УДК 336.781.5

JEL C22, C32, E43, G17

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК НЕКОТОРЫХ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Пронин Лев Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доц.

Санкт-Петербургский государственный экономический университет, ул. Садовая, 21, Санкт-Петербург, Россия, 1981023; e-mail: lepronin@yandex.ru

Предмет: исследование зависимостей процентных ставок и связей между ними от финансовых потоков, с помощью которых осуществляются финансовые операции и достигаются их конечные результаты. *Цель*: вывод формул, связывающих эквивалентные ставки для финансовых операций накопления капитала и погашения кредита в зависимости от потоков платежей. *Дизайн исследования*: для упомянутых операций рассматриваются последовательно следующие потоки: единичные платежи, дискретные равномерные потоки, дискретные потоки платежей, изменяющихся по арифметическим прогрессиям, непрерывные равномерные потоки, непрерывные линейные потоки. Указана перспективность применения показательных потоков. *Результаты*: помимо выведенных формул или указания методов определения связей между ставками получены их некоторые качественные характеристики. Автор предлагает обсудить вопрос об исключении из финансовой практики всех видов сложных ставок с дискретными капитализациями и замене их сложными непрерывными ставками.

Ключевые слова: дискретные финансовые потоки, непрерывные финансовые потоки, накопление капитала, погашение кредита, простая ставка, сложная ставка.

DOI: 10.17308/meps/2078-9017/2023/12/8-21

Введение

Настоящая статья посвящена вопросу эквивалентности процентных ставок в финансовых операциях, более сложных, чем простой рост капитала.

В статье рассматриваются два типа финансовых операций: накопления капитала и погашения кредита. С каждой из этих операций связан определенный поток платежей, находящийся под воздействием начисления процентов (наращения или дисконтирования). С видами процентных ставок и способами их начисления можно ознакомиться, например, в работах [3], [5], [11]. Мы будем рассматривать дискретные и непрерывные потоки платежей. Дискретный поток определяется конечной последовательностью платежей α_i и моментов t_i их совершения в хронологическом порядке. Непрерывный поток определяется функцией плотности $\alpha(t)$ как предельного отношения объема платежей на бесконечно малом промежутке, содержащем момент t, к длительности этого промежутка. Начисление процентов в потоках платежей производится соответственно дискретно или непрерывно.

Потоки платежей широко используются при решении различных задач финансового менеджмента ([1], [2], [12]). Автором они использовались при исследовании чистой современной стоимости инвестиционных проектов [6], в задачах оптимизации процентных платежей [7], [10] и в других исследованиях.

Процентные ставки при различных способах начисления процентов на платежи данной финансовой операции в течение срока T называются эквивалентными или уравнивающими, если они дают в конце срока одинаковый результат. В нашем случае это будут одинаковая накопленная сумма или точное погашение кредита. Обратим внимание на зависимость понятия эквивалентности от срока. Для эквивалентных ставок p_1 и p_2 применяется обозначение: $p_1 \sim p_2$.

Отношение эквивалентности обладает тремя основными свойствами:

а) рефлексивность: $p \sim p$;

б) симметричность: если $p_1 \sim p_2$, то $p_2 \sim p_1$;

в) транзитивность: если $p_1 \sim p_2$ и $p_2 \sim p_3$, то $p_1 \sim p_3$.

Если сравнивать попарно ставки различных типов, то получим большое и избыточное количество формул. Однако, благодаря свойствам эквивалентности, достаточно вывести лишь базовые соотношения, связывающие заданную ставку с простой коммерческой (декурсивной) ставкой. Эта ставка, пересчитанная на год, называется эффективной и действующей только на сроке T.

Целью настоящей работы является вывод удобных для применения на практике аналитических формул, связывающих эквивалентные ставки в данной финансовой операции. При случайном внесении платежей получение таких формул невозможно, и задача решается либо приближенными, либо вероятностными методами. По этой причине в работе рассматриваются дискретные потоки: равномерные или с изменяющимися по арифметической прогрессии платежами, совершаемыми через равные промежутки времени, а также непрерывные потоки платежей с постоянными или линейными плотностями.

Основой для вывода формул для операции накопления будет уравнение $K_T(p_1) = K_T(p_2)$, связывающее конечные величины капитала в данной операции, рассчитанные по ставкам p_1 и p_2. В случае погашения кредита используется равенство величине кредита современных (начальных) стоимостей потока платежей по обеим ставкам.

Особенностью предмета изучения является то, что заданный результат большинства финансовых операций может быть получен бесконечным числом способов, что требует указания дополнительных параметров потоков платежей, начальных или краевых условий.

В формулах будут применяться безразмерные ставки. Непрерывная ставка в работе называется сложной непрерывной. Обозначения заимствованы из работы [4].

Методы и результаты исследования

Эквивалентность процентных ставок на дискретных потоках

<u>Финансовые операции с одним платежом</u>

Результаты этого пункта хорошо известны (см., например, [14], [9], [11]). Однако, считаем нужным в интересах целостности изложить основные положения.

Рассмотрим два случая: 1) накопление с помощью одного платежа K_0, произведенного в начальный (условно нулевой) момент времени, который вырастает по той или иной процентной ставке до значения K_T в конце срока; 2) погашение кредита K_0, выданного в начале срока, платежом K_T в конце срока. Все выведенные формулы для этих процессов идентичны. Действительно, взнос на депозит в банке может рассматриваться как кредит, выданный банку, и, наоборот, кредит от банка является для него средством накопления.

При установлении эквивалентности сложных ставок другим ставкам необходимо, чтобы срок наращения был кратен числу периодов капитализаций. Будут рассматриваться только регулярные капитализации. Базовыми являются формулы роста капитала при различных ставках.

Введем следующие обозначения для процентных ставок: p – простая коммерческая ставка одной единицы времени или указанного периода; q – простая учетная ставка одной единицы времени или указанного периода; p_m – сложная коммерческая ставка одного периода при заданном числе m капитализаций на рассматриваемом сроке; q_m – сложная учетная ставка одного периода при заданном числе m капитализаций на рассматриваемом сроке; $\bar{p}$ – сложная непрерывная процентная ставка одной единицы времени или указанного периода.

Мы установим пять основных связей между эквивалентными ставками. Для вывода формул используются уравнения эквивалентности, т.е. равенства величин капиталов в конце срока, а также формулы роста капитала.

1) Эквивалентность $p \sim q$. Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$K_0(1+pT) = \frac{K_0}{1-qT}\,.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$p = \frac{q}{1 - qT} \quad \text{и} \quad q = \frac{p}{1 + pT} \ .$$

2) Эквивалентность $p \sim p_m$. Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$K_0(1 + pT) = K_0(1 + p_m)^m$$

Отсюда находим:

$$p = \frac{(1 + p_m)^m - 1}{T} \quad \text{и} \quad p_m = \sqrt[m]{1 + pT} - 1.$$

Напомним, что простая ставка в этих формулах относится к единице времени, а сложная – к одному периоду между капитализациями. Не составляет труда пересчитать их на годовые.

3) Аналогично выводятся формулы, связывающие простую декурсивную и сложную учетную ставки:

$$p = \frac{1 - (1 - q_m)^m}{T(1 - q_m)^m} \quad \text{и} \quad q_m = \frac{1}{T}(1 - \sqrt[m]{\frac{1}{1 + pT}} \ .$$

На практике сложная учетная ставка применяется крайне редко.

4) Эквивалентность $p \sim \bar{p}$. Уравнение эквивалентности имеет вид

$$K_0(1 + pT) = K_0 e^{\bar{p}T}.$$

Следовательно,

$$p = \frac{e^{\bar{p}T} - 1}{T} \quad \text{и} \quad \bar{P} = \frac{\ln(1 + pT)}{T}.$$

Отметим зависимость выведенных четырех связей от срока роста капитала. Например, ставки, эквивалентные на сроке 5 лет, не будут таковыми на сроке 8 лет или на любом отличающемся сроке.

5) Рассмотренных четырех связей достаточно для установления условий эквивалентности любой пары ставок. Однако, нельзя не отметить еще одну эквивалентность, а именно, непрерывной и сложной декурсивной ставок при условии, что на сроке T помещается ровно m капитализаций. Непрерывную ставку $\bar{p}$ также отнесем к периоду между капитализациями. Уравнение эквивалентности:

$$K_0(1 + p_m)^m = K_0 e^{\bar{p}m}.$$

Отсюда получаем:

$$p_m = e^{\bar{p}} - 1 \quad \text{и} \quad \bar{p} = \ln(1 + p_m).$$

Таким образом, эквивалентные сложная коммерческая и сложная непрерывная ставки действуют на любом сроке T при условии, что он содержит целое число периодов. При этом, текущие стоимости капитала в узлах капитализаций для них совпадают. Такие ставки в работе [9] были названы вечно эквивалентными.

Отметим, что точно так же можно показать вечную эквивалентность сложной непрерывной и сложной учетной ставок. Преимущество сложной непрерывной ставки состоит в том, что она сочетает в себе одновременно свойства и учетной и коммерческой ставок. Другие полезные свойства этой ставки перечислены в работе автора [6], где она применялась для изучения функции чистой современной стоимости инвестиционного проекта.

<u>Равномерное дискретное накопление капитала</u>

Соответствующие дискретные потоки состоят из одинаковых взносов, совершаемых через равные промежутки времени.

В дальнейшем во всей статье будет рассматриваться эквивалентность только простой коммерческой и сложной непрерывной ставок. Действительно, выше было показано, что при простом росте капитала сложные дискретные ставки могут быть заменены эквивалентными сложными непрерывными ставками. Это свойство, по-видимому, сохраняется и в других финансовых операциях.

Рассмотрим процесс накопления постоянными вкладами a по схеме prenumerando. Пусть m – количество вкладов. Для удобства отнесем ставки p и $\bar{p}$ к промежутку между вкладами. Тогда накопленная под простой процент сумма будет равна:

$$K_T(p) = a(1+pm) + a(1+p(m-1)) + \cdots + a(1+p) = am + ap\frac{m(m+1)}{2} .$$

Сумма, накопленная под сложный непрерывный процент, будет равна:

$$K_T(\bar{p}) = a\left(e^{\bar{p}m} + e^{\bar{p}(m-1)} + \cdots + e^{\bar{p}}\right) = a\frac{e^{\bar{p}}(e^{\bar{p}m}-1)}{e^{\bar{p}}-1}.$$

Приравнивая эти значения, находим:

$$p = \frac{2}{m(m+1)}\left(\frac{e^{\bar{p}}(e^{\bar{p}m}-1)}{e^{\bar{p}}-1} - m\right).$$

Отметим, что эта связь не зависит от размера вкладов.

Непрерывная ставка не выражается удобной формулой через простую, но её можно вычислять приближенными методами, используя уравнение

$$z(z^m - 1) = \frac{1}{a}K_T(p)(z-1), \text{ где } \quad z = e^{\bar{p}} .$$

Рассмотрим также в этой схеме эквивалентность сложной непрерывной ставки и сложной декурсивной ставки при условии, что моменты капитализации совпадают с моментами платежей. Для удобства отнесем эти ставки к промежутку между платежами. Тогда

$$K_T(\bar{p}) = a\frac{e^{\bar{p}}(e^{\bar{p}m} - 1)}{e^{\bar{p}} - 1} \quad \text{и} \quad K_T(p_m) = a\frac{r(r^m - 1)}{r - 1} \ ,$$

где $r = 1 + p_m$. В этом случае связь между эквивалентными ставками очень простая и та же, что для роста капитала: $r = 1 + p_m = e^{\bar{p}}$. Она не зависит от срока накопления.

Вывод: вечная (бессрочная) эквивалентность сложных дискретных и сложных непрерывных ставок сохраняется для операции равномерного накопления капитала. При этом, достаточно установить связь на одном промежутке между капитализациями или платежами. Этот вывод, по-видимому, можно обобщить и на другие финансовые операции с произвольными потоками платежей.

На практике может возникнуть следующая задача: накопить определенную сумму K_T за определенный срок равномерными вкладами. Размер вкладов в этом случае однозначно определяется выбором процентной ставки.

Если выбрана непрерывная ставка, то размер вкладов вычисляется по формуле:

$$a = \frac{K_T(e^{\bar{p}} - 1)}{e^{\bar{p}}(e^{\bar{p}m} - 1)}.$$

Соответствующую эквивалентную простую ставку тогда можно найти из уравнения:

$$K_T = am + ap\frac{m(m + 1}{2}.$$

Эта ставка определяет годовую эффективность операции.

По аналогии рассматривается случай с выбором простой ставки.

Равномерное дискретное погашение кредита

Рассмотрим операцию равномерного погашения кредита по схеме postnumerando. Обычно задается величина K_0 кредита, процентная ставка и количество платежей. Если первоначально была задана сложная непрерывная ставка, то предварительно вычисляется аннуитет по этой ставке. В случае первичного задания простой ставки вычисляется аннуитет *b* соответственно по простой ставке.

Дальнейшие вычисления проводим по аналогии с накоплением капитала. Отнесём обе ставки к промежутку между платежами. Тогда

$$K_T(p) = bm + \frac{bpm(m - 1)}{2} = K_0(1 + pm) \quad \text{и} \quad K_T(\bar{p}) = a\frac{e^{m\bar{p}} - 1}{e^{\bar{p}} - 1} = K_0 e^{\bar{p}m}.$$

Если первичной была сложная непрерывна ставка и по ней был вычислен аннуитет α, то соответствующая эквивалентная простая ставка найдется из соотношения:

$$am + \frac{apm(m - 1)}{2} = K_0(1 + pm),$$

которое получается заменой платежа *b* на платеж α.

Если же аннуитеты b вычислялись по простой ставке, то эквивалентная ей непрерывная ставка определяется приближенными методами из уравнения:

$$b\frac{e^{m\bar{p}}-1}{e^{\bar{p}}-1}=K_0e^{\bar{p}m}.$$

Возможна еще одна постановка задачи: задан равномерный поток платежей a; найти ставки, при которых в точности погашается заданный кредит. Очевидно, эти ставки эквивалентны. Сумма номинальных стоимостей платежей, естественно, должна превосходить величину кредита.

В этом случае обе ставки находятся из независимых уравнений:

$$am+\frac{apm(m-1)}{2}=K_0(1+pm) \text{ и } a\frac{e^{m\bar{p}}-1}{e^{\bar{p}}-1}=K_0e^{\bar{p}m}.$$

<u>Погашение кредита по арифметической прогрессии</u>

На практике такой случай имеет место, когда кредит погашается равными выплатами долга. В работах [7] и [10] было показано, что уменьшение суммы процентных платежей происходит при убывании самих платежей, а минимум достигается при нулевом последнем платеже. Именно этот случай мы и рассмотрим. Будем полагать, что платежи вносятся через равные промежутки времени.

Пусть a – первый платеж, тогда разность арифметической прогрессии равна $d=-\frac{a}{m-1}$, и последовательность платежей определяется формулой

$$a_k=a-\frac{k-1}{m-1}a, \qquad k=1,\dots,m.$$

Уравнение погашения кредита при заданной простой ставке имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{m}a\left(1-\frac{k-1}{m-1}\right)\left(1+p(m-k)\right)=K_0(1+pm),$$

где ставка относится к одному периоду.

Из этого уравнения можно найти первый платеж, и, используя этот платеж, найти эквивалентную сложную непрерывную ставку из уравнения:

$$\sum_{k=1}^{m}a\left(1-\frac{k-1}{m-1}\right)e^{\bar{p}(m-k)}=K_0e^{\bar{p}m},$$

что сводится к нахождению известными методами корня многочлена степени m такого, что $0<\bar{p}<p$.

При заданной сложной непрерывной ставке, наоборот, первый платеж находится из второго уравнения, а эквивалентная простая ставка – из первого.

Подобные расчеты можно провести, если указан последний платеж. Прогрессия при этом может оказаться возрастающей.

При заданной последовательности платежей ставки определяются из этих уравнений независимо друг от друга. Они, очевидно, являются эквивалентными.

Подобные рассуждения и выкладки можно применить и для операции накопления капитала по арифметической прогрессии. Мы их опускаем.

Эквивалентность ставок на непрерывных финансовых потоках

Непрерывные потоки со степенными и показательными плотностями рассматривались автором для некоторых задач оптимизации в работах [7], [8] и [10]. Процентные ставки на непрерывных потоках применяются непрерывно.

Непрерывное равномерное накопление капитала

Условия накопления суммы K_T для произвольного непрерывного потока выглядят следующим образом:

$$\int_0^T a(t)(1 + p(T - t))dt = K_T$$

для простой ставки, и

$$\int_0^T a(t)e^{\bar{p}(T-t)}dt = K_T$$

для сложной (непрерывной) ставки.

В нашем случае плотность потока платежей постоянна:

$$a(t) = a, \qquad (0 \le t \le T).$$

Условие эквивалентности имеет вид:

$$a\int_0^T \big(1 + p(T - t)\big)dt = a\int_0^T e^{\bar{p}(T-t)}dt,$$

или, после сокращения и интегрирования:

$$T + \frac{pT^2}{2} = \frac{1}{\bar{p}}\big(1 + e^{\bar{p}T}\big).$$

Эта формула удобна для оценки эффективности операции при сложном начислении процентов. Кроме того, мы констатируем, что эквивалентность ставок при равномерном накоплении капитала не зависит от величины плотности потока

По аналогии с дискретным случаем решаются задачи накопления заданной величины капитала.

Если плотность равномерного потока заранее определена, то процентные ставки находятся, независимо друг от друга, по вышеприведенным формулам накопления. Они, очевидно, эквивалентны.

Если одна из процентных ставок определена, то плотность потока находится из соответствующей формулы накопления, а вторая ставка из отвечающей ей формулы накопления или из уравнения эквивалентности. Например, если задана сумма накопления и сложная непрерывная ставка, то плотность потока определится формулой

$$a = \frac{\bar{p}K_T}{1 + e^{\bar{p}T}}$$

и эквивалентная ей простая ставка – по формуле:

$$p = \frac{2}{aT^2}(K_T - aT) = \frac{2}{T^2}(\frac{1 + e^{\bar{p}T}}{\bar{p}} - \mathrm{T})\cdot$$

2.2. Непрерывное равномерное погашение кредита

В общем случае, при произвольном непрерывном потоке платежей, условия погашения кредита и уравнение эквивалентности ставок выглядят следующим образом:

$$\int_0^T a(t)\big(1 + p(T - t)\big)dt = K_0(1 + pT);$$

$$\int_0^T a(t)e^{\bar{p}(T-t)}dt = K_0 e^{\bar{p}T};$$

$$\frac{1}{1 + pT}\int_0^T a(t)\big(1 + p(T - t)\big)dt = \frac{1}{e^{\bar{p}T}}\int_0^T a(t)e^{\bar{p}(T-t)}dt.$$

В случае равномерного погашении кредита в результате интегрирования эти формулы приобретают вид:

$$(T + \frac{pT^2}{2})a = K_0(1 + pT), \qquad \frac{a}{\bar{p}}\left(1 + e^{\bar{p}T}\right) = K_0 e^{\bar{p}T} \quad \text{и}$$

$$\frac{T + \frac{pT^2}{2}}{1 + pT} = \frac{1 + e^{\bar{p}T}}{\bar{p}e^{\bar{p}T}} \ .$$

Как видим, и при равномерном непрерывном погашении кредита связь между эквивалентными ставками не зависит от величины плотности потока платежей.

Также можно отметить сходство этих формул с формулами, полученными выше для дискретного равномерного погашения кредита.

По аналогии со случаем равномерного накопления капитала решаются задачи с заранее определенным потоком или с заранее определенной одной из процентных ставок. Могут также рассматриваться задачи, связанные с временем накопления.

Непрерывное линейное накопление капитала

Рассмотрим непрерывные финансовые потоки с линейной плотностью: $a(t) = \propto + \beta t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T$.

Уравнение эквивалентности для простой и сложной ставок в результате интегрирования имеет следующую конечную форму:

$$\propto T + \frac{\beta T^2}{2} + p\left(\frac{\propto T^2}{2} + \frac{\beta T^3}{6}\right) = \frac{1}{\bar{p}}\left(\propto e^{\bar{p}T} - \propto - \beta T\right) + \frac{1}{\bar{p}^2}\left(\beta e^{\bar{p}T} - \beta\right) = K_T.$$

Это уравнение удобно для определения эквивалентной простой ставки, если известна сложная непрерывная ставка. Оно линейно относительно неизвестной *p*. Более сложным является уравнение с определением сложной эквивалентной ставки, которое имеет вид

$$(A\bar{p} + B)e^{\bar{p}T} + C\bar{p}^2 + D\bar{p} + E = 0,$$

где *A, B, C, D, E* – известные числа. Для решения этого уравнения можно рекомендовать простой метод половинного деления, так как начальный интервал, содержащий корень, известен: $0 < \bar{p} < p$.

Также отметим, что в данном случае условие эквивалентности существенно зависит от закона плотности потока платежей.

Решение обратных задач также имеет свои особенности. Так, задача определения линейного потока платежей для накопления заданного капитала при заданной процентной ставке имеет бесконечное множество решений.

Единственное решение получается, если задать некоторое краевое условие для потока платежей, например, $a(T) = 0$. Тогда $\beta = -\frac{\propto}{T}$, и параметр α однозначно определяется из условия накопления. Для заданной суммы накопления этот поток платежей имеет минимальный номинальный объем [10]. Соответствующая сложная ставка определяется из уравнения накопления. Заметим, что максимальный объем платежей будет при $\alpha(0)=0$, а равномерное накопление является промежуточным (при $\beta = 0$).

Аналогично решаются другие обратные задачи: подходящие ставки, походящий срок накопления, максимальная сумма накопления при заданном объеме платежей и т. д.

<u>Линейное непрерывное погашение кредита</u>

Плотность погашающего потока вновь имеет вид: $a(t) = \propto + \beta t \geq 0$, $0 \leq t \leq T$. Условия погашения кредита K_0 задаются уравнениями:

$$\int_0^T (\alpha + \beta t)\left(1 + p(T - t)\right)dt = K_0(1 + pT) \text{ и } \int_0^T (\alpha + \beta t)e^{\bar{p}(T-t)}dt = K_0 e^{\bar{p}T}.$$

Оба интеграла выражаются через элементарные функции. В конечном счете получаем следующее условие эквивалентности:

$$\frac{1}{1 + pT}(\propto T + \frac{\beta T^2}{2} + p\left(\frac{\propto T^2}{2} + \frac{\beta T^3}{6}\right)) = \frac{1}{e^{\bar{p}T}}\left(\frac{1}{\bar{p}}\left(\propto e^{\bar{p}T} - \propto - \beta T\right) + \frac{1}{\bar{p}^2}\left(\beta e^{\bar{p}T} - \beta\right)\right) = K_0.$$

Так же, как в предыдущем пункте, для однозначного определения линейного потока по заданной ставке и величине кредита, требуются краевые условия. Например, положим $\alpha(0)=0$, тогда $\alpha = 0$, и параметр β определяется по заданной ставке. Кстати, в работах [7] и [10] было показано, что в этом случае кредитор получит максимальную номинальную сумму процентных платежей (однако, эти суммы для простой и эквивалентной ей сложной ставки отличаются друг от друга).

Замечания о других финансовых потоках

Подобные исследования возможны и для других видов потоков платежей. Так в работе [7], при решении задач оптимизации, рассматривались степенные потоки вида: $a(t) = \propto + \beta t^{\gamma}$, и показательные потоки вида: $a(t) = \propto + \beta(e^{\gamma t} - 1)$. Как было отмечено, можно определять параметры таких потоков в зависимости от интересов сторон.

В задачах вычисления эквивалентных ставок степенные потоки с дробными показателями неудобны ввиду того, что при определении сложной ставки соответствующий интеграл не берется элементарно. При натуральном показателе интеграл берется многократным интегрированием по частям, что усложняет вычисления и результаты.

Весьма перспективным на наш взгляд, является применение показательных потоков, т. к. для простой ставки интеграл берется однократным интегрированием по частям, а для сложной ставки получается почти табличный интеграл. Заметим, что показательные непрерывные потоки могут быть применены для изучения дискретных потоков, платежи которых изменяются по геометрическим прогрессиям.

Заключение

Для равномерных и линейных финансовых потоков в операциях накопления капитала и погашения кредита в работе получены достаточно удобные формулы или методы определения связей между эквивалентными простыми и сложными непрерывными ставками.

На дискретных финансовых потоках, рассмотренных в статье, было показано, что все виды сложных дискретных процентных ставок могут быть заменены соответствующими эквивалентными сложными непрерывными ставками. Эта замена носит бессрочный характер. Утверждение, по-видимому, справедливо и для других финансовых потоков.

Таким образом, в финансовых операциях можно ограничиться применением всего двух видов ставок – простых (коммерческих и учетных) и сложных непрерывных. Их можно применять как на всех дискретных, так и на всех непрерывных финансовых потоках, в то время как применение сложных дискретных ставок на непрерывных и случайных дискретных потоках в принципе невозможно. В банковской практике при применении сложных непрерывных ставок можно сохранить привычный характер фиксации промежуточных и конечных результатов, назначая моменты наблюдения по новой схеме так, чтобы они совпадали с моментами капитализаций по старой схеме.

Сложная непрерывная процентная ставка имеет ряд преимуществ.

1. Простота математической обработки: коэффициенты роста и дис-

контирования равны соответственно значениям показательной функции e^{pt}, где p – ставка одной единицы времени.

2. Совпадение декурсивного и антисипативного методов начисления процентов. Равнозначность начисления процентов от начальной и конечной величин капиталов.

3. Единообразие долговых обязательств, возможность применения как угодно долгосрочных векселей по любым ставкам и т.д. (Как известно, срок векселя и учетная ставка при обычном начислении процентов связаны соотношением $qT < 1$).

4. Определение текущей стоимости капитала его стоимостью в любой другой момент времени. Освобождение от привязки к моментам капитализаций.

5. Аддитивность: при последовательном применении к капиталу двух сложных непрерывных ставок они складываются. Это свойство очень удобно, например, при подсчете показателей инфляции и нетто-ставки роста капиталов.

6. Упрощение практически всех финансовых расчетов: планов накопления капитала или погашения кредита, бухгалтерских балансовых счетов, подходящих процентных ставок, подходящих сроков роста и накопления капиталов, эквивалентных ставок, величин накопленных капиталов, аннуитетов при погашении долгов, консолидации и конверсии займов и инвестиций, учета взимания налогов и инфляции и т. д.

Список источников

1. Бухвалов А., Бухвалова В., Идельсон А. *Финансовые вычисления для профессионалов*. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2001. 320 с.
2. Ващенко Т.В. *Математика финансового менеджмента*. Москва, Перспектива, 1996. 80 с.
3. Жуленев С.В. *Элементарная финансовая математика*. Москва, Издательство МГУ, 2014. 96 с.
4. Кочович Е. *Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчетов*. Москва, Финансы и статистика, 1994. 268 с.
5. Криничевский К.В. *Финансовая математика*. Москва, ДиС, 2011. 336 с.
6. Пронин Л.Н. Возможный метод исследования функции чистой современной стоимости при непрерывном начислении процентов // *Вестник ИНЖЭКОНа. Серия: Экономика*, 2004, вып. 2 (3), с. 135-137.
7. Пронин Л.Н. О непрерывных финансовых потоках погашения кредита, выданного под сложный процент // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2017, no. 8 (92), с. 18-32.
8. Пронин Л.Н. Двойственные задачи процессов погашения кредита и накопления капитала // *Современная экономика: проблемы и решения*, 2020, no. 5 (125), с. 47-55.
9. Пронин Л.Н., Рожков Ю.С. О некоторых особенностях роста капитала // *Вестник ИНЖЭКОНа. Серия: Экономика*, 2011, вып. 2 (45), с. 180-185.
10. Пронин Л.Н., Рожков Ю.С. О непрерывных финансовых потоках погашения кредита, выданного под простой процент // *EDUCATIO*, 2015, no. 3 (10), ч. 2, с. 21-25.
11. Саркисов А.С. *Финансовая математика: теория процентов*. Москва, Ленанд, 2019. 272 с.
12. Ширяев В.И. *Финансовая математика: потоки платежей, производные финансовые инструменты*. Москва, КД Либроком, 2016. 232 с.

EQUIVALENCE OF INTEREST RATES SOME FINANCIAL TRANSACTIONS

Pronin Lev Nikolaevich, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

St.-Petersburg state economic university, Sadovaia st., 21, St.-Peterburg, Russia, 191023; e-mail: lepronin@yandex.ru

Importance: study of the dependencies of interest rates and the relationships between them on the financial flows through which financial transactions are carried out and their final results are achieved. *Purpose*: derivation of formulas linking equivalent rates for financial transactions of capital accumulation and loan repayment depending on payment flows. *Research design*: or the mentioned operations, the following flows are considered sequentially: single payments, discrete uniform flows, discrete flows of payments according to arithmetic progressions, continuous equal-dimensional flows, continuous linear flows. The prospects of using exponential flows are indicated. *Results*: in addition to the derived formulas or the indication of methods for determining the relationships between the rates, some qualitative characteristics have been obtained. The author suggests discussing the exclusion from financial practice of all types of complex rates with discrete capitalizations.

Keywords: discrete financial flows, continuous financial flows, capital accumulation, loan repayment, simple rate, complex rate.

References

1. Bukhvalov A., Bukhvalova V., Idelson A. *Finansovye vychisleniia dlia professionalov* [Financial calculations for professionals]. Sankt-Peterburg, BKHV-Peterburg, 2001. 320 p. (In Russ.)
2. Vashchenko T.V. *Matematika finansovogo menedzhmenta* [Mathematics of financial management]. Moskva, Perspektiva, 1996. 80 p. (In Russ.)
3. Zhulenev S.V. *Elenentarnaia finansovaia matematika* [Elementary financial mathematics]. Moskva, Izdatel'stvo MGU, 2014. 96 p. (In Russ.)
4. Kochovich E. F*inansovaia matematika. Teoria i praktika finansovo-bankovskikh raschetov* [Financial mathematics. Theory and practice of financial calculations]. Moskva, Finansy i statistika, 1994. 268 p. (In Russ.)
5. Krinichevskii K.V. *Finansovaia matematika* [Financial mathematics]. Moskva, DiS, 2011. 336 p. (In Russ.)
6. Pronin L.N. Vozmozhnyj metod issledovaniia funktsii chistoi sovremennoi stoimosti pri nepreryvnom nachislenii protsentov [A possible method for investigating the function of net present value with continuous accrual of interest]. Vestnik INHZEKONa, seriya: Ekonomika, 2004, no. 2 (3), pp. 135-137. (In Russ.)
7. Pronin L.N. O nepreryvnykh finansovykh potokakh pogasheniia kredita, vydannogo pod slozhnyi protsent [On continuous financial flows repayment of the loan under a complex percentage]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2017, no. 8 (92), pp. 18-32. (In Russ.)
8. Pronin L.N. Dvoistvennye zadachi protscessov pogascheniya kredita i nakopleniia kapitala [Dual tasks of capital accumulation processes and loan repayment]. *Sovremennaia ekonomika: problemy i resheniia*, 2020, no. 5(125), pp. 47-55. (In Russ.)

9. Pronin L.N., Rozhkov IU.S. O nekotorykh osobennostiakh rosta kapitala [About some features of capital growth]. *Vestnik INHZEKONa*, seriya: Ekonomika, 2004, no. 2 (3), pp. 135-137. (In Russ.)

10. Pronin L.N., Rozhkov IU.S. O nepreryvnykh finansovykh potokakh pogasheniia kredita, vydannogo pod prostoi protsent [On continuous financial flows repayment of the loan under a simple percentage]. *EDUCATIO*, 2015, no. 3 (10), part 2, pp. 21-25. (In Russ.)

11. Sarkisov A.S. *Finansovaia matematika. Teoriia protsentov* [Financial mathematis. The theory of interest]. Moskva, Lenand, 2019. 272 p. (In Russ.)

12. Shiriaev V.I. *Finansovaia matematika: potoki platehzei, proizvodnye finansovye instrScumenty* [Financial mathematics: Payment flows, derivative financial instruments]. Moskva, KD Librokom, 2016. 232 p. (In Russ.)