
СТОХАСТИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНОГО СПРОСА И ВЫБОРА МАРШРУТА

Щепина Ирина Наумовна, д-р экон. наук, доц.

Лукашков Денис Владимирович, бак.

Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, Воронеж,
Россия, 394018; e-mail: shchepina@mail.ru; denis.lukashkov1@gmail.com

Предмет: статья посвящена процессам оптимизации издержек на доставку грузов. Проблемы транспортной логистики являются актуальным и интенсивно развивающимся направлением в экономике в условиях цифровой трансформации и развития сферы доставки товаров, в связи с чем существует потребность в эффективном моделировании реальных ситуаций, возникающих в этой отрасли. *Цель:* разработка модели и решение стохастической дискретной динамической транспортной задачи, учитывающей колебания спроса и выбор маршрута в зависимости от влияния условий окружающей среды и загруженности дорог. *Дизайн исследования:* исследование включало разработку модели и алгоритма её решения, реализацию решения задачи с помощью MS Excel и на языке Python, сравнение преимуществ и недостатков двух инструментов при решении конкретной задачи и проведение имитационных экспериментов по влиянию отдельных факторов на оптимальное решение. *Результаты:* разработанная модель является одной из возможных модификаций стохастической транспортной задачи и может дополняться различными параметрами и условиями в зависимости от конкретных требований заказчика. Задача может решаться как в MS Excel, так и в Python. Автоматизация решения задачи в Python даёт больше возможностей для проведения различных имитационных экспериментов и решения больших транспортных задач. Данная задача может иметь практическое использование в различных системах транспортной логистики.

Ключевые слова: стохастическая динамическая транспортная задача, Python, Excel, нелинейная оптимизация, условия окружающей среды, случайный спрос, выбор маршрута.

DOI: 10.17308/meps/2078-9017/2025/7/36-54

Введение

Транспортная задача линейного программирования является одной из базовых задач оптимизации, минимизирующей стоимость перевозок одно-

родного продукта из пунктов хранения или производства в пункты потребления при заданных ограничениях на объёмы предложения и спроса. Впервые данная задача была решена Л.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным в 1940 году и опубликована в 1949 году [6, 14]. Первые постановки транспортной задачи появились ещё раньше, чем общая концепция линейного программирования, а первая формализация была сделана Г. Монжем (поэтому часто такую задачу называют транспортной задачей Монжа-Канторовича) в 1781 году. Несмотря на это, данная задача продолжает привлекать внимание исследователей уже более восьмидесяти лет, потому что, с одной стороны является одной из наиболее красивых задач линейного программирования, а с другой стороны имеет важное практическое применение в области транспортной логистики. Для классической транспортной задачи обычно выделяют два типа критериев: критерий стоимости (минимум затрат на перевозку грузов) и критерий времени (минимум времени на перевозку). В 40-60-е годы XX века наибольшие успехи в решении подобных задач были достигнуты в связи с тем, что методы решения учитывали особенности математической модели. В настоящее время под термином «транспортная задача» понимается широкий круг задач с единой математической моделью. Классическая транспортная задача может быть решена симплекс-методом, но в силу ряда особенностей её можно решить более простыми и удобными методами. В частности, на первом этапе производится итерационное улучшение плана перевозок, и для определения опорного плана используются методы северо-западного угла, наименьшего элемента, двойного предпочтения, аппроксимации Фогеля. После нахождения опорного плана используется один из алгоритмов нахождения оптимального плана. Например, метод потенциалов, который позволяет получить оптимальное решение за конечное число итераций. Также транспортная задача может быть решена с помощью теории графов, например – с использованием алгоритмов Форда-Фалкерсона или Беллмана-Форда. Для детерминированной постановки задачи хорошо изучено решение ряда модифицированных задач, таких как транспортная задача с запретами на перевозки, с фиксированными перевозками с ограничениями на пропускные способности, с фиксированными доплатами на создание новых мощностей. Отдельный класс задач – многопродуктовые транспортные задачи, которые решаются симплексным методом с использованием разложения Данцига-Вулфа. В последние десятилетия исследования расширяют классическую постановку задачи, вводя многокритериальные функции, учитывающие не только стоимость перевозок, но и время, риски потерь, надёжность, влияние внешних факторов и другие параметры.

Стохастические модели включают различные вероятностные методы, которые описывают динамику транспортных потоков и выбор маршрутов с учётом случайных факторов. В современном динамичном мире наибольшую важность для обеспечения устойчивости и эффективности цепочек поставок имеет решение задач транспортной логистики в условиях неопределённости. Основные причины заключаются в следующем: адаптация к непредска-

зубым изменениям (резкие колебания спроса, блокировки транспортных путей, изменения законодательства); необходимость контроля ошибок планирования (оптимизация маршрутов, контроль грузов, подбор транспортных средств, ускорение доставки); управление рисками и повышение надёжности (вероятности сбоев, аварий, задержек, потерь и др.); внедрение интеллектуальных систем (адаптация маршрутов и распределение ресурсов в реальном времени за счёт использования имитационного моделирования и искусственного интеллекта).

Таким образом, решение транспортных задач в условиях неопределённости является неотъемлемой частью современной логистики, позволяющей компаниям эффективно функционировать в условиях рыночной нестабильности и быстро меняющихся внешних факторов.

Стохастические транспортные задачи рассматривают в научной литературе на самых различных уровнях: от решения задач с помощью методов функционального анализа [2] до обсуждения и решения частных прикладных задач [4].

В этом диапазоне представлены разные типы задач, в основе каждой из которых лежит перевод какого-то либо параметра классической транспортной задачи в категорию случайных величин.

Наиболее частым вариантом являются стохастические задачи со случайным спросом и учётом рисков, включающие штрафы за дефицит и хранение избыточного продукта, изменение конъюнктуры, сезонность и случайные потери [3, 5, 8, 9, 12, 15], что тесно связывает транспортные задачи с моделями управления запасами. Реже, но также рассматриваются модели со случайным предложением. Целый ряд работ посвящён решению задач со случайными тарифами перевозок [5, 4, 10]. Также можно выделить отдельный класс динамических транспортных задач с задержками поставок, например [1].

Наибольший интерес, но одновременно и сложность вызывают комплексные задачи из сферы государственного управления, выходящие за рамки абстрактного моделирования одного или двух случайных параметров, и требующие предварительного сбора статистики и соотнесения маршрутов перевозок задачи с реальными дорогами населённых пунктов [13].

Логистическая деятельность важна для предприятий любых масштабов, что в очередной раз подтверждает важность выстраивания и гибкой коррекции логистических цепочек. Использование современных методов и инструментов моделирования к решению будничных задач предприятий является не только «модой», но практической необходимостью снижения регулярных затрат человеческих и финансовых ресурсов [7]. Развитие сферы услуг по доставке товаров и работе курьеров и цифровая трансформация процессов логистики требуют выстраивания эффективного управления всеми процессами и взаимодействие между участниками (курьерами и клиентами) на каждом этапе логистического процесса. Транспортная логистика

является частью основных бизнес-процессов работы курьерской службы и также требует решения стохастических транспортных задач.

В связи с этим целью работы явилось построение и решение стохастической дискретной динамической транспортной модели, учитывающей выбор маршрута в зависимости от влияния условий окружающей среды и времени суток.

Методы и результаты исследования

Для начала сформулируем однопродуктовую транспортную задачу в её классическом виде.

Пусть некоторый продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i единиц $i = \overline{1, m}$, необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j , $j = \overline{1, n}$. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j . Требуется составить план перевозки, позволяющий с минимальными затратами перевезти все грузы и полностью удовлетворить потребителей.

Модель, описывающая данную задачу, имеет следующий вид.

$$F = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0. \quad (4)$$

Таким образом, на множестве неотрицательных допустимых решений системы ограничений (2) и (3) необходимо найти такое решение x , при котором значение целевой линейной функции (1) минимально.

Основными методами решения такой задачи, как отмечалось выше, являются симплекс-метод и метод потенциалов.

В данной работе предложено расширение и модификация классической модели в следующих направлениях.

1. В обычной транспортной задаче рассматривается ситуация с единственным маршрутом между каждым поставщиком и потребителем (этап выбора между различными маршрутами опускается). В предложенной модели допускается возможность выбора маршрута из нескольких доступных на основе анализа условий внешней среды (погодных условий, загруженности дорог в различное время суток).

2. Классическая транспортная задача решается в один этап, не рассматривается довоз товаров на склады по истечении их запасов. Данная в работе модификация включает динамическое краткосрочное планирование

доставки товаров с учётом случайного спроса и сроков хранения продукта.

Таким образом, мы решаем динамическую стохастическую дискретную транспортную задачу с выбором маршрутов и возможностью пополнения складских запасов.

Рассмотрим задачу оптимальной транспортировки однородной продукции. Предположим, что на рынке присутствует поставщик, владеющий m складами, и n потребителей продукции. Между каждым складом и каждым производителем существует k_{ij} дорог. Каждая из этих дорог характеризуется расстоянием и базовым временем доставки. На базовое время оказывают влияние некоторые параметры «окружающей среды»: время суток (отражающее степень загруженности дорог) и погодные условия. Не каждая дорога подвержена влиянию «окружающей среды». Продукция, транспортируемая поставщиком, является скоропортящейся, и должна быть отправлена со склада в течение трёх дней.

Модель определяется следующими условиями.

1. Запасы складов на начало первого дня равны оценке потенциального спроса всех потребителей и распределяются между складами равномерно.

2. В дальнейшем пополнение запасов осуществляется с помощью поставки товаров на склады через каждые три дня. Объём поставки на следующий период определяется, исходя из объёма спроса за прошедший трёхдневный период и включает в себя корректирующую случайную компоненту. Соответственно, исходя из структуры перевозок и остатков продукции на складах, поставка может осуществляться на разные склады в различных объёмах.

3. Размер спроса каждого потребителя генерируется случайно в каждый период времени в рамках заранее определённого диапазона.

4. Товар, оставшийся к моменту новой поставки, признаётся испортившимся и списывается. Списание товара приносит дополнительные издержки.

5. Решается задача с критерием минимизации затрат. Транспортные издержки связаны с объёмом перевозимой продукции и расстоянием, на которую продукция перевозится. Кроме того, стоимость издержек корректируется с учётом загруженности дороги (т.е. времени на доставку товара) и погодных условий. Таким образом, в каждый момент планирования для перевозки груза от поставщика i к потребителю j выбирается дорога, характеризующаяся минимальными издержками.

Данная постановка задачи может быть формализована в виде следующей оптимизационной модели.

Для $t_\tau = 1$:

$$b_{jt} = \text{СЛУЧМЕЖДУ}(b_{\min}; b_{\max}), j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$a_{it_\tau} = \begin{cases} \text{СЛУЧМЕЖДУ}(a_{\min}; a_{\max}), i = \overline{1, m}, \text{ если } \tau = 1 \\ \sum_{t=1}^3 x_{ijt} + \text{СЛУЧМЕЖДУ}(\Delta a_{\min}; \Delta a_{\max}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \text{ если } \tau > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$c_{ij\text{топт}} = \min_{k_{ij}} (c \cdot w_t \cdot d_t \cdot S_{k_{ij}}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, K}, \quad (7)$$

$$Z_t = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij\text{топт}} x_{ijt} \rightarrow \min, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijt} \leq a_{it_\tau}, i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ijt} = b_{jt}, j = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$x_{ijt} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, t = \overline{1, T}. \quad (11)$$

Для $t_\tau = 2$ и 3 – аналогично (5)-(11).

За трёхдневный период τ рассчитываются суммарные транспортные издержки

$$Z_\tau = \sum_{t=1}^3 Z_t, \quad (12)$$

где b_{jt} – величина спроса j -го потребителя в t -й момент времени; a_{it_τ} – величина предложения j -го поставщика в t -й момент времени в цикле τ ; $c_{ij\text{топт}}$ – оптимальная величина транспортных издержек на перевозку между i -м поставщиком и j -м потребителем в t -й момент времени; c – издержки на перевозку единицы груза на километр; $S_{k_{ij}}$ – расстояние между i -м поставщиком и j -м потребителем по k -й дороге; w_t – коэффициент, характеризующий состояние погоды; d_t – коэффициент, характеризующий загруженность дорог в зависимости от времени суток; Z_t – минимизируемая целевая функция издержек по критерию издержек в t -й момент времени; x_{ijt} – объём перевозки между i -м поставщиком и j -м потребителем в t -й момент времени; Z_τ – суммарные издержки за трёхдневный цикл.

После этого рассчитываются экономические параметры:

$$I_\tau = I_{\text{марж}} * \sum_{t=1}^3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ijt}, \quad (13)$$

$$C_{\tau\text{спис}} = C_{\text{списмарж}} * \sum_{i=1}^m a_{it_{\text{ост}}}, \quad (14)$$

$$P_\tau = I_\tau - Z_\tau - C_{\tau\text{спис}}, \quad (15)$$

где I_τ – доход от поставки товара в пункт потребления за цикл τ ; $I_{\text{марж}}$ – удельный доход (у.е./ед.) – цена продукции; $C_{\tau\text{спис}}$ – издержки на списание продукции за цикл τ ; $C_{\text{списмарж}}$ – удельные издержки на списание продукции (у.е./ед.); $a_{it_{\text{ост}}}$ – объём продукции, оставшийся на i -м складе в конце цикла τ ; P_τ – прибыль за цикл τ .

Далее алгоритм повторяется.

В данной модификации мы не требуем выполнения условия целочисленности, однако, если перевозимые продукты являются неделимыми, то это условие может быть добавлено в модель.

Блок-схема алгоритма представлена на рис. 1.

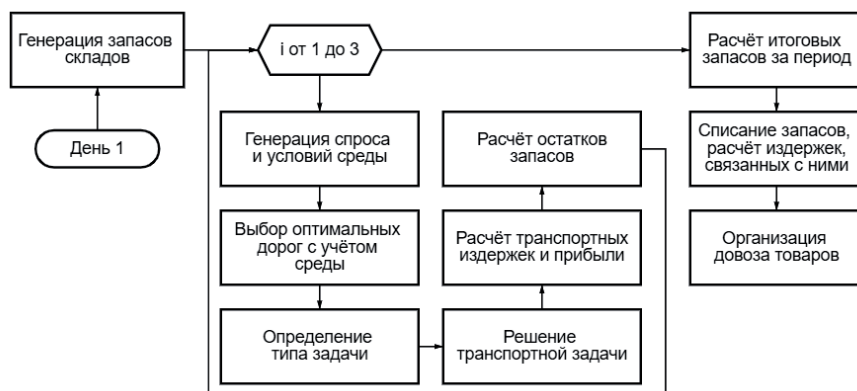


Рис. 1. Алгоритм задачи, оформленный в виде блок-схемы

Для демонстрации работы алгоритма рассмотрим решение численного примера в соответствии с представленной моделью.

Предположим, что у производителя есть четыре склада, на каждом из которых хранится однородный товар – склады А, В, С и D. У производителя есть четыре постоянных потребителя «П1», «П2», «П3» и «П4». От каждого склада к каждому потребителю можно перевезти товар по двум или трём дорогам. Время движения по дорогам зависит от параметров окружающей среды – времени суток, в которое будет доставляться товар, и погодных условий. Погодные условия и время суток в данном примере задаются случайным образом. Цена единицы товара – 30 у.е., стоимость перевозки единицы груза на один километр составляет 1.5 у.е./км*ед. товара (все машины одинаковые, поэтому издержки идентичны), издержки списания товаров – 10 у.е./ед. товара.

Количество дорог между складами и потребителями представлено в таблице 1.

Таблица 1

Количество дорог между складами и потребителями

Склады	Потребители			
	П1	П2	П3	П4
А	2	2	3	3
В	3	2	3	2
С	2	3	2	3
D	3	2	2	2

Расстояния, характеризующие дороги, представлены в таблице 2 (курсивом выделены дороги, издержки движения по которым зависят от времени суток, жирным – от погоды).

Таблица 2

Фрагмент таблицы с длинами дорог от поставщика к потребителям

A-1			B-1		
1 дорога	2 дорога		1 дорога	2 дорога	3 дорога
60	40		70	45	55
A-2			B-2		
1 дорога	2 дорога		<i>1 дорога</i>	<i>2 дорога</i>	
20	35		60	55	
A-3			B-3		
1 дорога	<i>2 дорога</i>	3 дорога	1 дорога	<i>2 дорога</i>	3 дорога
20	35	20	25	25	43
A-4			B-4		
<i>1 дорога</i>	2 дорога	<i>3 дорога</i>	1 дорога	2 дорога	
30	55	60	15	25	

Коэффициенты, влияющие на затраты при движении, по дорогам представлены в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

Коэффициенты изменения издержек в зависимости от времени суток

Номер интервала	Время	Коэффициент
1	6:00-8:00	0,9
2	8:00-10:00	2
3	10:00-12:00	1
4	12:00-14:00	1
5	14:00-16:00	1
6	16:00-18:00	2,4
7	18:00-20:00	2
8	20:00-22:00	0,8

Таблица 4

Коэффициенты изменения издержек в зависимости от погоды

Вид погоды	Коэффициент
Сухо	1
Дождь	1,3
Снег	1,4
Гололёд	1,45

Продemonстрируем и сравним возможности решения данной задачи с помощью MS Excel и Python.

Опишем решение задачи в MS Excel.

Спрос и базовое предложение генерируются случайно в границах, установленных условием. Таким же образом генерируются условия внешней среды (в данном примере это интервал времени № 8 и сухая погода).

Решение задачи для первого дня цикла в MS Excel представлено на рис. 2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица затрат						
2		П1	П2	П3	П4		
3	A	78	39	30	45		
4	B	67,5	82,5	37,5	22,5		
5	C	30	60	22,5	75		
6	D	25,5	30	22,5	45		
7							
8	Матрица перевозок						
9		П1	П2	П3	П4	Предложение	
10	A	0	0	0	0	284	0
11	B	0	0	0	88	284	88
12	C	0	0	0	0	285	0
13	D	87	69	66	0	280	222
14	Спрос	87	69	66	88		
15		87	69	66	88		
16							
17	ЦФ	7753,5					

Рис. 2. Решение задачи для первого дня в Excel

Задача отвечает условиям линейности, поэтому для её решения в MS Excel используется встроенный в «поиск решения» симплекс-метод (рис. 3).

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

Добавить

Изменить

Удалить

Сбросить

Загрузить/сохранить

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Метод решения
Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом
GRG, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для
нелинейных задач - эволюционный поиск решения.

Справка

Найти решение

Закрыть

Рис. 3. Настройка «поиска решения» для задачи первого дня

При решении задачи второго дня предложение каждого склада будет уменьшено на величину перевозок от этого склада в первый день.

Учитывая границы генерации спроса, в первые два дня цикла задача теоретически не может быть сбалансированной. В третий день задача может быть как сбалансированной, так и несбалансированной.

По истечении трёх дней оставшиеся запасы будут списаны с соответствующими затратами. После этого будет осуществлена поставка, объём которой будет основан на структуре спроса за прошедший период.

Сводная информация о результатах решения задач первых трёх дней представлена в таблицах 5, 6 и 7.

Таблица 5

Структура спроса в первые три дня

День	Потребители			
	П1	П2	П3	П4
1	87	69	66	88
2	78	71	97	69
3	80	66	93	98

Таблица 6

Структура остатков запасов на складах в первые три дня

День	Запасы после отгрузки				Издержки списания
	А	В	С	Д	
1	284	196	285	58	
2	271	127	110	0	
3	142	29	0	0	1710

Таблица 7

Экономические показатели за первые три дня

	Недополученная прибыль	Транспортные издержки	Доход	Прибыль
	0	7753,5	9300	1546,5
	0	8322	9450	1128
	0	9744	10110	366
Суммарно	0	25819,5	28860	3040,5

Из таблицы 6 видно, что на складах А и В осталась продукция, которая будет списана с соответствующими издержками. Поскольку ни в одной из задач не наблюдалось дефицита продуктов, недополученная прибыль равна нулю (табл. 7).

На следующем этапе решение повторяется с пересчитанной величини-

ной предложения и сформированным спросом в соответствии с формулами (5) и (6).

Перейдём к реализации алгоритма на Python.

Ключевыми библиотеками, используемыми для этой программы, были `svхру` (с `ECOS_BB`), `numру` и `randapp`. `Numру` и `pandas` были необходимы для пред- и постобработки данных, `svхру` – современная библиотека, позволяющая решать оптимизационные задачи, `ECOS_BB` – один из блоков внутри библиотеки `svхру`, позволяющий решать нелинейные оптимизационные задачи.

Программа состоит из нескольких блоков: подготовки констант (наборов состояний среды) и величин, используемых в дальнейшем, циклической генерации случайных величин и решения транспортной задачи (с проверкой её на сбалансированность) и подсчёта итоговых экономических параметров (прибыли, затрат, недополученной прибыли) с выводом их на экран.

В первом блоке формируются массивы, содержащие информацию о состояниях внешней среды. Они содержат корректирующие коэффициенты и названия состояний, соответствующие коэффициентам (рис. 4).

```
#Генерация предложения (базовое)
M_i = np.arange(4)
for i in range(m):
    M_i[i] = randint(275, 285)
M_i = M_i.astype(np.int64)

#Коэффициенты влияния времени суток и погоды на время передвижения по дорогам
time_day = np.array([0.9, 2, 1, 1, 1, 2.4, 2, 0.8])
time_weather = np.array([1, 1.3, 1.4, 1.45])
daytime_word = [("6:00-8:00"), ("8:00-10:00"), ("10:00-12:00"), ("12:00-14:00"),
                 ("14:00-16:00"), ("16:00-18:00"), ("18:00-20:00"), ("20:00-22:00"),]
weather_word = [("Сухо"), ("Дождь"), ("Снег"), ("Гололёд")]
```

Рис. 4. Фрагмент программы, устанавливающий набор состояний среды

В следующем блоке многократно генерируются условия окружающей среды (рис. 5), рассчитываются оптимальные маршруты с их учётом (рис. 5), задача проверяется на сбалансированность и, в зависимости от результата проверки, решается либо по алгоритму для сбалансированной задачи, либо для несбалансированной (например, рис. 6). Подсчитываются и выводятся экономические параметры для каждого дня (рис. 7).

```

for cycle in range(cycle):
    N = np.arange(4)
    for day in range(3):
        print('\033[34mЦикл \033[0m', cycle + 1, ': ', '\033[34mДень \033[0m', day + 1)
        C_day = 0
        I_day = 0
        M_structure.loc[len(M_structure)] = M_i #добавление новой строки в конец Датафрейма
        transp_time = {"A-1": [60, 40, ""], "A-2": [20, 35, ""], "A-3": [20, 35, 20], "A-4": [30, 55, 60],
                        "B-1": [70, 45, 55], "B-2": [60, 55, ""], "B-3": [25, 25, 43], "B-4": [15, 25, ""],
                        "C-1": [20, 20, ""], "C-2": [40, 60, 45], "C-3": [20, 15, ""], "C-4": [50, 80, 42],
                        "D-1": [36, 17, 28], "D-2": [20, 17, ""], "D-3": [15, 20, ""], "D-4": [40, 30, ""], }
        transp_time = pd.DataFrame(transp_time)

        daytime = randint(0, 7) #определение интервала времени
        weather = randint(0, 3) #определение погодных условий
        print('Интервал времени - ', daytime_word[daytime], " (" , daytime+1, ")", '\n',
              'Погодные условия - ', weather_word[weather], '\n')

```

Рис. 5. Фрагмент «циклического» блока программы

```

x = cp.Variable((4,4), "x")
z = cp.sum(cp.multiply(transp_time_min, x))

constraints = [
    (x[0, 0]+x[0, 1]+x[0, 2]+x[0, 3] <= M_i[0]),
    (x[1, 0]+x[1, 1]+x[1, 2]+x[1, 3] <= M_i[1]),
    (x[2, 0]+x[2, 1]+x[2, 2]+x[2, 3] <= M_i[2]),
    (x[3, 0]+x[3, 1]+x[3, 2]+x[3, 3] <= M_i[3]),
    (x[0, 0]+x[1, 0]+x[2, 0]+x[3, 0] == N_j[0]),
    (x[0, 1]+x[1, 1]+x[2, 1]+x[3, 1] == N_j[1]),
    (x[0, 2]+x[1, 2]+x[2, 2]+x[3, 2] == N_j[2]),
    (x[0, 3]+x[1, 3]+x[2, 3]+x[3, 3] == N_j[3]),
    (x >= 0)]

objective = cp.Minimize(z)
problem = cp.Problem(objective, constraints)
problem.solve(solver = cp.ECOS)

```

Рис. 6. Фрагмент кода, решающий сбалансированную задачу

```

#Расчёт общих значений
C_sp = np.around(sum(M_i)*C_sp_marg, decimals = 2) #затраты на списание
M_i = N + randint(-10, 10)
P_cycle = I_cycle - C_sp - C_cycle
I_total += I_cycle
P_total += P_cycle
C_total += C_cycle
C_sp_total += C_sp
I_lost_total += I_lost_cycle
print('Спрос за цикл: ', N, '\n',
      'Затраты на списание: ', C_sp, '\n',
      'Чистая прибыль за цикл: ', np.around(P_cycle), '\n',
      'Недополученная прибыль за цикл: ', I_lost_cycle, '\n',
      'Предложение в следующем цикле: ', M_i, '\n')

```

Рис. 7. Фрагмент кода, рассчитывающий итоговые экономические параметры

В последнем блоке подсчитываются и выводятся итоговые значения экономических параметров, накопленные за время работы программы (рис. 8).

```

Цикл 1 : День 3
Интервал времени - 8:00-10:00 ( 2 )
Погодные условия - Дождь

Структура спроса: [76 74 67 88]
Сумма спроса: 305

Матрица i, затрат:
[[ 52.5  39.   30.   90. ]
 [ 67.5 165.  48.75 25.5 ]
 [ 30.   60.   30.  150. ]
 [ 42.   30.   39.   45. ]]

Структура предложения: [123. 112. 196.  0.]
Сумма предложения: 431.0

Статус решения задачи (сбалансированная): optimal

Структура перевозок:
[[ 0.   74.   18.59  0. ]
 [ 0.   0.   0.   88. ]
 [76.   0.  48.41  0. ]
 [ 0.   0.   0.   0. ]]

Объём перевозок: 305.0

```

Рис. 8. Фрагмент вывода результатов

Автоматизация решения задачи при помощи Python расширяет возможности проведения имитационных экспериментов по сравнительной статике. Используя эти преимущества, в работе анализировалось влияние различных параметров на итоговое значение прибыли при базовой цене 32 у.е./ед. прод. В вычислительном эксперименте для каждого параметра (удельные транспортные издержки, удельные издержки на списание, цена единицы товара) были рассмотрены пять вариаций с одинаковым шагом. С каждым из этих значений программа, настроенная на три трёхдневных цикла, прогонялась 50 раз. По 50 полученным значениям прибыли находилось среднее. Этот процесс повторялся 5 раз, из итоговых значений находилось среднее значение прибыли, соответствующее данному значению параметра. Результаты анализа представлены в таблицах 6-11.

Таблица 6

Средние значения прибыли при разных значениях цены на продукцию

Цена продукции, у.е./ед. прод.	Среднее значение прибыли	Номер прогона программы				
		1	2	3	4	5
28,8	27313,8	28252,5	28477,5	26238,5	26975,8	26624,7
30,4	29805,4	30638,6	30490,8	30878,3	27661,5	29357,7
32	31438,0	32119	32423,8	29152,1	31270,7	32224,3
33,6	32122,2	31756,5	30199,1	31926,5	33518,5	33210,3
35,2	33717,6	33021,5	33608,4	33184,5	33718,8	35054,7

Таблица 7

Отклонения цены и прибыли от базового уровня

Отклонение цены от базового уровня	Отклонение прибыли от базового уровня
-10%	-13%
-5%	-5%
0%	0%
5%	2%
10%	7%

Из таблиц видна прямая зависимость изменения прибыли от цены, изолированное изменение цены единицы продукции на 5% ведёт к изменению прибыли в среднем на 3%, изменение цены на 10% – к изменению прибыли в среднем на 10%.

Таблица 8

Средние значения прибыли при разных значениях транспортных издержек

Издержки на перевозки, у,е./км*ед, прод.	Среднее значение прибыли	Номер прогона программы				
		1	2	3	4	5
1,35	26865,8	26719,51	26936,08	29149,78	26030,97	25492,67
1,425	29688,8	31060,29	28979,87	30144,58	28743,7	29515,56
1,5	31133,8	29990,6	30336,34	29629,33	33274,32	32438,41
1,575	32379,2	32717,15	31411,37	32303,09	33147,76	32316,63
1,65	33409,8	34743,3	31340,22	35471,23	32356,81	33137,44

Таблица 9

Отклонения транспортных издержек и прибыли от базового уровня

Отклонение издержек от базового уровня	Отклонение прибыли от базового уровня
-10%	14%
-5%	5%
0%	0%
5%	-4%
10%	-7%

Очевидно, что наблюдается обратная зависимость прибыли от уровня издержек. Изолированное изменение транспортных издержек на 5% в среднем ведёт к изменению прибыли на 4,5%, изменение на 10% – изменение прибыли на 10,5%.

Таблица 10

Средние значения прибыли при разных значениях издержек на списание продукции

Издержки на списание, у,е./ед, прод	Среднее значение прибыли	Номер прогона программы				
		1	2	3	4	5
9	4741,9	4495,2	4730,6	4802,1	4970,8	4710,7
9,5	4392,5	4211,0	4318,2	4358,2	4581,5	4493,4
10	4221,0	4219,4	4279,8	3982,9	4194,6	4428,1
10,5	4077,9	4263,4	3601,3	4219,5	4252,9	4052,6
11	3443,7	3296,6	3152,5	3393,4	3812,6	3563,3

Таблица 11

Отклонения издержек на списание продукции и прибыли от базового уровня

Отклонение издержек от базового уровня	Отклонение прибыли от базового уровня
-10%	12%
-5%	4%
0%	0%
5%	-3%
10%	-18%

Здесь также видна обратная зависимость между прибылью и издержками. Изменения издержек на списание продукции на 5% в среднем ведёт к изменению прибыли на 3,5%, на 10% – к изменению прибыли в среднем на 15%.

В данной модели на чувствительность прибыли к изменению показателей цены и издержек влияют колебания спроса и внешних условий. Естественно, что результаты имитационных экспериментов будут зависеть от исходных данных и заданных условий, но важно показать, что программа на Python позволяет проводить такие эксперименты значительно быстрее, чем MS Excel.

Заключение

Разработанная модель даёт возможность компании-поставщику оптимизировать транспортную логистику как с точки зрения выбора оптимального маршрута, учитывающего погодные условия и загруженность дорог, так и с точки зрения колебаний спроса потребителей, а также издержек за нереализованную скоропортящуюся продукцию. Предложенная модель является одной из возможных модификаций стохастической транспортной задачи и может дополняться различными параметрами и условиями в зависимости от конкретных требований заказчика.

Сравнение возможностей реализации задачи в MS Excel и Python показало следующее: решение первого дня цикла в MS Excel заняло 95 секунд, в то время как решение всего цикла в Python заняло 4 секунды. Такая разница во времени несущественна для малоразмерных задач, но становится существенной при увеличении масштаба решаемой задачи.

Кроме того, автоматизация решения задачи в Python даёт больше возможностей для проведения различных имитационных экспериментов.

В будущем возможна оптимизация алгоритма как с точки зрения самого кода, так и с точки зрения языка программирования, компилятора. Так, формирование каждой из таблиц 6, 8, 10 занимало от 10 до 12 минут. Выбор более «быстрых» программных решений мог бы заметно сократить время, необходимое для проведения вычислений.

Решение подобных задач требует предварительного экономического анализа рынка и создания файлов (баз) исходных данных. Поэтому необходимо продумывать связь баз исходных данных с программой на Python для упрощения информационных потоков.

Однако тот факт, что данная задача может быть решена и в MS Excel, позволяет применять её в практической деятельности небольших организаций пользователями, не обладающими навыками программирования.

В целом данная задача может быть полезна как в качестве самостоятельного инструмента транспортной логистики, так и в качестве одного из блоков комплексных программ информационной логистики.

Список источников

1. Александров А.Э., Якушев Н.В. Стохастическая постановка динамической транспортной задачи с задержками с учетом случайного разброса времени доставки и времени потребления // *Управление большими системами: сборник трудов*, 2006, по. 12-13, с. 5-14.
2. Богданова М.В. Исследование базовой стохастической транспортной задачи // *Ученые записки Петрозаводского государственного университета*, 2009, по. 7(101), с. 71-73.
3. Бородинова И.А., Сараев Л.А. Стохастическая транспортная задача // *Вестник Самарского государственного университета*, 2010, по. 7(81), с. 16-23.
4. Власенко М.А., Попова Т.М. Оптимизация параметров транспортной задачи // *Материалы национальной научной конференции*. Хабаровск, 04–09 декабря 2023 года, с. 3-6.
5. Дягилева Ю.Ю., Егоров А.Ф. Решение транспортной задачи в условиях стохастической неопределенности параметров // *Математические методы в технике и технологиях*, 2019, т. 8, с. 67-70.
6. Канторович Л.В., Гавурин М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // *Проблемы повышения эффективности работы транспорта*, 1949, с. 110-138.
7. Карасев С.В. Программа для оптимизации решения транспортных задач линейного программирования «Математическое моделирование-транспортные задачи» // *Хроники объединенного фонда электронных ресурсов Наука и образование*, 2014, т. 1, по. 2(57), с. 37.
8. Крейдунова В.В. Исследование транспортной задачи в стохастической постановке // *Прикладная математика и фундаментальная информатика*, 2016, по. 3, с. 51-55.
9. Павлюченко Т.С. Стохастическая транспортная задача // *Прикладная математика и фундаментальная информатика*, 2016, по. 3, с. 55-58.
10. Попова И.А. Транспортные задачи по критерию времени // *Материалы 71-й Всероссийской научно-технической конференции по итогам НИР 2013 года*, Самара, 07–11 апреля 2014 года, с. 140-142.
11. Попова Т.М. Стохастическая модель транспортной задачи // *Перспективы науки*, 2024, по. 8(179), с. 45-50.
12. Пушкарев Г.А., Ощепков Р.А., Туров Д.Д. Решение задачи оптимизации перевозок грузов путем расчета стохастической транспортной задачи // *Аллея науки*, 2017, т. 4, по. 10, с. 48-56.
13. Темнов Э.С. Анализ некоторых подходов в современной практике транспортного моделирования // *Вестник Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета*, 2018, т. 15, по. 5(63), с. 708-717.
14. Юбилейный выпуск к 100-летию со дня рождения Л.В. Канторовича. ЛЕ-НАНД, 2012. 186 с.
15. Vlasov A., Stanovskih A. Additional constraints in the vehicle routing problem // *Universum: технические науки*, 2022, по. 4-12(97), pp. 49-55.

STOCHASTIC TRANSPORTATION PROBLEM WITH RANDOM DEMAND AND ROUTE CHOICE

Shchepina Irina Naumovna, Dr. Sci. (Econ.), Assoc. Prof.

Lukashkov Denis Vladimirovich, Bachelor

Voronezh State University, Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, Russia, 394018;
e-mail: shchepina@mail.ru; denis.lukashkov1@gmail.com

Importance: this article focuses on cost optimization in cargo delivery processes. Transportation logistics challenges represent a highly relevant and rapidly evolving area in economics, particularly amid digital transformation and the growth of goods delivery services. Consequently, there is a need for effective modeling of real-world scenarios in this industry. *Purpose:* to develop and solve a stochastic discrete dynamic transportation model that accounts for demand fluctuations and route selection based on environmental conditions and road congestion. *Research design:* the study involved designing the model and its solution algorithm, implementing the solution in MS Excel and Python, comparing the advantages and limitations of the two tools for the given problem, and conducting simulation experiments to assess the impact of specific factors on the optimal solution. *Results:* the proposed model serves as a modification of the stochastic transportation problem and can be extended with additional parameters and constraints depending on specific client requirements. The problem can be solved in both MS Excel and Python, with Python offering greater flexibility for large-scale simulations and complex transportation scenarios. The model has practical applications in various transportation logistics systems.

Keywords: stochastic dynamic transportation problem, Python, Excel, nonlinear optimization, environmental conditions, random demand, route choice.

References

1. Aleksandrov A.Eh., Yakushev N.V. Stokhasticheskaya postanovka dinamicheskoi transportnoi zadachi s zaderzhkami s uchetom sluchainogo razbroa vremeni dostavki i vremeni potrebleniya. *Upravlenie bol'shimi sistemami: sbornik trudov*, 2006, no. 12-13, pp. 5-14. (In Russ.)
2. Bogdanova M.V. Issledovanie bazovoi stokhasticheskoi transportnoi zadachi. *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2009, no. 7(101), pp. 71-73. (In Russ.)
3. Borodina I.A., Saraev L.A. Stokhasticheskaya transportnaya zadacha. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2010, no. 7(81), pp. 16-23. (In Russ.)
4. Vlasenko M.A., Popova T.M. Optimizatsiya parametrov transportnoi zadachi. *Materialy natsional'noi nauchnoi konferentsii*. Khabarovsk, 04–09 dekabrya

2023 goda, pp. 3-6. (In Russ.)

5. Dyagileva Yu.Yu., Egorov A.F. Reshenie transportnoi zadachi v usloviyakh stokhasticheskoi neopredelennosti parametrov. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh*, 2019, T. 8, pp. 67-70. (In Russ.)

6. Kantorovich L.V., Gavurin M.K. Priimenenie matematicheskikh metodov v voprosakh analiza gruzopotokov. *Problemy povysheniya ehffektivnosti raboty transporta*, 1949, pp. 110-138. (In Russ.)

7. Karasev S.V. Programma dlya optimizatsii resheniya transportnykh zadach lineinogo programmirovaniya "Matematicheskoe modelirovanie-transportnye zadachi". *Khroniki ob»edinennogo fonda ehlektronnykh resursov Nauka i obrazovanie*, 2014, T. 1, no. 2(57), p. 37. (In Russ.)

8. Kreidunova V.V. Issledovanie transportnoi zadachi v stokhasticheskoi postanovke. *Prikladnaya matematika i fundamental'naya informatika*, 2016, no. 3, pp. 51-55. (In Russ.)

9. Pavlyuchenko T.S. Stokhasticheskaya transportnaya zadacha. *Prikladnaya matematika i fundamental'naya informatika*, 2016, no. 3, pp. 55-58. (In Russ.)

10. Popova I.A. Transportnye zadachi po kriteriyu vremeni. *Materialy 71-i Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii po itogam NIR 2013 goda*, Samara, 07–11 aprelya 2014 goda, pp. 140-142. (In Russ.)

11. Popova T.M. Stokhasticheskaya model' transportnoi zadachi. *Perspektivy nauki*, 2024, no. 8(179), pp. 45-50. (In Russ.)

12. Pushkarev G.A., Oshchepkov R.A., Turov D.D. Reshenie zadachi optimizatsii perevozki gruzov putem rascheta stokhasticheskoi transportnoi zadachi. *Alleya nauki*, 2017, T. 4, no. 10, pp. 48-56. (In Russ.)

13. Temnov Eh.P. Analiz nekotorykh podkhodov v sovremennoi praktike transportnogo modelirovaniya. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo avtomobil'no-dorozhnogo universiteta*, 2018, T. 15, no. 5(63), pp. 708-717. (In Russ.)

14. Yubileinyi vypusk k 100-letiyu so dnya rozhdeniya L.V. Kantorovicha. LENAND, 2012. 186 p. (In Russ.)

15. Vlasov A., Stanovskih A. Additional constraints in the vehicle routing problem. *Universum: tekhnicheskie nauki*, 2022, no. 4-12(97), pp. 49-55.