

---

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСК-ТРЕНДОВЫХ ОЦЕНОК СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ

---

**В.В. Давнис,**

доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; vdavnis@mail.ru

**С.Ю. Богданова,**

аспирант кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; svetyachek@rambler.ru

Введено понятие «риск-трендовая» оценка стоимости опциона. Для расчета риск трендовых оценок разработана специальная эконометрическая модель, адекватно отражающая дискретно-непрерывный механизм эволюции цены базового актива. Вычислительный эксперимент подтвердил возможность использования подобных оценок в качестве инструмента для обоснования инвестиционных решений.

**Ключевые слова и фразы:** опцион, риск-нейтральная оценка, риск-трендовая оценка, эконометрическая модель.

«Справедливая» цена [1, 2], которую для опционов рассчитывают биржи, явно не оправдывает возлагаемых на нее надежд. Используя формулу Блэка – Шоулза для расчета теоретической цены, биржи, прежде всего, решают собственные проблемы, оставляя инвесторам выбор среди опционов с разными страйками. Тем самым искусственно создаются условия полного рынка, в рамках которого, в соответствии с финансовой теорией, инвестор может получить гарантированную защиту. Однако для этого ему нужно сделать правильный выбор в созданных биржей условиях неопределенности, которая является благоприятной средой для проведения спекулятивных операций, порождающих неуправляемые процессы кризисных явлений.

Для целенаправленного изменения сложившейся ситуации необходимы исследования по разработке моделей, обеспечивающих расчет внутренней стоимости опционов с учетом действующих на рынке трендов, которые

не принимаются во внимание в классических формулах оценки опционов. Ориентируясь на результаты этих расчетов, инвесторы смогли бы повысить обоснованность принимаемых решений, минимизировав тем самым риск своего выбора.

Осуществить выбор требуемого опциона, используя для этого его риск-нейтральную цену, к сожалению, не удастся. Поэтому для решения данной задачи предлагается специальный подход, в котором на основе использования ключевых идей риск-нейтрального оценивания строятся оценки стоимости опционов, учитывающие реальную эволюцию цены базового актива.

Такую оценку стоимости опциона будем называть *риск-трендовой стоимостью опциона*. Если риск-нейтральная цена представляет собой стоимость портфеля, по которому определяется стоимость хеджа в мире нейтральном к риску, то риск-трендовая цена – это стоимость портфеля, по которому определяется стоимость хеджа в дрейфующем мире. Под дрейфующим миром понимаются ситуации, в которых принимаемые инвестором решения учитывают эволюцию цен базовых активов в соответствии с существующими на рынке трендами.

Реализация этой идеи требует эконометрического подхода [3, 4]. Эконометрический вариант CRR-модели должен отражать как минимум два свойства эволюции цен на  $(B, S)$ -рынке: непрерывное их изменение и дискретное. Следовательно, эконометрическая модель, одновременно отражающая оба свойства эволюции цен, должна быть дискретно-непрерывной. В некотором смысле, ее можно рассматривать и как аналог CRR-модели, и как аналог уравнения, описывающего в модели Блэка – Шоулса механизм формирования доходности акции

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (1)$$

где  $S$  – стоимость базового актива;  $\mu$  – средний уровень доходности;  $\Delta t$  – небольшой отрезок времени, на котором эта модель имеет смысл;  $\sigma$  – риск, измеренный среднеквадратическим отклонением;  $\varepsilon$  – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Формально эконометрический аналог модели (1) можно записать в следующем виде:

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + d x_t + \delta_t, \quad (2)$$

где  $r_t$  – доходность базовой акции в момент времени  $t$ ;  $a_0$ ,  $a_1$  – оцениваемые параметры той части модели, которая отвечает за тренд уровня доходности базовой акции;  $d$  – оцениваемый параметр стохастической составляющей модели, характеризующий средний уровень возможного отклонения

фактически наблюдаемой доходности от тренда и интерпретируемый как величина риска;  $x_t$  – ненаблюдаемая дискретная переменная, принимающая случайным образом два значения: 1 или -1;  $\delta_t$  – ненаблюдаемая случайная величина, характеризующая ту часть вариации моделируемой переменной, которая не объясняется включенными в модель регрессорами.

В отличие от выражения (1), которое имеет смысл только на бесконечно малых отрезках времени, эконометрическая модель сохраняет возможность корректного ее использования на ограниченных интервалах времени. Это позволяет применять ее как для анализа, так и для прогнозных расчетов.

Интерпретация параметра  $d$  как измерителя средней величины риска требует определенных пояснений. Такой подход к измерению риска, по всей вероятности, предлагается впервые. В модели (2) с помощью  $d$  измеряется средняя величина колебаний вокруг тренда. Это отличает данный подход от общепринятого, в котором риск оценивается по отклонениям от среднего значения. Отличие не является принципиальным, так как можно построить модель (2) без тренда, и тогда  $d$  будет измерителем колебаний вокруг среднего. Но есть и более существенные отличия.

Во-первых, измерение риска с помощью коэффициента регрессии, которым является  $d$ , имеет ряд преимуществ перед традиционным измерением с помощью  $\sigma$ , так как одновременно с его оценкой по методу наименьших квадратов рассчитываются характеристики статистической надежности.

Во-вторых, использование величины  $d$  в качестве риска снимает вопрос о необходимости понимания риска как симметричного эффекта. Модель (2) позволяет описать механизм, в котором риск рассматривается только как потери.

Построение эконометрической модели, прежде всего, предусматривает определение зависимой переменной. Известно, что  $(B, S)$ -рынок описывается только двумя переменными. Понятно, что банковский счет  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ , имея детерминированную динамику, без труда может быть определен в любой момент времени и, поэтому не представляет интерес для эконометрического моделирования. Иная ситуация с ценой акции  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ , которая определяется как случайная величина, и поэтому для любого упреждающего момента времени можно корректно говорить только о прогнозных ее оценках.

В принципе можно разработать несколько прогнозных моделей, обеспечивающих получение этих оценок с некоторым уровнем надежности. Можно также предложить различные схемы использования полученных результатов моделирования. Однако перед нами стоит несколько иная задача. Требуется построить эконометрический вариант *CRR*-модели, в котором предусматривается альтернативная динамика стоимости акций с известным законом распределения альтернативных вариантов. Другими

словами, эконометрическая модель должна отражать альтернативность динамики стоимости акций и вопрос, который необходимо решить при ее построении, связан с тем, каким образом в данных исторического периода обнаружить эту альтернативность.

Ответ на поставленный вопрос дают следующие рассуждения. Эконометрический подход предусматривает для своей реализации использование данных исторического периода, который заведомо не содержит альтернативные варианты, и, следовательно, вопрос о возможной их идентификации требует специального изучения. При исследовании этого вопроса имеет смысл обратить внимание на то обстоятельство, что будущее в отличие от прошлого всегда многовариантно и в силу этого несет в себе неопределенность. Но между прошлым и будущим есть определенная взаимосвязь. Каждый момент прошлого отражается в одном из возможных вариантов будущего. Следовательно, альтернативные варианты будущего рождены безальтернативными вариантами прошлого, распределенными по всему горизонту исторического периода случайным образом. Это требует применения специальных приемов при построении эконометрической модели, чтобы можно было, идентифицировав в ее параметрах распределенную во времени альтернативность прошлого, сгенерировать для каждого момента упреждающего периода альтернативную динамику будущего. Различие между альтернативностью, распределенной во времени, и альтернативностью в конкретный момент времени интуитивно понятно и не требует специальных пояснений.

В биномиальной модели  $(B, S)$ -рынка рассматривается всего два варианта стоимости, по которой торгуются акции. Понятно, что альтернативность будущего значительно богаче, однако мы вынуждены рассматривать только два варианта, так как в противном случае мы выйдем за рамки предположений полного рынка и расстанемся с возможностью корректного определения риск-нейтральной или справедливой цены опциона. Теоретически, несмотря на всевозможные вариации, существуют средние характеристики роста и падения цен базового актива, с помощью которых из цены актива в момент заключения контракта путем ее трансформирования можно получить цену актива в момент завершения контракта.

В модели, с помощью которой рассчитываются альтернативные прогнозные варианты, необходимо для логической ее завершенности предусмотреть возможность определения вероятностей, оценивающих реальность этих прогнозных вариантов. А это значит, что для дискретной составляющей модели, а точнее для ее ненаблюдаемой переменной должно быть идентифицировано вероятностное распределение. Таким образом, появляется третья составляющая модели в виде вероятностного распределения, а сама модель, понимаемая как условное математическое

ожидание, записывается следующим образом:

$$E(r_t | r_{t-1}, z_t) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 r_{t-1} + \hat{d}[1 \cdot (1 - F(z_t)) + (-1) \cdot F(z_t)] \quad (3)$$

или 
$$\hat{r}_t = \hat{a}_0 + \hat{d} + \hat{a}_1 r_{t-1} - 2\hat{d}F(z_t), \quad (4)$$

где  $F(z_t)$  – функция, с помощью которой определяется вероятность того, что при определенных условиях, описываемых переменной  $z_t$ , ненаблюдаемая переменная  $x_t$  примет значение равное 0.

В модели (4) уже нет ненаблюдаемой переменной  $x_t$ , и поэтому ее без проблем можно использовать в расчетах прогнозных вариантов. Но при построении модели возникает необходимость в замене значений ненаблюдаемой переменной специально полученными значениями. Обычно в подобных случаях выдвигается гипотеза, в соответствии с которой модель преобразуется к виду, содержащему только наблюдаемые переменные, или формируются значения, обеспечивающие корректную замену ненаблюдаемых значений наблюдаемыми. Например, в эконометрике известны модели с ненаблюдаемыми переменными, для построения которых используются гипотеза адаптивных ожиданий и гипотеза рациональных ожиданий.

В рассматриваемом случае предлагается использовать гипотезу альтернативных ожиданий. Смысл этой гипотезы в том, что ожидаемый инвестором результат носит альтернативный характер. Одна и та же сумма средств, вложенная в одну и ту же ценную бумагу, может порадовать инвестора, а может огорчить. Но в каждый момент времени исторического периода альтернативное событие происходило, и этот результат его реализации можно идентифицировать, договорившись о правилах этой идентификации. Таким правилом может быть сравнение с некоторым пороговым значением. Другими словами, на историческом периоде ненаблюдаемой переменной присваивается значение равное +1, если фактическое значение моделируемого показателя выше заранее заданного порогового значения, и присваивается значение равное -1, если фактическое значение меньше этого порогового значения. В качестве порогового значения в данном случае целесообразно использовать тренд  $\tilde{r}_t = \hat{a}_0 - \hat{a}_1 r_{t-1}$ .

Полученные значения имеют двойное назначение. Они используются в качестве значений факторной переменной при оценке коэффициентов модели (2) и в качестве дискретной зависимой переменной (с заменой -1 на 0) при построении модели бинарного выбора  $F(z)$ , по которой оценивается вероятность реальности альтернативных вариантов.

Естественно, после выбора зависимой переменной модели бинарного выбора возникает вопрос о независимой переменной (переменных), от

которой зависит вероятность, с которой реализовалась альтернативность динамики доходности базового актива. Доходность актива, как правило, зависит от активности рынка ценных бумаг, в качестве индикатора которой чаще всего используется рыночный индекс, например, индекс РТС ( $r_{It}$ ). Поэтому доходность индекса можно использовать для этих целей. Это имеет смысл, так как взаимосвязь индекса с доходностью акций известный факт, который был использован У. Шарпом при модификации модели Г. Марковица. Проблема реализации этой идеи в том, что нужны не просто значения доходности индекса, а прогнозные оценки, с помощью которых можно рассчитать вероятности реальности альтернативных вариантов для упреждающих моментов времени. Таким образом, в окончательном виде оцененная эконометрическая модель  $(B,S)$ -рынка, предназначенная для прогнозных расчетов, записывается в виде системы линейных и нелинейных регрессионных уравнений

$$\hat{r}_{It+1} = \hat{c}_0 + \hat{a}_1 r_{It} + \hat{c} x_t, \quad (5)$$

$$\hat{r}_{t+1} = \hat{a}_0 + \hat{d} + \hat{a}_1 r_t - 2\hat{d} \frac{e^{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \hat{c}}}{1 + e^{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \hat{c}}}. \quad (6)$$

Модель (5) – (6) предназначена для проведения прогнозных расчетов на  $(B,S)$ -рынке и поэтому наделена специфическими свойствами, которые необходимы для того, чтобы обеспечить соблюдение корректности при получении прогнозных оценок динамики этого рынка. Благодаря этой специфике рассчитывается только два прогнозных варианта, что гарантирует проведение всех последующих расчетов в условиях полного рынка. В свою очередь, условия полного рынка обеспечивают возможность применения методики риск-нейтрального оценивания опционов.

Эконометрический подход в отличие от чисто математического обеспечивает построение моделей, при спецификации которых максимально учитываются предположения соответствующей теории, а при идентификации их параметров достигается адекватность. Сформулированное отличие явно в пользу эконометрического подхода, однако, справедливости ради обратим внимание на отсутствие четкого представления о том, что важнее – корректность или адекватность. На наш взгляд, корректность должна доминировать в теоретических исследованиях, а адекватность – при решении частных задач, ориентированных на получение практических результатов.

Формула, по которой в соответствии с предположениями CRR-модели рассчитывается риск-нейтральная цена опциона, может быть записана следующим образом:

$$c = \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max(0, u^j d^{n-j} S - X) \right] / R^n, \quad (7)$$

где  $n$  – число уровней биномиального дерева;  $k$  – число подъемов цены, необходимых для того, чтобы опцион оказался с выигрышем;  $u = 1 + r_u$  – множитель наращивания цены акции в случае, когда средний темп прироста равен  $r_u$ ;  $d = 1 + r_d$  – множитель понижения цены акции в случае, когда средний темп падения равен  $r_d$ ;  $R = 1 + r$  – множитель наращивания кредитной суммы по безрисковой процентной ставке  $r$ ;  $p$  – риск-нейтральная вероятность.

В данной формуле без труда узнается математическое ожидание случайной величины, имеющей биномиальный закон распределения. Таким образом, основная идея, которая реализуется с помощью *CRR*-модели, заключается в том, чтобы для упреждающего периода построить биномиальное дерево, и с помощью этого дерева рассмотреть все возможные варианты эволюции цен базового актива, которые могут иметь место на упреждающем отрезке времени и использовать эти варианты для определения справедливой цены опциона.

Из сказанного следует, что риск-нейтральная цена – это математическое ожидание, при расчете которого использовалась риск-нейтральная вероятность и расчетная внутренняя цена опциона. В свою очередь, риск-нейтральная вероятность и внутренняя цена опциона определяются через множители роста  $u$  и падения  $d$ . В то же время истинные значения этих величин не известны и поэтому возникает проблема их определения. В подобных ситуациях, как правило, рекомендуется использовать оценки. Известно, что оценки, полученные с помощью эконометрического подхода, обладают свойствами, обеспечивающими им высокую надежность. Следовательно, подход, позволяющий получить надежные оценки этих характеристик, является перспективным направлением исследования проблем, связанных с риск-нейтральным оцениванием опционов.

Кроме того, что эконометрический подход позволяет решить вопрос с обоснованием оценок, используемых в качестве множителей усредненного роста и снижения цены базового актива, с его помощью удастся ввести новые элементы анализа справедливой цены опционов.

Чтобы понять смысл этих новых элементов, рассмотрим механизм современной торговли опционами. Он устроен таким образом, что позволяет настроить формулу Блэка – Шоулса для решения проблем, которые необходимо решить бирже, и исключает возможность настройки модели для решения проблем, возникающих перед инвесторами. Проблема инвесторов возникает в связи с тем, что один и тот же опцион торгуется с несколькими страйками. Такой способ торговли опционами предоставляет инвестору возможность выбрать опцион, который действительно ему необходим для хеджирования.

Но реализация данной возможности требует, по сути, принятия решения

в условиях неопределенности, которая возникает в силу следующих причин. Если, например, выбирается опцион, который «глубоко в деньгах», то понятно, что такое решение влечет излишние затраты на хеджирование. В таком случае, как правило, имеет смысл купить эту ценную бумагу сразу. Если же с высокой вероятностью ожидается ситуация, что опцион будет «вне денег», то его приобретение теряет всякий смысл. Поэтому рациональным можно считать такое решение, в соответствии с которым из торгуемых опционов с одной и той же датой исполнения, но с разными страйками, выбирается тот, с помощью которого удастся решить реальную проблему хеджирования. Как правило, это опционы, о которых принято говорить «опцион около денег».

Осуществить выбор требуемого опциона, используя для этого его риск-нейтральную цену, к сожалению, не удастся. Поэтому для решения данной задачи предлагается специальный подход, в котором на основе использования ключевых идей риск-нейтрального оценивания строятся оценки стоимости опционов, учитывающие реальную эволюцию цены базового актива. Выше они были названы риск-трендовыми оценками стоимостью опциона.

В чем различие между этими двумя подходами? Риск-нейтральное оценивание предполагает, что в модели  $(B, S)$ -рынка вероятностное распределение  $p = P(\rho_t = r_u)$  и  $q = P(\rho_t = r_d)$  скачкообразного изменения цены базового актива заменяется другим распределением  $p^* = P(\rho_t = r_u)$  и  $q^* = P(\rho_t = r_d)$ , которое получило название риск-нейтрального. Это новое вероятностное распределение устроено таким образом, что математическое ожидание цены базового актива совпадает с траекторией, которая соответствует росту цены базового актива по безрисковой ставке  $E(S_t | S_{t-1}) = S_{t-1}R$ .

Если в расчетах справедливой цены безрисковую ставку заменить на риск-трендовую  $R^{tr}$ , в соответствии с которой происходит изменение тренда, то математическое ожидание вершин этого дерева на любом уровне будет совпадать с трендом, т.е.

$$\sum_{j=0}^n C_n^j p_r^{*j} (1 - p_r^*)^{n-j} S_0 u^j d^{n-j} = S_{t-1} R^{tr}. \quad (8)$$

Это значит, что в целом все дерево ориентировано вдоль тренда с ростом по риск-трендовой ставке.

Возникает естественный вопрос: «А существует ли защита, применение которой имело бы смысл в этом случае?». Ответ положительный. Такая защита существует, но она не обладает свойством минимального хеджа, так как при ее обосновании предлагается использовать не безрисковую ставку, а ставку, значение которой равно средней доходности базового актива. В этом случае, полагая, что для конкретного временного периода выплаты аналогичные выплатам по опциону можно получить, сформировав портфель



из базовой акции и заемных средств под ставку равную средней доходности базового актива.

Результаты расчетов риск-трендовой оценки стоимости опционов на акции ОАО «Газпром» и их сравнение с риск-нейтральной оценкой приведены в таблице.

Таблица

**Результаты моделирования оценок стоимости опциона  
на акции ОАО «Газпром»**

Параметры CRR-модели		Риск-трендовая оценка	Риск-нейтральная оценка
Ставка заимствования, $r$		0,0793	0,0002
Скачок доходности вверх, $r_u$		0,1257	0,0004
Скачок доходности, вниз $r_d$		0,0358	0,00005
Стоимость базового актива в момент заключения опционного контракта, $S_0$		175,93	
Стоимость базового актива в момент экспирации, $S_T$		183,39	
Риск-нейтральная / трендовая вероятность, $p^*$		0,4840	0,5000
$q^* = 1 - p^*$		0,5160	0,5000
Стоимость опциона в момент заключения контракта (на одну акцию) при страйках:	$X_1 = 175$	9,38	3,37
	$X_2 = 176$	8,43	2,38
	$X_3 = 177$	7,47	1,39
	$X_4 = 178$	6,52	0,41
	$X_5 = 179$	5,57	0,00
	$X_6 = 180$	4,61	0,00
	$X_7 = 181$	3,66	0,00
	$X_8 = 182$	2,71	0,00
	$X_9 = 183$	1,75	0,00
	$X_{10} = 184$	0,83	0,00
	$X_{11} = 185$	0,17	0,00

Анализ результатов, приведенных в таблице, позволяет сделать вывод о том, что риск-трендовое оценивание отличается от риск-нейтрального и по методике расчета стоимости опциона, и по интерпретации получаемых результатов. Но самое главное заключается в том, что они имеют разное предназначение. Риск-нейтральная оценка необходима бирже для того, чтобы разделить спрос и предложение на срочном рынке. Риск-трендовая цена призвана удовлетворить потребность инвестора в инструменте, с помощью которого он смог бы обосновать свои инвестиционные решения в ситуации, когда на срочном рынке торгуются опционы с разными страйками, что существенно осложняет выбор.

### **Список источников**

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики М.: Фазис, 1998. С. 10-56.

2. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С.. Математические методы финансового анализа /М.: Анкил, 2006. 440 с.

3. Давнис В.В., Сурков П.В. Эконометрический вариант биномиальной модели эволюции цен на финансовом рынке // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2007. № 3. т. 2. С. 144-150.

4. Давнис В.В., Богданова С.Ю. Эконометрические подходы к моделированию внутренней стоимости опционов // Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы V междунар. науч.-практ. конф.: в 2-х ч. Воронеж: ИПЦ Воронеж. гос. ун-та, 2009. – Ч. 1.

---

## MODEL BUILDING OF RISK-TREND ESTIMATION OF OPTIONS COST

---

**V.V. Davnis,**

Dr.Sc. of Economy, professor, Chief of Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economics of Voronezh State University; vdavnis@mail.ru

**S.Yu. Bogdanova,**

Post-graduated student of Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economics of Voronezh State University; svetyachek@rambler.ru

In this article is introduced the intension "risk-trend" estimation of option cost. Special econometric model is worked out for calculating risk-trend estimations. This model indicates discrete-continuous mechanism of evolution of basic assets cost. Calculative experiment affirmed possibility of use of equal estimations as an instrument for motivation of investment decision.

**Key words and phrases:** option, risk-neutral estimation, risk-trend estimation, econometric model.