УДК 519.832.3
JEL C72

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ВЕРОЯТНОСТНОМ ВАРИАНТЕ ИГРЫ «ИНСПЕКЦИЯ»

Чернов Виктор Петрович, д-р экон. наук, проф.

Санкт-Петербургский государственный экономический университет, наб. канала Грибоедова, д. 30-32, литер А, Санкт-Петербург, Россия, 191023; e-mail: viktor_chernov@mail.ru

Предмет: оптимизация управленческих решений в различных информационных условиях приводит к разным результатам. Корректный анализ такого рода вопросов может быть эффективно проведен с привлечением модельного аппарата теории игр. *Цель*: анализ вариантов управленческих решений и исследование зависимости оптимальных решений от информационной основы в ситуациях, моделируемых игрой с вероятностными исходами. *Дизайн исследования*: предлагается обобщение и анализ известной игры «Инспекция» в вероятностной ситуации. Исследование процесса формирования решений в стохастической модели дает возможность выработки оптимальной стратегии в этих условиях. *Результаты*: сформированы оптимальные стратегии в стохастической игровой модели в условиях доступности и недоступности информации о результатах прошедших шагов многошаговой игры.

Ключевые слова: рекурсивные игры, матричные игры, ценность информации.

DOI: 10.17308/meps/2078-9017/2023/6/8-15

Введение

Игра «Инспекция» представляет собой многоходовую антагонистическую игру, моделирующую распределенное во времени взаимодействие двух лиц. В простейшем базовом варианте эта игры представлена в книге Оуэна [13], а также в работах [9, 11, 12].

Разнообразные модификации этой игры могут быть с успехом использованы при разработке оптимальной стратегии поведения [2, 3, 7, 10, 11]. В [8] был представлен ряд таких модификаций. Все они имели детерминированный характер. Здесь мы проведем исследование и развитие вероятностного варианта модели.

Как в исходном детерминированном, так и в новом вероятностном варианте игры «Инспекция» участвуют два игрока: Нарушитель (Игрок 1) и Инспектор (Игрок 2). Игра пошаговая, каждый ход игроков соответствует своему периоду времени. На каждом ходу Нарушитель может нарушить (или не нарушить) некое заранее сформулированное правило, а Инспектор может проверить (или не проверить) наличие нарушения. Если нарушение и проверка происходят в одном и том же периоде, то в вероятностном варианте игры нарушение выявляется с некоторой вероятностью. Если это происходит в разных периодах, то нарушение не выявляется. Таким образом, в исследуемом новом варианте модели выявление нарушения имеет вероятностный характер.

Напомним основные условия и обозначения.

Мы рассмотрим два варианта игры: один (рекурсивный), когда результаты очередного шага сразу становятся известны обоим игрокам, и другой (матричный), когда они неизвестны им до конца игры. Наряду с вариантом, когда игроки обязаны действовать, мы проанализируем вариант, когда они могут и бездействовать.

Игра продолжается N периодов времени (N шагов). Ожидаемую величину выигрыша первого игрока (Нарушителя) по результатам N-шаговой игры обозначим посредством V_N.

Нарушитель может на одном из шагов (не более, чем на одном) проявить свою активность – совершить нарушение. Инспектор тоже может на одном из шагов (не более, чем на одном) проявить свою активность – совершить проверку.

Нарушение может быть обнаружено, только если оно состоялось в одном периоде с проверкой. Вероятность выявления нарушения в такой ситуации обозначим посредством r (в [8] такая вероятность отсутствовала, можно считать, что она была равна 1).

Выигрыш Нарушителя, если он совершил нарушение и не был пойман, будем считать равным 1. Штраф, который уплачивает Нарушитель в случае поимки его Инспектором, равен некоторой положительной величине M, то есть выигрыш Нарушителя в этой ситуации отрицателен и равен $-M$.

Математическое ожидание L выигрыша Нарушителя в ситуации, когда Нарушитель и Инспектор проявили активность в одном и том же периоде времени, определяется равенством

$$L = -Mr + (1 - r) = 1 - r(M + 1). \qquad (1)$$

При $r = 0$ Нарушитель не ловится и его выигрыш равен 1 независимо от активности Инспектора. В этом случае собственно игровая ситуация отсутствует. В дальнейшем мы будем считать, что $r>0$.

При $r = 1$ получаем $L = -M$. Это минимальная величина выигрыша и этот случай был разобран в [8].

Таким образом,

$$-M \leq L < 1. \tag{2}$$

Величина *L* отрицательна, когда штраф *M* или вероятность обнаружения нарушения *r* достаточно велики, при

$$r(M+1) > 1. \tag{3}$$

Отрицательность величины *L* представляется естественной. Положительность *L* соответствует тому, что Нарушитель, даже сделав нарушение прямо в периоде проверки, все равно в среднем получает положительное вознаграждение.

Методы и результаты исследования

А. Игра «Инспекция» с обязательной активностью игроков.

В статье [8] показано, что в детерминированном варианте игры «Инспекция» с обязательной активностью игроков получение информации о результатах очередного шага не позволяет уточнить оптимальную стратегию игроков. В анализе вероятностного варианта игры можно применить ту же логику рассуждений. Повторять здесь те же рассуждения мы не будем, а сформулируем получаемые при этом результаты.

Каждый игрок имеет *N* чистых стратегий, соответствующих выбору того или иного периода времени для активного действия. Компоненты оптимальных смешанных стратегий игроков в вероятностном варианте игры определяются формулами:

$$p_1^{(N)} = \frac{1}{N}, \quad p_2^{(N)} = 1 - p_1^{(N)} = \frac{N-1}{N}. \tag{4}$$

В силу симметрии матрицы оптимальная стратегия Инспектора имеет аналогичный вид:

$$q_1^{(N)} = \frac{1}{N}, \quad q_2^{(N)} = 1 - q_1^{(N)} = \frac{N-1}{N}. \tag{5}$$

Отметим, что компоненты этих стратегий зависят от числа шагов игры *N*, но не зависят ни от величины штрафа *M*, ни от вероятности *r* выявления нарушения.

Цена игры V_N, в отличие от этого, зависит от величины штрафа *M* и вероятности обнаружения нарушения *r*:

$$V_N = 1 - \frac{r(M+1)}{N}. \tag{6}$$

Полученная формула цены игры учитывает вероятностный характер выигрыша и обобщает аналогичную формулу из [8].

При любой продолжительности игры *N* и любой положительной вероятности обнаружения нарушений *r* можно задать порог штрафа *M*,

$$M = \frac{N}{r} - 1, \tag{7}$$

при превышении которого ожидаемый размер выигрыша Нарушителя будет отрицательным.

Б. Игра «Инспекция» с возможной пассивностью игроков.

Рассмотрим другой формат вероятностного варианта игры «Инспекция», когда игроки могут проявить, но могут и не проявлять активность на протяжении всей игры. Оптимальная стратегия Инспектора сохраняется и при такой дополнительной возможности бездействия. Для Нарушителя же появление возможности бездействия может изменить стратегию.

К анализу вероятностного варианта игры можно применить ту же последовательность рассуждений, что была применена в статье [8] для детерминированного варианта. Мы не будем повторять здесь всю эту последовательность, а приведем ее основные шаги и получаемые при этом результаты.

Б1. Результаты очередного шага игры известны игрокам до перехода к следующему шагу (рекурсивное представление).

Для анализа воспользуемся сначала пошаговым рекурсивным представлением игры. При таком представлении матрица N-шаговой игры A_N в каждом периоде имеет размерность 2×2. Элементы матрицы – это результаты всей многошаговой игры для первого игрока – Нарушителя. Строки и столбцы – это стратегии игроков на первом шаге. Первая строка и первый столбец соответствуют активному поведению игроков («нарушить» и «проверить» соответственно), а вторая строка и столбец – их пассивному поведению.

При $N=1$ матрица A_1 имеет вид:

L	1
0	0

При произвольном $N>1$ матрица A_N имеет вид:

L	1
1	V_{N-1}

Поскольку $V_{N-1}<1$ (иначе Нарушитель выигрывал бы 1 наверняка), то эта матрица A_N не имеет седловой точки. Рассмотрим две ситуации, соответствующие разным знакам величины L.

Б1.1. Ситуация с $L \leq 0$; такая ситуация возникает, когда штраф M или вероятность обнаружения нарушения r достаточно велики.

Матрица A_1 при этом имеет седловую точку (нижний левый ноль). При $L<0$ седловая точка единственна, а при $L=0$ матрица имеет две седловые точки (оба элемента левого столбца), равные 0.

В соответствии с этим Инспектору следует проявить активность, а Нарушителю нужно бездействовать при $L<0$ или можно придерживаться любой стратегии при $L=0$. Во всех этих случаях цена игры

$$V_1 = 0\,. \tag{8}$$

Используя для антагонистической игры 2×2 формулы решения [1, 5, 6] на основе метода математической индукции получаем формулу

$$V_N = \frac{N-1}{N-L}. \tag{9}$$

Ее частным случаем при $r=1$ и $M=1$ является формула из книги [13].

Попутно найдем оптимальные смешанные стратегии игроков, определяющие вероятности выбора игроками соответствующей строки или столбца. Оптимальная стратегия Нарушителя для N-шаговой игры имеет вид:

$$p_1^{(N)} = \frac{1}{N-L}, \quad p_2^{(N)} = 1 - p_1^{(N)} = \frac{N-L-1}{N-L}. \tag{10}$$

Оптимальная стратегия Инспектора в силу симметрии матрицы имеет такой же вид:

$$q_1^{(N)} = \frac{1}{N-L}, \quad q_2^{(N)} = 1 - q_1^{(N)} = \frac{N-L-1}{N-L}. \tag{11}$$

Полученные стратегии (10), (11) и цена игры (9) отличаются от соответствующих результатов предыдущего формата игры (формулы (6), (4), (5)). Такое отличие обусловлено допущением пассивности игроков.

Б1.2. Ситуация, при которой $L > 0$. Такая ситуация возникает, согласно (1), когда штраф M или вероятность обнаружения нарушения r достаточно малы.

Согласно условию (2) в этом случае

$$0 < L < 1, \tag{12}$$

так что левый верхний элемент L является седловой точкой матрицы A_1.

Нарушителю и Инспектору следует проявить активность, и при этом ожидаемый выигрыш Нарушителя положителен,

$$V_1 = L. \tag{13}$$

В N-шаговой игре оптимальные стратегии игроков описываются формулами (9), (10), а размер выигрыша Нарушителя формулой (7).

$$p_1^{(N)} = \frac{1}{N}, \quad p_2^{(N)} = \frac{N-1}{N}. \tag{14}$$

$$q_1^{(N)} = \frac{1}{N}, \quad q_2^{(N)} = \frac{N-1}{N}. \tag{15}$$

$$V_N = 1 + \frac{L-1}{N}. \tag{16}$$

Полученные оптимальные смешанные стратегии не зависят ни от величины штрафа M, ни от вероятности r поимки Нарушителя Инспектором.

Б2. Матричное представление игры.

В матричном представлении результаты игры становятся известны игрокам лишь по ее окончании; по ходу игры информация о результатах очередного шага остается им недоступной.

Каждый из игроков может не предпринимать никаких действий или же проявить активность в одном из *N* периодов. Матрица игры *D* размерности *(N+1)×(N+1)* имеет вид:

0	0	0	…	0
1	L	1	…	1
1	1	L	…	1
…	…	…	…	…
1	1	1	…	L

Верхняя строка соответствует пассивному поведению Нарушителя, а левый столбец – пассивному поведению Инспектора на протяжении всей игры. Остальные строки и столбцы соответствуют проявлению активности в соответствующем периоде. Левый столбец матрицы *D* доминируется любым другим столбцом, так что Инспектору невыгодно быть пассивным ни в какой ситуации. Устраним левый столбец и рассмотрим оставшуюся матрицу *G* размерности *(N+1)×N*:

0	0	…	0
L	1	…	1
1	L	…	1
…	…	…	…
1	1	…	L

В матрице *G* можно выделить две части: нулевую верхнюю строку и симметричную нижнюю матрицу *B* размерности *N×N*.

Столбцы матрицы *G* равноправны, как стратегии второго игрока, так что в оптимальную смешанную стратегию они войдут с одинаковыми вероятностями, равными *1/N*.

Нижние *N* строк матрицы *G* равноправны, как стратегии первого игрока, так что в оптимальную смешанную стратегию они войдут с одинаковыми вероятностями. Верхняя строка дает нулевой вклад при любой смешанной стратегии игрока. Таким образом, оптимальную смешанную стратегию первого игрока следует искать в одном из двух видов: только первая строка (чистая стратегия) или равновероятная смесь последних *N* строк.

Первый вид стратегии дает выигрыш, равный 0. При втором виде размер выигрыша равен среднему арифметическому элементов матрицы *B*, то есть величине

$$1 + \frac{L-1}{N} \ . \qquad (17)$$

Нарушителю следует выбрать тот вид стратегии, который дает больший выигрыш из этих двух вариантов. Таким образом, выигрыш Нарушителя V_N в N-шаговой игре определяется формулой

$$V_N = max\,(1 + \frac{L-1}{N}\ ;0)\,. \tag{18}$$

Неравенство

$$1 + \frac{L-1}{N} \geq 0 \tag{19}$$

с учетом (1) равносильно неравенству

$$M \leq \frac{N}{r} - 1\ . \tag{20}$$

При любой, даже большой продолжительности игры N и любой, даже малой положительной вероятности поимки Нарушителя r, формула (20) определяет тот пороговый уровень штрафа, при превышении которого оптимальным поведением Нарушителя будет пассивное.

Заключение

Проведен детальный анализ оптимального поведения игроков в вероятностных вариантах игры «Инспекция» в различных условиях – в условиях обязательной активности и возможной пассивности игроков, в динамическом (рекурсивном) и статическом (матричном) формате игры, при различной величине штрафа и различной вероятности его начисления.

Список источников

1. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. Наука, 1985. 272 с.
2. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. *Введение в прикладную теорию игр*. 1981. 336 с.
3. Колесник Г.В. *Теория игр с приложениями к моделированию экономических систем*. URSS. 2022. 256 с.
4. Матричные игры / Под ред. Н.Н. Воробьева. 1961. Москва. 280 с.
5. Печерский Л.С., Беляева А.А. *Теория игр для экономистов: вводный курс*. Санкт-Петербург, ЕУ, 2001. 253 с.
6. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр. БХВ*. 2012. 432 с.
7. Позиционные игры / Под ред. Н.Н. Воробьева, И.Н. Врублевской. Москва, 1967. 524 с.
8. Чернов В.П. Варианты оптимальных решений в игре «Инспекция» // *Современная экономика: проблемы и решения. Научно-практический журнал*, 2022, no. 7 (151), с. 17-28.
9. Fudenberg D., Tirole J. *Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 1991.
10. Luce R.D., Raiffa H. *Games and decisions*. NY, 1957. [рус. перевод: Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. Москва, 1961].
11. Moulin H. *Theorie des jeux pour l'economie et la politique*. Paris. 1981. [рус. перевод: Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. Москва, Мир. 1985. 200 с.]
12. Osborne M.J., Rubinstein A. *A Course in Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 1994.
13. Owen G. *Game Theory*. NY: Academic Press. 1982 [рус. перевод: Оуэн Г. Теория игр. Москва, URSS. 2010. 216 с.]

OPTIMAL SOLUTIONS IN THE PROBABILISTIC VERSION OF THE GAME «INSPECTION»

Chernov Viktor Petrovich, Dr. Sc. (Econ.), Prof.

St. Petersburg State University of Economics, Griboedov canal emb., 30-32, St. Petersburg, Russia, 191023

Importance: optimization of management decisions in different information conditions leads to different results. A correct analysis of such issues can be effectively carried out with the involvement of the model apparatus of game theory. *Purpose*: analysis of variants of management decisions and study of the dependence of optimal decisions on the information basis in situations simulated by a game with probabilistic outcomes. *Research design*: a generalization and analysis of the well-known game «Inspection» in a probabilistic situation is proposed. The study of the process of decision-making in the stochastic model makes it possible to develop an optimal strategy in these conditions. *Results*: optimal strategies have been formed in the stochastic game model in the conditions of availability and inaccessibility of information about the results of the past steps of the multi-step game.

Keywords: recursive games, matrix games, value of the information.

References

1. Vorobyov N.N. *Teorija igr dlja economistov-kibernetikov* [Game theory for economists-cybernetics]. Nauka, 1985. 272 p. (In Russ.)
2. Dyubin G.N., Suzdal' V.G. *Vvedenie v prikladnuju teoriju igr* [Introduction to applied game theory]. 1981. 336 p. (In Russ.)
3. Kolesnik G.V. *Teorija igr s prilozhenijami k modelirovaniju ekonomicheskih sistem* [Game theory with economic system modelling] M.: URSS. 2022. 256 p. (In Russ.)
4. Matrichnye igry [Matrix games]. Red. N.N. Vorobyov. 1961. Moscow, Nauka. 280 p.
5. Pecherskij L.S. Belyaeva A.A. T*eorija igr dlja ekonomistov* [Game theory for economists]. SPb., EU. 2001. 253 p. (In Russ.)
6. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. *Teorija igr* [Game theory]. BHV. 2012. 432 p. (In Russ.)
7. Pozitsionnye igry [Positional games] Red. N.N. Vorobyov, I.N. Vrublevskaya. Moscow, Hauka. 1967. 524 p. (In Russ.)
8. Chernov V.P. Varianty optimalnyh reshenij v igre «Inspektsija»*. Sovremennaja ekonomika: problemy i reshenija* [The various possibilities of the optimal solutions in the game «Inspection». Modern economics: problems and solutions], 2022, no. 7 (151), pp. 17-28. (In Russ.)
9. Fudenberg D., Tirole J. *Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 1991. (In Eng.)
10. Luce R.D., Raiffa H. *Games and decisions*. NY, 1957. [рус. перевод: Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: 1961]. (In Eng.)
11. Moulin H. *Theorie des jeux pour l'economie et la politique*. Paris. 1981. (In Eng.)
12. Osborne M.J., Rubinstein A. *A Course in Game Theory*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 1994. (In Eng.)
13. Owen G. *Game Theory.* NY, Academic Press. 1982 [рус. перевод: Оуэн Г. Теория игр. М.: URSS. 2010. 216 с.] (In Eng.)