим действием гравитационных сил можно пренебречь ($\beta \ll 1$), а капля имеет форму сегмента сферы радиусом R_0 (рис. 5).

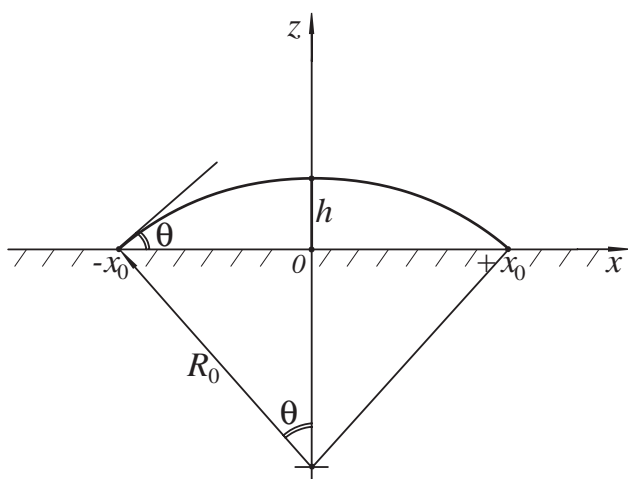


Рис. 5. Форма капли жидкости в сферическом приближении

В формулах (50) — (51) это соответствует предельному переходу $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$X(\varphi) \approx \varepsilon \sin \varphi, \quad Z(\varphi) \approx \varepsilon(1 - \cos \varphi), \quad (61)$$

или, в размерных переменных:

$$x(\varphi) \approx R_0 \sin \varphi, \quad z(\varphi) \approx R_0(1 - \cos \varphi). \quad (62)$$

Из (54) и (55) сразу получаем:

$$x_0(\theta) \approx R_0 \sin \theta, \quad (63)$$

$$h(\theta) \approx R_0(1 - \cos \theta), \quad (64)$$

откуда:

$$\frac{h}{x_0} \approx \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (65)$$

Отметим, что уравнения (62), задающие профиль сферической капли, могут быть записаны также в виде:

$$z(x) = R_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R_0}\right)^2} - (R_0 - h), \quad (66)$$

или, с учетом (63) и (64):

$$z(x) = x_0 \frac{\sqrt{1 - (x/x_0)^2 \sin^2 \theta} - \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (67)$$

Объем капли V в сферическом приближении равен:

$$V = \frac{\pi}{6} h (3x_0^2 + h^2) = \pi x_0^3 \frac{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2}{3 \sin^3 \theta}, \quad (68)$$

а площадь поверхности капли S определяется выражением:

$$S = 2\pi R_0 h = \frac{2\pi x_0^2}{1 + \cos \theta}. \quad (69)$$

Формулы (65) и (68) позволяют определить критический угол смачивания по двум независимым измерениям — по радиусу малой капли x_0 и её высоте h или по радиусу капли x_0 и её объёму V . При этом измерение объёма в случае малых капель оказывается предпочтительным, так как высота каплей становится трудно измеримой величиной, особенно в случае хорошо смачиваемых поверхностей ($\theta \ll 1$).

Для учета деформирующего воздействия гравитационных сил на тяжелые сидящие капли в ра-

ботах [47, 48] было предложено использовать эллипсоидальное приближение. В рамках этого приближения капля рассматривается как сегмент не сферы, а эллипсоида:

$$z(x) = p_1 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{p_2}\right)^2} - (p_2 - h), \quad (70)$$

где p_1 и p_2 — соответственно, большая и малая полуоси эллипса, а геометрические размеры этого эллипсоида определяются путём минимизации полной энергии U капли.

Эта энергия может быть представлена в виде [48]:

$$U(\vartheta, p_2 / p_1) = \pi R_0^2 \sigma_{LG} \left\{ \begin{aligned} & -\cos \theta f_1(\vartheta, p_2 / p_1) + \\ & + f_2(\vartheta, p_2 / p_1) + \\ & + \beta f_3(\vartheta, p_2 / p_1) \end{aligned} \right\}, \quad (71)$$

где R_0 — в данном случае радиус сферической капли эквивалентного объёма $V = 4\pi R_0^3 / 3$, величина ϑ имеет смысл критического угла смачивания, по которому производится минимизация,

$$f_1(\vartheta, p_2 / p_1) = \frac{2^{4/3} (1 + \cos \vartheta)}{(p_2 / p_1)^{2/3} \times} \times (1 - \cos \vartheta)^{1/3} \times (2 + \cos \vartheta)^{2/3},$$

$$f_2(\vartheta, p_2 / p_1) = \frac{p_2}{p_1} \frac{f_1(\vartheta, p_2 / p_1)}{\sin^2 \vartheta} \times \left\{ \frac{p_1}{p_2} - \cos \vartheta (1 + e^2 \cos^2 \vartheta)^{1/2} + \right. \quad (72)$$

$$\left. + \frac{1}{e} [\operatorname{arcsch}(e) - \operatorname{arcsch}(e \cos \vartheta)] \right\},$$

$$f_3(\vartheta, p_2 / p_1) = \frac{2^{2/3} (1 - \cos \vartheta)^{1/3} (3 + \cos \vartheta)}{3(p_1 / p_2)^{2/3} (2 + \cos \vartheta)^{4/3}}.$$

В качестве e в формулах (72) обозначен эксцентриситет эллипса $e = \sqrt{(p_1 / p_2)^2 - 1}$, а в качестве $\operatorname{arcsch}(x)$ — функция, обратная гиперболическому синусу.

Минимизация (71) производится численными методами, по двум параметрам — ϑ и p_2 / p_1 :

$$\frac{\partial U(\vartheta, p_2 / p_1)}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial U(\vartheta, p_2 / p_1)}{\partial (p_2 / p_1)} = 0. \quad (73)$$

При этом решение первого из этих уравнений с последующей заменой $\vartheta \rightarrow \theta$ определяет критический угол смачивания, а также радиус и высоту капли:

$$x_0(\theta) = p_1 \sin \theta, \quad (74)$$

$$h(\theta) = p_2 (1 - \cos \theta), \quad (75)$$

а решение второго — отношение полуосей эллипса. В свою очередь, знание этого отношения позволяет определить объём капли V :

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 h^2 (3p_2 - h) = \frac{p_2}{p_1} \frac{\pi x_0^3}{3 \sin^3 \theta} (1 - \cos \theta)^2 (2 + \cos \theta), \quad (76)$$

и площадь её поверхности S :

$$S = \pi p_1 p_2 \left\{ \frac{p_1}{p_2} - \left(1 - \frac{h}{p_2}\right) \left[1 + e^2 \left(1 - \frac{h}{p_2}\right)^2\right]^{1/2} + \right. \quad (77)$$

$$\left. + \frac{1}{e} \left[\operatorname{arcsch}(e) - \operatorname{arcsch} \left[e \left(1 - \frac{h}{p_2}\right) \right] \right] \right\} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\pi x_0^3}{\sin^2 \theta} \left\{ \frac{p_1}{p_2} - \cos \theta (1 + e^2 \cos^2 \theta)^{1/2} + \right. \quad (78)$$

$$\left. + \frac{1}{e} [\operatorname{arcsch}(e) - \operatorname{arcsch}(e \cos \theta)] \right\}.$$

При $\beta \ll 1$ формулы, полученные в эллипсоидальном приближении, переходят в выражения, соответствующие сферической форме капель. При $\beta \gg 1$, когда гравитационные эффекты доминируют, они приводят к результатам [48]:

$$x_0(\theta) = R_0 \left[\frac{2\beta^{1/2}}{3 \sin(\theta / 2)} \right]^{1/2}, \quad (78)$$

$$h(\theta) = 2R_0 \beta^{-1/2} \sin(\theta / 2). \quad (79)$$

Причем, выражение (79), как нетрудно заметить, совпадает с (36).

Следует отметить, что поиску приближенных решений задачи о форме висящих капель в литературе уделяется значительно меньше внимания, чем в случае задачи о сидящих каплях. Хотя, висящие капли и используются для определения критических углов смачивания и поверхностного натяжения не менее интенсивно, чем сидящие [7—11]. В связи с этим нельзя обойти стороной приближенные выражения, полученные в работе [30], которые в одинаковой степени справедливы как для сидящих, так и для висящих на горизонтальной поверхности капель.

Эти выражения дают удовлетворительную точность, когда определяемая формулой (35) функция $f(z) \ll 1$, т. е. для углов смачивания θ , близких к $\pi/2$, и для точек на поверхности капли, лежащих вдали от её вершины, при $z \ll h$. В этом случае знаменатель подынтегральной функции в формуле (34) может быть положен равным единице, а сама эта формула после интегрирования приобретает вид:

$$x(z) \approx -\frac{cz^3}{6} + \left(\frac{ch}{2} + \frac{1 - \cos \theta}{h} \right) \frac{z^2}{2} + z \cos \theta, \quad (80)$$

где за начало отсчёта координат, как и в выражении (34), принимается край капли: $x(0) = 0$.

Полагая в (80) $z = h$, для радиуса капли получаем оценку [30]:

$$x_0 \approx \frac{ch^3}{12} + \frac{h}{2}(1 + \cos \theta). \quad (81)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены методы решения задачи о форме капель, размещенных на идеально гладкой горизонтальной поверхности. В то же время следует иметь в виду, что реальные поверхности практически всегда являются шероховатыми, что не может не сказаться на их смачивании и, как следствие, на форме помещенных на такие шероховатые поверхности капель. В частности, как показывают эксперименты, если r — это фактор неровности поверхности подложки (отношение реальной площади поверхности к площади проекции поверхности на горизонтальную плоскость), числитель $(\sigma_{SG} - \sigma_{SL})$ в уравнении Юнга (2) в случае шероховатой поверхности должен быть заменен на $r(\sigma_{SG} - \sigma_{SL})$, а величина критического угла смачивания может принимать не какое-то определенное значение θ , а некоторое значение из диапазона $\theta_r < \theta < \theta_a$, причём, так называемый

гистерезис угла смачивания $\theta_a - \theta_r$ может достигать величины порядка 10° [49—53].

Мы не рассматривали также динамические эффекты при смачивании, которые выходят за рамки настоящей работы и о которых достаточно подробно написано в работах [49, 54—56]. Кроме того, в настоящей работе были рассмотрены методы определения формы капель, обладающих осевой симметрией, что также является идеализацией [4], так как реальные капли в большинстве случаев не обладают этой симметрией благодаря неоднородности поверхности, вследствие чего на практике приходится разрабатывать специальные методы работы с геометрическими параметрами капель. Примерами таких методов могут служить подходы, основанные на полиномиальной аппроксимации контура капель [57, 58], а также подходы, совмещающие в себе глобальную аппроксимацию формы капли с локальной аппроксимацией каких-либо её геометрических параметров [59].

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», ГК 14.740.11.0271.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адамсон А.* Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979. [Adamson A. W. Physical Chemistry of Surfaces. New York/London: Wiley, 1990.]
2. *Rotenberg Y., Boruvka L., Neumann A. W.* // J. Colloid Interface Sci. 1983. V. 93. P. 169.
3. *Kuiken H. K.* The Determination of Surface Tension by Means of the Sessile-Drop Method. New York: Springer-Verlag, 1990.
4. *Hoorfar M., Neumann A. W.* // J. Adhesion. 2004. V. 80. P. 727.
5. *Hoorfar M., Neumann A. W.* // Adv. Colloid Interface Sci. 2006. V. 121. P. 25.
6. *Stalder A. F., Melchior T., Muller M. et al.* // Colloids Surf. A. 2010. V. 364. P. 72.
7. *Huh C., Reed R. L.* // J. Colloid Interface Sci. 1983. V. 91. P. 472.
8. *Lopez de Ramos A., Redner R. A., Cerro R. L.* // Langmuir. 1993. V. 9 (12). P. 3691.
9. *Jůza J.* // Czechoslovak Journal of Physics. 1997. V. 47. № 3. P. 351.
10. *Del Río O.I., Neumann A. W.* // J. Colloid Interface Sci. 1997. V. 196. № 2. P. 136.
11. *Sumesh P. T., Govindarajan R.* // J. Chem. Phys. 2010. V. 133. P. 144707.
12. *Матюхин С. И., Фроленков К. Ю.* // Конденсированные среды и межфазные границы. 2003. Т. 5. № 2. С. 216.
13. *Матюхин С. И., Фроленков К. Ю., Антонов О. Н. и др.* // Труды 6-й Междунар. конф. «Пленки

и покрытия — 2001». С. — Петербург: Изд-во СПбГТУ, 2001. С. 577.

14. *Корепанов М. А.* // Вестник ИЖГТУ. 2006. № 1. С. 6.

15. *Мельников Г. А., Вервейко В. Н., Мельников В. Г. и др.* // Ученые записки: электронный научный журнал Курского государственного университета. 2012. № 1 (21).

16. *Tadmor R., Bahadur P., Leh A. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 266101.

17. *Herminghaus S.* // J. Phys.: Condens. Matter. 2005. V. 17. S261.

18. *Young T.* // Philosophical Transactions of the Royal Society. 1805. V. 95. P. 65.

19. *Laplace P. S.* Théorie de l'action capillaire. Supplément au dixième livre du traité de mécanique céleste. Paris: Courcier, 1806.

20. *Саранин В. А.* Равновесие жидкостей и его устойчивость. Простая теория и доступные опыты. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 73—76.

21. *Bashforth F., Adams J. C.* An Attempt to Test the Theories of Capillary Action. Cambridge University Press, 1883.

22. *Лесев В. Н.* // Тез. XV Всерос. школы-коллоквиума по стохастическим методам и IX Всерос. симпозиума по прикладной и промышленной математике. г. Волгоград. г. Волжский, 5—11 октября 2008 г. [<http://www.tvp.ru/conferen/vsppm09/kiprev564.pdf>].

23. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.

24. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Физматлит, 2001.

25. *Concus P.* // J. Fluid Mech. 1968. V. 34. P. 481.

26. *Srinivasan S., McKinley G.H., Cohen R. E.* // Langmuir. 2011. V. 27 (22). P. 13582.

27. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 335—337.

28. *Френкель Я. И.* // ЖТФ. 1948. Т. 19. № 7. С. 659.

29. *Несис Е. И., Токмаков В. И., Чигарева Т. С.* // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1967. № 2. С. 146.

30. *Марков И. И., Батулин М. В., Иванов М. Н. и др.* // Вестник Северо-Кавказского государственного технического университета. 2009. № 2 (19). С. 51.

31. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

32. *Padday J. F.* // Proc. of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. 1972. V. 330. Is. 1583. P. 561.

33. *Марков И. И., Батулин М. В.* // Циклы природы и общества. Материалы V Международной конференции. Ч.2. Ставрополь, 1997. С. 94—97.

34. *Chesters A. K.* // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. № 4. P. 609.

35. *Shanahan M. E.R.* // J. Chem. Soc., Faraday Transactions 1: Physical Chemistry in Condensed Phases. 1982. V. 78. P. 2701.

36. *Shanahan M. E.R.* // J. Chem. Soc., Faraday Transactions 1: Physical Chemistry in Condensed Phases. 1984. V. 80. P. 37.

37. *Shanahan M. E.R.* // J. Colloid Interface Sci. 1985. V. 106. № 1. P. 263.

38. *Rienstra S. W.* // J. Eng. Math. 1990. V. 24. № 3. P. 193.

39. *Homencovschi D., Geer J., Singler T.* // Acta Mechanica. 1998. V. 128. P. 141.

40. *Ehrlich R.* // J. Colloid Interface Sci. 1968. V. 28. № 1. P. 5.

41. *O'Brien S.B.G.* // J. Fluid Mech. 1991. V. 233. P. 519.

42. *O'Brien, S.B.G., van den Brule B. H.A.* // J. Chem. Soc. Faraday Transactions. 1991. V. 87. P. 1579.

43. *Padday J. F.* // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences. 1971. V. 269. № 1197. P. 265.

44. *Allen J. S.* // J. Colloid Interface Sci. 2003. V. 261. P. 481.

45. *Bikerman J. J.* // Ind. Eng. Chem. Anal. Ed. 1941. V. 13 (6). P. 443.

46. *Yang M.—W., Lin S.—Y.* // Colloids Surf. A. 2003. V. 220. P. 199.

47. *Whyman G., Bormashenko E.* // J. Colloid Interface Sci. 2009. V. 331. P. 174.

48. *Lubarda V.A., Talke K. A.* // Langmuir. 2011. V. 27. P. 10705.

49. *De Gennes P. G.* // Rev. Mod. Phys. 1985. V. 57. P. 827 [Де Жен П. Ж. // УФН. 1987. Т. 151. Вып. 4. С. 619].

50. *Tadmor R., Yadav P. S.* // J. Colloid Interface Sci. 2008. V. 317. P. 241.

51. *Tadmor R.* // Soft Matter. 2011. V. 7. P. 1577.

52. *He B., Patankar N. A., Lee J.* // Langmuir. 2003. V. 19 (12). P. 4999.

53. *Whyman G., Bormashenko E., Stein T.* // Chem. Phys. Lett. 2008. V. 450. P. 355.

54. Contact Angle, Wettability, and Adhesion / Ed. Gould R. F. Washington: American Chemical Society. Advances in Chemistry Series, 1964.

55. *De Ruijter M. J.; Blake T. D.; De Coninck J.* // Langmuir. 1999. V. 15. P. 7836.

56. *De Gennes P. G., Brochard-Wyart F.; Quere D.* Capillarity and Wetting Phenomena. Berlin: Springer, 2004.

57. *Del Rio O. I., Kwok D. Y., Wu R. et al.* // Colloids Surf. A. 1998. V. 143. P. 197.

58. *Bateni A., Susnar S. S., Amirfazli A. et al.* // Colloids Surf. A. 2003. V. 219. P. 215.

59. *Stalder A. F., Kulik G., Sage D. et al.* // Colloids Surf. A. 2006. V. 286. P. 92.

С. И. МАТЮХИН, К. Ю. ФРОЛЕНКОВ

Матюхин Сергей Иванович — декан естественно-научного факультета, Госуниверситет — УНПК; тел.: (4862) 419881, e-mail: sim1@mail.ru

Фроленков Константин Юрьевич — доцент кафедры химии и биотехнологии, Госуниверситет — УНПК; тел.: (4862) 419892, e-mail: sim1@mail.ru

Matyukhin Sergey I. — Dean of the Faculty of Natural Science, State University — Education-Science-Production Complex (State University ESPC); tel.: (4862) 419881, e-mail: sim1@mail.ru

Frolenkov Konstantin Yu. — Associate Professor of the Department of Chemistry and Biotechnology, State University — Education-Science-Production Complex (State University ESPC); tel.: (4862) 419892, e-mail: sim1@mail.ru