УДК 336.767

О СВЯЗИ МЕЖДУ ВЫБОРОМ СТРАТЕГИИ РЕФИНАНСИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ И СТЕПЕНЬЮ УКЛОНЕНИЯ ОТ РИСКА ИНВЕСТОРА

Л.П. Яновский,
доктор экономических наук, профессор кафедры экономики АПК Воронежского государственного аграрного университета; leonidya60@yandex.ru
С.Н. Владыкин,
аспирант Института менеджмента, маркетинга и финансов, г. Воронеж; sergi.vladykin@googlemail.com

В работе исследуется связь между стратегией инвестирования и отношением к риску инвестора. Показано, что нейтральный к риску, обладающий значительными ресурсами для реинвестирования выбирает портфель Марковица. Доказано также, что долгосрочный инвестор, темп роста капитала которого описывается моделью Мертона – Самуэльсона является уклоняющимся от риска инвестором.

Ключевые слова и фразы: стратегия инвестирования, модель Марковица, функция полезности, степень уклонения от риска.

Хорошо известно, что инвестор на фондовом рынке один и тот же процент потерь и дохода воспринимают по-разному. И это легко объяснить. Так, например, доход в 50% капитала увеличивает капитал инвестора в полтора раза, в то время как потеря 50 % капитала уменьшает капитал в два раза. Однако, если потери и доход составляют незначительный процент капитала, например, по 5%, то в случае потери оставшийся капитал составит 95% от исходного и чтобы восстановить исходный капитал нам понадобится получить доход 5,26%, что практически совпадает с возможностью заработать 5% капитала в благоприятном случае.

Таким образом, степень уклонения рационального инвестора от риска на финансовом рынке зависит от величины капитала подверженного риску и от процентного соотношения возможных доходов к возможным убыткам.

Из сказанного выше вытекает, что величина риска зависит от величины свободных средств находящихся в распоряжении инвестора, что согласуется с трактовкой риска как ресурса [1].

Существует много различных трактовок рыночного риска. Риск трактуется как отклонение (дисперсия) стоимости портфеля или как дисперсия состоящая из квадратов отклонений вниз от средней доходности портфеля; как нижний 1%-5-% квантиль доходности (VAR) и другие.

Обычно каждый портфельный инвестор имеет свой горизонт инвестирования T=n*t, где n число малых периодов t, составляющих период T. В настоящей работе показывается, как число реинвестиций портфеля на всем горизонте инвестирования T влияет на отношение инвестора к риску. Очевидно, что число реинвестиций на фиксированном временном горизонте прямо зависит от наличия свободных ресурсов портфельного инвестора. Так, например, будет показано, что стратегия «купил и держи» является стратегией лица наиболее сильно уклоняющегося от риска и следовательно является оптимальной стратегией для инвестора, не обладающего свободными ресурсами. Такой инвестор, строя оптимальный портфель, будет максимизировать среднюю геометрическую доходность портфеля.

В то же время портфельный инвестор, обладающий максимальными свободными ресурсами будет реинвестировать свой портфель n раз на промежутке T, сообразуясь только с величиной трансзакционных издержек на реинвестирование. Оказывается, что поведение последнего инвестора – это поведение инвестора максимизирующего среднюю арифметическую доходность портфеля, то есть выбирающего портфель Марковица. Поведение такого инвестора можно охарактеризовать как нейтральное к риску.

Обычно вопрос о числе реинвестиций портфеля замалчивается в современной теории портфеля. Более того, требование самофинансируемости портфеля (а значит невозможность рефинансирования) является одним из первичных ограничений при построении современной портфельной теории.

Однако о важности количества реинвестиций портфеля можно судить уже на простейшем примере. Пусть первый инвестор, не обладающий свободными средствами, вкладывает единицу капитала в самофинансируемый портфель на два периода (такая стратегия предполагает получение в расчете на один период среднего темпа роста капитала или что тоже самое средней геометрической доходности, рассчитанной по двум периодам). Пусть второй инвестор, обладающий свободными средствами, рефинансирует портфель в каждом периоде, то есть каждый раз вкладывает единицу капитала сроком на один период. Такая стратегия предполагает получение средней арифметической доходности за два периода. Предположим, что в первом периоде потери портфеля составили 50% капитала, а во втором периоде доходность портфеля составила 70% вложенных средств. Тогда в результате потери первого инвестора за два периода составили 1- 0,5*1,7=0,15 , то есть

15% первоначального капитала, а прибыль второго инвестора (0,5+1,7)-2=0,2, то есть 20% от вложенного за два года капитала.

О функции полезности. Основные определения.

Пусть x – финансовые инвестиции (вложения) в портфель, U(x) –степень (функция) полезности этих вложений. Полезность можно измерять по разному:

- как внутреннюю норму доходности IRR проекта с инвестициями x;
- чистую приведенную стоимость NPV проекта портфельных вложений x;
- приращение стоимости портфеля после дополнительного рефинансирования в размере x проекта;
- приращение степени роста стоимости портфеля (нормы прибыли) после дополнительного рефинансирования в размере x проекта;
- степень достижения какой либо иной цели в зависимости от инвестиции x.

Типичная зависимость полезности от объема вложений в реальной экономике такова: при малых x каждое новое дополнительное вложение расширяет возможности инвестора, поэтому вначале полезность вложений растет с сверхлинейной скоростью по x

$$U(x+1) > U(x) + U(1)\cdot$$

При больших значениях x каждая единица дополнительных вложений уже влияет на результат в меньшей мере и функция полезности растет медленнее, чем линейная функция

$$U(x+1) > U(x) + U(1)\cdot$$

При средних значениях x функция полезности растет линейно по x

$$U(x+1) > U(x) + U(1)\cdot$$

Однако при вложениях в финансовые портфели рост функции полезности не зависит от размера вложений, так как связан не со структурой производства, а с изменением цен и размером дивидентов в расчете на одну акцию.

Характер роста функции полезности может быть использован для выяснения степени отношения инвестора к риску. Говорят, что инвестор избегает риска, если его функция полезности больше для детерминированных величин, чем для случайных величин. Математически это свойство выражается в виде неравенства

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) > \sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i)\ , \qquad (1)$$

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad p_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots,n.$

Функция, удовлетворяющая последним двум условиям, называется вогнутой. Вогнутая функция полезности описывает предпочтения лица избегающего риска. Для вогнутой функции полезности справедливо свойство: отрезок, соединяющий две точки графика функции, находится под графиком (рисунок).

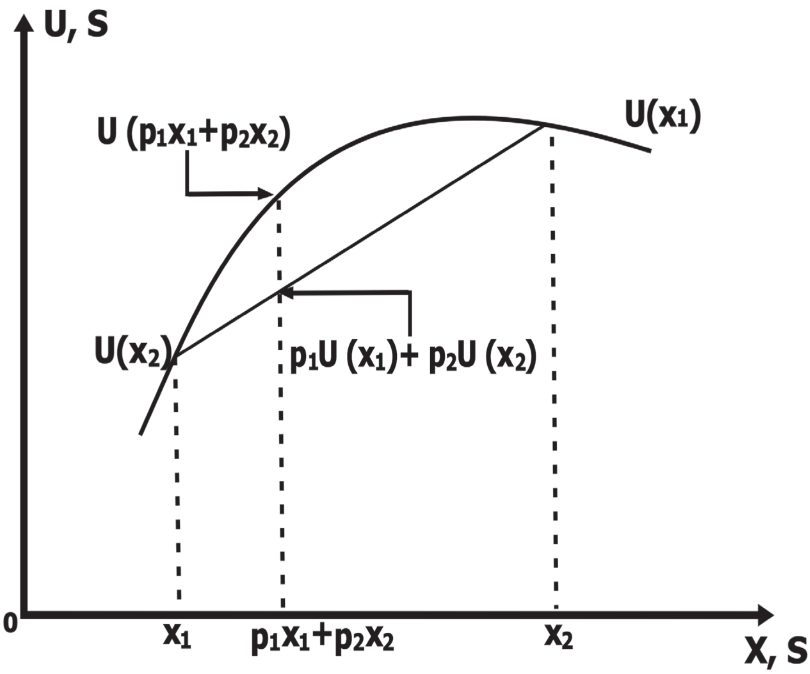

Рис. Вогнутая функция полезности

Множители p_i в формуле (1) можно интерпретировать как вероятности возникновения ситуаций x_i. Следовательно, тогда $U(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i)$ – это полезность детерминированной величины – математического ожидания $M(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ случайной величины x, то есть $U(M(x)) = U(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i)$.

Средняя ожидаемая полезность $M(U(x))$ случайной величины x, принимающей возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$ рассчитывается по формуле

$$M(U(x)) = \sum_{i=1}^{n} p_i U(x_i).$$

Из (1) получаем неравенство

$$U(M(x)) > M(U(x)) \quad .$$

Таким образом, детерминированная величина $M(x)$ предпочтительнее случайной величины x, а разность

$$U(M(x))-M(U(x))=U(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i)-\sum_{i=1}^{n}p_iU(x_i) \qquad (2)$$

может трактоваться как степень уклонения от риска инвестора, то есть как премия которую готов платить инвестор, чтобы иметь дело не с математическим ожиданием случайной величины полезности, а с полезностью математического ожидания.

Премия за риск – доплата к случайной величине, чтобы сделать ее для инвестора одинаково привлекательной с детерминированной средней случайной величины.

Назовем инвестора нейтральным к риску, если средняя полезность случайной величины равна полезности математического ожидания случайной величины. Математически эта характеристика инвестора выражается в виде равенства

$$U(M(x)) = M(U(x))$$

или

$$U(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i)=\sum_{i=1}^{n}p_iU(x_i).$$

Нейтральный к риску инвестор имеет линейную функцию полезности.

Связь между стратегией реинвестирования и функциями полезности. Дискретный случай.

Предположим, что доходность инструмента или портфеля инструментов за элементарный период Δt может принимать только n дискретных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_i \geq 0$, $i=1,...,n$, $\sum_{i=1}^{n}p_i = 1$.

Как уже было замечено выше, инвестор, максимизирующий математическое ожидание доходности за элементарный период Δt будет реинвестировать свой капитал К в конце каждого элементарного периода Δt, поэтому средняя доходность такого инвестора за элементарный период Δt равна

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i \ .$$

Выберем линейную функцию полезности $U(x)=x$. Тогда

$$U(M(x))=U(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=\sum_{i=1}^{n}p_iU(x_i)=M(U(x)).$$

То есть инвестор, максимизирующий математическое ожидание доходности портфеля за элементарный период Δt , например, портфель Марковица без ограничений на дисперсию портфеля, нейтрален к риску.

Если инвестр вкладывает капитал в портфель Марковица с ограничением на дисперсию портфеля, то его функция полезности линейна при условиии ограничения дисперсии в заданных пределах и равна - ∞ при превышении ограничений на величину дисперсии.

В то же время инвестор, вложивший капитал в начальный момент времени и не реинвестирующий капитал за весь период T, получит среднюю доходность за элементарный период Δt, равную

$$M_{геом}(X) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{p_i} - 1 \cdot$$

Приведенные выше формулы средней доходности инвесторов легко получаются переходом к пределу в выборочных частотных выражениях для средней доходности инвесторов разных типов. Положим функцию полезности инвестора в виде

$$U(x) = \ln(1+x) \text{-} 1 \ .$$

Тогда имеем для инвестора, изучающего полезность своей доходности для каждого элементарного периода Δt ·

$$U(M(X)) = \ln(1+\sum_{i=1}^{n} p_i x_i) - 1 = \ln\sum_{i=1}^{n} p_i(1+x_i) - 1;$$

$$M(U(X)) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\ln(1+x_i) - 1) = = \ln\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{p_i} - 1$$

То есть, инвестор, не реинвестирующий капитал на периоде длиной T, является инвестором уклоняющимся от риска со степенью уклонения от риска (3)

$$U(M(X)) - M(U(X)) = \ln\sum_{i=1}^{n} p_i(1+x_i) - 1 - \ln\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{p_i} + 1 =$$

$$= \ln\sum_{i=1}^{n} p_i(1+x_i) - \ln\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{p_i} = \ln\frac{1+M(x)}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{p_i}}. \qquad (3)$$

Мера уклонения от риска (3) может служить аналогом дисперсии для инвестора с самофинансируемым портфелем на промежутке времени T. Следовательно, налагая ограничения на поведение (3) и максимизируя среднюю геометрическую доходность портфеля на элементарном периоде, получаем класс оптимальных портфелей для инвесторов самофинансируемыми портфелями и уклоняющимися от риска в заданном диапазоне.

Инвестирование в рыночный инструмент с непрерывным временем изменения цен на период времени t. Оценка степени уклонения от риска инвестора.

В рамках вероятностной модели изменения цен колебания случайной величины тесно связаны с ее дисперсией. Первая работа по изучению вероятностного характера динамики цен была написана Л. Башелье в 1900 году. Его модель описывалась уравнением

$$S_t = S_0 + \mu \cdot t + \sigma \cdot W(t),$$

где S_t - рыночная цена актива; μ -постоянный коэффициент тренда; *W(t)* - стандартный винеровский процесс, то есть случайный процесс с начальным значением W_0 и *с* независимыми на непересекающихся промежутках нормально распределенными приращениями.

Одним из недостатков модели Башелье является возможность отрицательных цен на активы, что ведет к финансовым парадоксам. При эмпирических проверках данной модели выяснилось, что независимыми надо считать не сами приращения цен, а логарифмы приращений. Математическая модель ценообразования в дифференциальной форме приняла следующий вид:

$$dS_t = S_0(\mu \cdot dt + \sigma \cdot dW(t)),\ t \ge 0. \tag{4}$$

Эта модель была предложена П. Самуэльсоном в 1965 году и подробно изучена в работах Мертона в 1973 году. Затем на основе этой модели Блек и Шоулс получили свою знаменитую формулу для расчета цены опциона.

Из формулы (4) применяя формулу Колмогорова–Ито

$$df(t,W_t) = f'(t,W_t)dW_t + \dot{f}(t,W_t)dt + \frac{1}{2}f''(t,W_t)dt$$

или в интегральной форме

$$f(t,W_t) - f(0,W_0) = \int_0^t \frac{df}{dx}(s,W_s)dW_s + \int_0^t \frac{df}{ds}(s,W_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dx^2}(s,W_s)ds$$

для функции $S_t = f(t,W_t)$ получаем следующее представление:

$$S_t = S_0 \cdot \exp\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w_t\right\}, S_0 > 0. \tag{5}$$

Из последней формулы вытекает что средний темп роста капитала за время t равен $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$. В то время как средняяя арифметическая доходность равна μ. То есть в модели Мертона–Самуэльсона степень уклонения от риска равна $\frac{\sigma^2}{2}$. В самом деле, если положить

$$U(x_t) = \ln S_t / S_0 = \ln\cdot \exp\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w_t\right\} = \left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w_t\right\}$$

и $x_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dw_t$ - случайный темп роста капитала за время *dt* в момент времени t, тогда имеем

$$U(M(x_t)) = U(M(\mu \cdot dt + \sigma \cdot dw_t) = U(\mu \cdot t) = \ln\cdot \exp\{\mu \cdot t\} = \mu \cdot dt;$$

$$M(U(x_t)) = M(\ln S_t / S_0) = M(\ln\cdot \exp\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma \cdot w_t\right\}) = \left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right\},$$

то есть

$$U(M(x_t)) = \{\mu \cdot t\} > \left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right\} = M(U(x_t)).$$

Итак, доказано утверждение: долгосрочный инвестор, темп роста капитала которого описывается формулой (4) (моделью Мертона–Самуэльсона) является уклоняющимся от риска инвестором, со степенью уклонения от риска равной

$$U(E(x_t))\text{- } E(U(x_t))= \left\{\frac{\sigma^2}{2}t\right\} .$$

Рассмотрим теперь вопрос о выборе метода инвестирования на промежутке времени t в рискованные активы. Рассмотрим два предельных случая:

1. Инвестирование постоянным капиталом в K_0 в каждый момент времени t с постоянным математическим ожиданием доходности $M(x)=a$ и дисперсией $D(x)=\sigma^2$ в момент времени t. Тогда математическое ожидание накопленного к моменту времени Т капитала инвестора составит $K_T = K_0(1+aT)$.

2. Инвестирование с начальным капиталом K_0 и последующим реинвестированием вложенных средств в каждый момент времени t. (Стратегия «купил и держи»). Тогда математическое ожидание капитала в момент времени Т будет согласно формуле (5) равно

$$K_T = K_0 \cdot \exp\left\{(a-\frac{\sigma^2}{2})T\right\}, K_0 > 0. \tag{6}$$

Очевидно, что при любом горизонте Т инвестирования при условии высокого риска , то есть при условии

$$a>0, a-\frac{\sigma^2}{2}\le 0 \quad , \tag{7}$$

предпочтительным является первый вариант с постоянным инвести-руемым капиталом на всем промежутке инвестирования, так как в этом случае второй вариант инвестирования ведет к уменьшению капитала инвестора

$$K_T = K_0 \cdot \exp\left\{(a-\frac{\sigma^2}{2})T\right\} \le K_0 .$$

При умеренном риске, то есть при условии

$$a>0, a-\frac{\sigma^2}{2}>0 ,$$

можно вычислить горизонт инвестирования Т* при котором при Т< Т* предпочтителен первый вариант инвестирования, а при Т> Т* - второй вариант инвестирования. Наконец, при Т= Т* первый и второй варианты инвестирования имеют одинаковую инвестиционную привлекательность.

Период инвестирования Т* получим из решения уравнения

$$K_0(1+aT) = K_0 \cdot \exp\left\{(a-\frac{\sigma^2}{2})T\right\}.$$

После сокращения на K_0 получаем

$$1+aT = \exp\left\{(a-\frac{\sigma^2}{2})T\right\}. \tag{8}$$

Для приближенного решения уравнения (6) разложим правую часть уравнения в ряд Тейлора по четвертого слагаемого включительно, а членами более высокого порядка пренебрегаем. Получаем уравнение относительно T*:

$$1 + aT = 1 + (a - \frac{\sigma^2}{2})T^* + \frac{(a - \frac{\sigma^2}{2})^2 T^{*2}}{2!} + \frac{(a - \frac{\sigma^2}{2})^3 T^{*3}}{3!} .$$

После преобразований получаем квадратное уравнение относитетельно T*:

$$\frac{(a - \frac{\sigma^2}{2})^3 T^{*2}}{3} + (a - \frac{\sigma^2}{2})^2 T^* - \sigma^2 = 0 . \quad (7)$$

Выпишем положительное решение квадратного уравнения (7):

$$T^* = \frac{\sqrt{(a - \frac{\sigma^2}{2})((a + \frac{5\sigma^2}{6})} - (a - \frac{\sigma^2}{2})}{\frac{2}{3}(a - \frac{\sigma^2}{2})^2} . \quad (8)$$

Список источников

1 Секерин А.Б., Мамошина Т.М. Анализ и оценка риска. Курс лекций. Москва: Открытый институт Московского государственного университета дизайна и технологии, 2003. 159 с.

2. Markowitz H. M. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. Vol. 7, №1. Pp. 77-91.

3. Markowitz H. M. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments/ Oxford; N.Y.: Blackwell, 1991. 384 p.

4. Tobin J. The Theory of Portfolio Selection // Theory of Interest Rates / Ed. by F.H. Hahn, F.P.R. Brechling. London: MacMillan, 1965. Pp. 3-51.

5. Sharpe W. F. A Simplified Model for Portfolio Analysis // Management Science. 1963. Vol. 9, №2. Pp. 277-293.

6. Шарп У., Александер Г., Бейли Д. Инвестиции. М.: Инфра-М, 1997.

ABOUT CONNECTION BETWEEN CHOICE OF THE STRATEGY OF REFINANCE OF BAG AND DEGREE OF EVASION OF INVESTOR'S RISK

L.P.Yankovskiy,
Dr.Sc. of Economy, professor of Chair of Economics of Agro industrial complex of Voronezh State Agricultural University; sergi.vladykin@googlemail.com
S.N.Vladykin,
Post-graduated student of Institute of Management, Marketing and Finances, Voronezh;leonidya60@yandex.ru

In given article the connection between the strategy of investment and attitude towards investor's risk is explored. It is showed that one neutral to risk, possessing wide reserves for reinvesting, chooses the bag of Markovic. It is also proved that long-term investor, time of asset growth described by Merton-Samuelson's model, appears evasive investor from risk.
Keywords: strategy of investment, Markovic's model, functions of benefit, degree of avoidance from risk.