УДК 336.76

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ С УЧЕТОМ ПРОМЕЖУТОЧНОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

**И.Г. Наталуха,**
кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики и менеджмента Кисловодского института экономики и права;
in63@mail.ru

**Ключевые слова и фразы:** инвестиции, рисковые активы, оптимизация, стохастические процессы.

**Аннотация:** Определены оптимальные стратегии финансового инвестирования агента финансового рынка при наличии промежуточного потребления с учетом стохастической динамики цен рисковых активов и стохастической эволюции параметров инвестиционной среды. В аналитической форме получены составляющие оптимального портфеля (спекулятивный спрос инвестора и портфель хеджирования) как функции рисковых премий, волатильностей цен рисковых активов и характеристик функции полезности инвестора.

## 1. Введение

Финансовое инвестирование непосредственно связано с формированием инвестиционного портфеля. Финансовые рынки в современных условиях (особенно зарождающиеся рынки, к числу которых относится и российский фондовый рынок) характеризуются нестационарными, стохастическими и кризисными явлениями различной природы [1-3]. В таких условиях традиционная портфельная теория [4, 5] и классические методы финансовой математики [6], представляющие собой основанный на статистических методах механизм оптимизации формируемого инвестиционного портфеля по задаваемым критериям соотношения уровня его ожидаемой доходности и риска (ха-рактеризуемого дисперсией доходности), оказываются неадекватными и неспособными объяснить как поведение финансовых временных рядов, так и несоответствие практических рекомендаций по размещению капитала в рисковые активы теоретическим предсказаниям [7, 8], полученным в предположении о постоянных инвестиционных возможностях, т.е. постоянных процентных ставках, ожидаемых доходностях активов, волатильностях и корреляциях доходностей.

Кроме того, инвестирование неотделимо от потребления (инвесторы, как правило, извлекают полезность из промежуточного потребления в различные моменты времени [9, 10], а не только из конечного капитала в конце инвестиционного периода), а инвестиционная стратегия требует динамической реструктуризации портфеля с учетом стохастической эволюции инвестиционной среды, что также не может быть учтено в рамках классической теории. Поэтому возникает необходимость развития методов моделирования оптимального размещения капитала в рисковые активы в условиях стохастического изменения их доходности с учетом стохастических параметров инвестиционной среды.

Впервые задача оптимизации портфеля в стохастической модели с непрерывным временем поставлена в работах [11, 12], однако полученные в явном виде решения соответствуют постоянным инвестиционным возможностям или являются статическими по природе. За редким исключе-нием [9, 13], в большинстве известных исследований проблемы оптимального финансового инвестирования задача решается численно [14-17], что не позволяет выявить вклад составляющих портфеля (спекулятивного спроса на рисковые активы и различных видов спроса на хеджирование) в оптимальное решение. Точные аналитические решения получены лишь в наиболее простых частных случаях. Так, при простой стохастической динамике цен рисковых активов и в предположении о постоянстве процентных ставок и волатильностей цен активов точное решение задачи инвестирования без учета промежуточного потребления найдено в [13]. В работе [9] в предположении о бесконечном временном горизонте получено приближенное аналитическое решение задачи инвестирования (в условиях, когда краткосрочные процентные ставки постоянны, но рисковые премии описываются стохастическим процессом), однако оно явно не связано с задачей оптимального потребления.

В настоящей работе исследуются оптимальные, стратегии инвестирования и потребления с учетом стохастической динамики цен рисковых активов и стохастической эволюции параметров инвестиционной среды. В явном аналитическом виде получены составляющие оптимального портфеля (спекулятивный спрос инвестора и портфель хеджирования) как функции рисковых премий, волатильностей цен рисковых активов и характеристик функции полезности инвестора, по-зволяющие агенту финансового рынка непрерывно реструктуризовывать портфель (максимизируя свою полезность) в соответствии со стохастически меняющимися инвестиционными возможностями. Исследованы свойства оптимальных стратегий.

При функции полезности с постоянным относительным неприятием риска предложен подход к определению замкнутых оптимальных решений инвестирования и потребления в широком классе стохастических моделей эволюции параметров инвестиционной среды. Проведен анализ целесообразности хеджирования рисков, связанных с меняющимися инвестиционными возможностями, и доказано, что инвестору с аддитивной по времени функцией полезности следует хеджировать только стохастические изменения краткосрочной процентной ставки и квадрата рыночных цен риска.

## 2. Базовая математическая модель и свойства оптимальных стратегий

Рассматриваем экономику, динамика которой генерируется $n$-мерным винеровским процессом $z = (z_t)$, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, f, P)$ $F = \{f_t : t \in [0,T]\}$ – правосторонняя фильтрация. Все стохастические процессы, рассматриваемые в модели, предполагаются прогрессивно измеримыми относительно этой фильтрации. Индекс обозначает время $t \in [0,T]$ .

Предполагаем, что существует стохастически эволюционирующая переменная состояния $x = (x_t)$, определяющая изменения во времени процентной ставки по безрисковому активу $r$ , $n$-мерного вектора ожидаемых доходностей по рисковым активам $\mu$ и стохастического процесса волатильностей $\sigma$ размерности $n$ x $n$, т.е.

$$r_t = r(x_t), \quad \mu_t = \mu(x_t, t), \quad \sigma_t = \sigma(x_t, t).$$

Изменения переменной состояния определяют будущие ожидаемые доходности и ковариационную структуру финансового рынка. Рыночная цена риска (рисковая премия по рисковому активу) также определяется переменной состояния:

$$\lambda(x_t) = \sigma(x_t, t)^{-1}\left(\mu(x_t, t) - r(x_t)N\right),$$

где $N$ – $n$-мерный вектор из единиц.

Для простоты сначала рассмотрим ситуацию, когда переменная состояния является одномерной. Динамику цен рисковых активов описываем стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dP_t = diag(P_t)\left[\left(r(x_t)N + \sigma(x_t, t)\lambda(x_t)\right)dt + \sigma(x_t, t)dz_t\right], \tag{1}$$

где $diag(P_t)$ – матрица размерности $nxn$ с $P_t$ по главной диагонали и нулями вне главной диагонали, $dz_t$ – n-мерное стандартное броуновское движение.

Предполагаем, что определяется одномерным диффузионным процессом

$$dx_t = m(x_t)dt + v(x_t)^T dz_t + \hat{v}(x_t)d\hat{z}_t \,, \tag{2}$$

где $\hat{z}$ – одномерное стандартное броуновское движение, не зависящее от $z$, а индекс означает транспонирование. Поэтому при $\hat{v}(x_t) \neq 0$ существует экзогенное возмущение переменной состояния, которое не может быть хеджировано инвестициями на финансовом рынке. Другими словами, рынок в этом случае является неполным (в противном случае, если $\hat{v}(x_t) \equiv 0$ финансовый рынок является полным). Вектор $vx_t$ описывает чувствительность переменной состояния к экзогенным возмущениям рыночных цен активов, вектор $\sigma(x,t)$ v(x) есть вектор мгновенных коэффициентов ковариации между доходностями по рисковым активам и переменной состояния, а матрица $\sigma\sigma^T$ - вариационно-ковариационная матрица ожидаемых доходностей.

Капитал инвестора эволюционирует следующим образом:

$$dW_t = W_t x[r(x_t) + \pi_t^T \sigma(x_t, t)\lambda(x_t)]dt - c_t dt + W_t \pi_t^T \sigma(x_t, t)dz \,, \tag{3}$$

где $c_t$ – стратегия потребления, а $\pi_t$ – стратегия инвестирования (вектор $\pi_t$ определяет доли капитала, размещаемого в каждый из $n$ рисковых активов). Неявная функция полезности инвестора определяется следующим образом:

$$J(W,x,t) = \sup_{(c_s,\pi_s)_{s\in[t,T]}} E_{W,x,t}\left[\int_t^T e^{-\delta(s-t)}u(c_s)ds + e^{-\delta(T-t)}\overline{u}(W_T)\right], \tag{4}$$

где $E$ – оператор математического ожидания, $u(c)$ – мгновенная функция полезности инвестора, $\delta$ – субъективный дисконтный фактор.

Запишем уравнение Беллмана, соответствующее задаче (4)

$$\begin{gathered}\delta J(W,x,t) = \sup_{c\geq 0,\pi\in R^n}\left\{u(c) + \frac{\partial J}{\partial t}(W,x,t) + \right.\\ + J_W(W,x,t)\left(W\left[r(x) + \pi^T\sigma(x,t)\lambda(x)\right] - c_t\right) + \\ + \frac{1}{2}J_{WW}(W,x,t)W^2\pi^T\sigma(x,t)\sigma(x,t)^T\pi + J_x(W,x,t)m(x) + \\ \left. + \frac{1}{2}J_{xx}(W,x,t)\left(v(x)^T v(x) + \hat{v}(x)^2\right) + J_{Wx}(W,x,t)W\pi^T\sigma(x,t)v(x)\right\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Граничное условие к (5) имеет вид $J(W,x,T)=\bar{u}(W)$.

Максимизация правой части уравнения (5) относительно дает условие первого порядка

$$u'(c)=J_W(W,x,t), \tag{6}$$

т.е. текущая полезность от текущего потребления одной дополнительной единицы должна равняться предельной полезности от оптимального инвестирования этой единицы. Обозначая через $I_u$ функцию, обратную предельной полезности $u'(c)$, запишем (пробную) оптимальную стратегию потребления в виде $c_t^* = C(W_t^*, x_t, t)$, где

$$C(W,x,t)=I_u\left[J_W(W,x,t)\right], \tag{7}$$

Максимизация правой части (5) относительно $\pi$ дает следующее условие первого порядка

$$J_W(W,x,t)W\sigma(x,t)\lambda(x)+J_{WW}(W,x,t)W^2\sigma(x,t)\sigma(x,t)^T\pi+$$
$$+J_{Wx}(W,x,t)W\sigma(x,t)\nu(x)=0,$$

так что (пробная) оптимальная инвестиционная стратегия имеет вид

$$\pi_t^* = \Pi(W_t^*, x_t, t),$$

где

$$\Pi(W,x,t)=-\frac{J_W(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\lambda(x)-$$
$$-\frac{J_{Wx}(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\nu(x). \tag{8}$$

Условия второго порядка для максимума выполнены, поскольку $J$ вогнута по $W$, а $u$ вогнута по $c$.

Заметим, что при постоянных инвестиционных возможностях, т.е. если $r$, $\mu$ и $\sigma$ не зависят от времени, второй член в правой части (8) отсутствует (отсюда следует, что при постоянных инвестиционных возможностях спрос инвестора на хеджирование отсутствует), а первый член

$$-\frac{J_W(W,t)}{WJ_{WW}(W,t)}\left(\sigma^T\right)^{-1}\lambda=-\frac{J_W(W,t)}{WJ_{WW}(W,t)}\left(\sigma\sigma^T\right)^{-1}(\mu-rN)$$

есть произведение относительной терпимости инвестора к риску $\frac{-J_W(W,t)}{[WJ_{WW}(W,t)]}$, матрицы, обратной вариационно-ковариационной матрице и вектора ожидаемых избыточных доходностей.

При сокращении инвестиционного горизонта неявная функция полезности $J(W, x, t)$ приближается к конечной функции полезности $\bar{u}(W)$, не зависящей от состояния $x$. Следовательно, производная $J_{Wx}(W, x, t)$ и второй член портфельной стратегии стремятся к нулю при $t \longrightarrow T$. Другими словами, краткосрочные инвесторы (т.е. имеющие короткий инвестиционный горизонт) не хеджируют изменения инвестиционных возможностей. Кроме того, второй член в (8) исчезает для инвесторов с конечным инвестиционным горизонтом в двух специальных случаях:

(1) $J_{Wx}(W, x, t) \equiv 0$. Переменная состояния не влияет на предельную полезность инвестора. Как будет видно из дальнейшего анализа, это всегда справедливо для инвестора с логарифмической полезностью. Такой инвестор не заинтересован в хеджировании изменений переменной состояния.

(2) $v(x) \equiv 0$. Переменная состояния некоррелирована с мгновенной доходностью продаваемых активов. В этом случае инвестор не способен хеджировать изменения переменной состояния.

Во всех остальных случаях переменная состояния приводит к появлению дополнительного спроса инвестора в оптимальном портфеле по сравнению со случаем постоянных инвестиционных возможностей. Из (8) получаем следующий важный результат.

***Теорема 1.*** *Оптимальный портфель включает (1) безрисковый актив (банковский счет), (2) спекулятивный («близорукий») спрос, определяемый весами*

$$\pi_t = \frac{1}{N^T\left(\sigma(x_t, t)^T\right)^{-1}\lambda(x_t)}\left(\sigma(x_t, t)^T\right)^{-1}\lambda(x_t)$$

*и (3) спрос на хеджирование, определяемый весами*

$$\pi_t^{hdg} = \frac{1}{N^T\left(\sigma(x_t, t)^T\right)^{-1}v(x_t)}\left(\sigma(x_t, t)^T\right)^{-1}v(x_t).$$

Заметим, что структура спекулятивного спроса и спроса на хеджирование меняется со временем благодаря изменениям переменной состояния. Следующая теорема показывает, что среди всех портфелей портфель хеджирования имеет максимальную абсолютную корреляцию с переменной состояния. Для полного финансового рынка максимальная корреляция равна единице, и спрос на хеджирование в основном повторяет динамику переменной состояния.

***Теорема 2.*** *Абсолютное значение мгновенной корреляции между изменением стоимости инвестиционной стратегии и изменением переменной состояния максимально для инвестиционной стратегии* $\pi_t = \pi_t^{hdg}$.

**Доказательство.** Процесс стоимости инвестиционной стратегии $\pi = (\pi_t)$ имеет следующую динамику

$$dV_t^{\pi} = V_t^{\pi}\left(r(x_t) + \pi_t^T \sigma(x_t,t)\lambda(x_t)\right)dt + V_t^{\pi}\pi_t^T \sigma(x_t,t)dz_t .$$

Мгновенная дисперсия равна $\left(V_t^{\pi}\right)^2 \pi_t^T \sigma(x_t,t)\sigma(x_t,t)^T \pi$, а мгновенная ковариация с переменной состояния равна $V_t^{\pi}\pi_t^T \sigma(x_t,t)v(x_t)$. Поэтому квадрат мгновенной корреляции составляет

$$\rho^2 \equiv \frac{\left(V_t^{\pi}\pi_t^T \sigma(x_t,t)v(x_t)\right)^2}{\left(\left(V_t^{\pi}\right)^2 \pi_t^T \sigma(x_t,t)\sigma(x_t,t)^T \pi_t\right)\left(v(x_t)^T v(x_t) + \hat{v}(x_t)^2\right)} =$$

$$= \frac{\left(\pi_t^T \sigma(x_t,t)v(x_t)\right)^2}{\left(\pi_t^T \sigma(x_t,t)\sigma(x_t,t)^T \pi_t\right)\left(v(x_t)^T v(x_t) + \hat{v}(x_t)^2\right)}.$$

Портфель, максимизирующий $p_2$, будет также максимизировать абсолютную корреляцию $|p|$. Условие первого порядка существования максимума предполагает, что

$$\sigma(x_t,t)v(x_t)\left(\pi_t^T \sigma(x_t,t)\sigma(x_t,t)^T \pi_t\right) = \left(\pi_t^T \sigma(x_t,t)v(x_t)\right)\sigma(x_t,t)\sigma(x_t,t)^T.$$

Умножая обе части этого равенства на матрицу, обратную к , приходим к равенству

$$\left(\sigma(x_t,t)^T\right)^{-1} v(x_t)\left(\pi_t^T \sigma(x_t,t)\sigma(x_t,t)^T \pi_t\right) = \left(\pi_t^T \sigma(x_t,t)v(x_t)\right), \qquad (9)$$

которое нужно разрешить относительно $\pi_t$. Сумма компонент вектора в левой части равенства (9) равна

$$N^T\left(\sigma(x_t,t)^T\right)^{-1} v(x_t)\left(\pi_t^T \sigma(x_t,t)\sigma(x_t,t)^T \pi_t\right),$$

в то время как сумма компонент вектора в правой части (9) равна

$$\pi_t^T \sigma(x_t,t)v(x_t),$$

поскольку $N^T \pi_t = 1$. Разделив каждую часть равенства (9) на сумму компонент, получаем утверждение теоремы

$$\frac{\left(\sigma(x_t,t)^T\right)^{-1} v(x_t)}{N^T\left(\sigma(x_t,t)^T\right)^{-1} v(x_t)} = \pi_t .$$

Рассмотрим ситуацию, когда имеется единственный рисковый актив, так что $\sigma(x,t)$ и $v(x)$ суть скаляры. Спрос на хеджирование в $\pi_t^*$ принимает вид

$$-\frac{J_{Wx}}{WJ_{WW}}\frac{v}{\sigma}.$$

Заметим, что $J_{WW} < 0$ в силу вогнутости. Если $v$ и $\sigma$ имеют одинаковый знак, то доходность по рисковому активу будет положительно коррелирована с изменениями переменной, состояния. В этом случае видно, что спрос на хеджирование по активу положителен, если предельная полезность $J_W$ возрастает с ростом $x$, так что $J_{Wx} > 0$. По сравнению с ситуацией с постоянными инвестиционными возможностями при наличии спроса на хеджирование инвестор будет размещать большую долю капитала в рисковый актив, имеющий высокую доходность в состояниях рынка с высокой предельной полезностью. Противоположная ситуация имеет место, если $v$ и $\sigma$ имеют разные знаки, т.е. коррелированы отрицательно.

Можно предложить еще одну интерпретацию портфельной стратегии.

***Теорема 3.*** *Оптимальная портфельная стратегия $\pi$ представляет собой единственную стратегию, минимизирующую флуктуации потребления со временем, среди всех портфельных стратегий с одинаковой с $\pi^*$ ожидаемой доходностью.*

**Доказательство.** Ожидаемая доходность по оптимальному портфелю (8) составляет

$$\mu^*(x,t) = r(x) + \left(\pi_t^*\right)^T \left(\mu(x,t) - r(x)N\right).$$

Норма потребления определяется условием

$$c_t^* = C(W_t, x_t, t). \tag{10}$$

Применение леммы Ито к (10) дает

$$dc_t^* = Ddt + \left(C_W(W_t,x_t,t)W_t\pi_t^T\sigma(x_t,t) + C_x(W_t,x_t,t)v(x_t)^T\right)dz_t + \\ + C_x(W_t,x_t,t)\hat{v}(x_t)^T d\hat{z}_t$$

(член с тенденцией  нетрудно вычислить, однако он не играет роли в дальнейшем анализе), откуда следует, что мгновенная дисперсия процесса потребления равна

$$\sigma_{\tilde{n}}^2 \equiv \tilde{N}_W(W,x,t)^2 W^2 \pi^T \sigma(x,t)\sigma(x,t)^T \pi + C_x(W,x,t)^2\left(v(x)^T v(x) + \hat{v}(x)^2\right) + \\ + 2C_W(W,x,t)C_x(W,x,t)W\pi^T\sigma(x,t)v(x).$$

Рассмотрим задачу минимизации $\sigma_{\tilde{n}}^2$ среди всех портфелей $\pi$, имеющих ожидаемую доходность, равную $\mu^*(x,t)$, т.е. портфелей $\pi$ с

$$r(x)+\pi^T\sigma(x,t)\lambda(x)=\mu^*(x,t).$$

Составляя функцию Лагранжа

$$Z=\sigma_c^2+\varphi\left[\mu^*(x,t)-r(x)-\pi^T\sigma(x,t)\lambda(x)\right],$$

находим условие оптимальности

$$\pi^{**}=\frac{\varphi}{2C_W(W,x,t)^2W^2}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\lambda(x)-\frac{C_x(W,x,t)}{WC_W(W,x,t)}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}v(x).$$

Дифференцируя условие $u'(C(W,x,t))=J_W(W,x,t)$ вдоль оптимальной траектории потребления по $W$ и $x$, получаем

$$u''(C(W,x,t))C_W(W,x,t)=J_{\mathbf{W}}(W,x,t),$$

$$u''(C(W,x,t))C_x(W,x,t)=J_{Wx}(W,x,t)\cdot$$

Поэтому

$$\frac{C_x(W,x,t)}{WC_W(W,x,t)}=\frac{J_{Wx}(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)},$$

так что вторые члены выражений $\pi^*$ и $\pi^{**}$ идентичны. Первый член выражения $\pi^{**}$ пропорционален первому члену $\pi^*$, и поскольку портфель выбран так, что он имеет одинаковую ожидаемую доходность с $\pi^*$, первые члены $\pi^{**}$ также должны совпадать. Итак, $\pi^{**}=\pi^*$, что и требовалось доказать.

Выше были обсуждены общие выражения для оптимальных стратегий инвестирования и потребления, выраженные через неизвестную неявную функцию полезности. Чтобы найти конкретные решения, следует подставить стратегии (7), (8) в уравнение Беллмана (5), в результате чего получается дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned}\delta J(W,x,t)&=u\left(I\left(J_W(W,x,t)\right)\right)-J_W(W,x,t)I\left(J_W(W,x,t)\right)+\\&+\frac{\partial J}{\partial t}(W,x,t)+r(x)WJ_W(W,x,t)-\frac{1}{2}\frac{J_W(W,x,t)^2}{J_{WW}(W,x,t)}\lambda(x)^T\lambda(x)+\\&+J_x(W,x,t)m(x)+\frac{1}{2}J_{xx}(W,x,t)\left(v(x)^Tv(x)+\hat{v}(x)^2\right)-\\&-\frac{1}{2}\frac{J_{Wx}(W,x,t)^2}{J_{WW}(W,x,t)}v(x)^Tv(x)-\frac{J_W(W,x,t)J_{Wx}(W,x,t)}{J_{WW}(W,x,t)}\lambda(x)^Tv(x).\end{aligned}\tag{11}$$

Если это уравнение имеет решение $J(W,x,t)$, при котором стратегии (7), (8) допустимы, то эти стратегии действительно являются оптимальными стратегиями инвестирования и потребления. Несмотря на сложность уравнения (11), решения его в замкнутом виде могут быть найдены в ряде интересных модельных спецификаций. Рассмотрим процедуру его решения для широкого класса функций полезности с постоянным относительным неприятием риска.

### 3. Оптимальное решение при функции полезности с постоянным относительным неприятием риска

Возможны три ситуации: (1) инвестор извлекает полезность только из потребления, (2) инвестор извлекает полезность только из конечного капитала и (3) инвестор извлекает полезность и из промежуточного потребления, и из конечного капитала. Можно решить все три задачи одновременно, вводя параметры-индикаторы, равные 0 или 1. Положим

$$u(\tilde{n}) = \varepsilon_1 \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad , \quad \bar{u}(W) = \varepsilon_2 \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad ,$$

где $\gamma$ - коэффициент относительного неприятия риска [18].

Трем описанным выше ситуациям соответствуют значения: (1) $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, (2) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, (3) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Запишем неявную функцию полезности

$$J(W,x,t) = \sup_{(\varepsilon_s,\pi_s)_{s\in[t,T]}} E_{W,x,t}\left[\varepsilon_1 \int_t^T e^{-\delta(s-t)} \frac{c_s^{1-\gamma}}{1-\gamma} ds + \varepsilon_2 e^{-\delta(T-t)} \frac{W_T}{1-\gamma}\right]. \qquad (12)$$

В силу линейности динамики капитала (3) естественно предположить, что если стратегия $(c^*,\pi^*)$ оптимальна при капитале $W_t^*$ и переменной состояния $x$, то стратегия $(kc^*,\pi^*)$ будет оптимальна при капитале $kW_t^*$ и переменной состояния $x$. Тогда

$$J(kW,x,t) = E_t\left[\varepsilon_1 \int_t^T e^{-\delta(s-t)} \frac{(kc_s^*)^{1-\gamma}}{1-\gamma} ds + \varepsilon_2 e^{-\delta(T-t)} \frac{(kW_T^*)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] =$$

$$= k^{1-\gamma} E_t\left[\varepsilon_1 \int_t^T e^{-\delta(s-t)} \frac{(c_s^*)^{1-\gamma}}{1-\gamma} ds + \varepsilon_2 e^{-\delta(T-t)} \frac{(W_T^*)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] = k^{1-\gamma} J(W,x,t),$$

т.е. неявная функция полезности однородна степени $1-\gamma$ по капиталу. Подставляя $k = \frac{1}{W}$ и преобразуя, получаем

$$J(W,x,t) = \frac{g(x,t)^{\gamma} W^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \qquad (13)$$

где $g(x,t)^{\gamma} = (1-\gamma)J(1,x,t)$. Из конечного условия $J(W,x,T) = \varepsilon_2 \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ имеем $g(x,T)^{\gamma} = \varepsilon_2$, что эквивалентно $g(x,T) = \varepsilon_2$ при $\varepsilon_2 = 1(0)$.

Соответствующие производные от *J* равны

$$J_W(W,x,t)=g(x,t)^{\gamma}W^{-\gamma},$$
$$J_{WW}(W,x,t)=-\gamma g(x,t)^{\gamma}W^{-\gamma-1},$$
$$J_x(W,x,t)=\frac{\gamma}{1-\gamma}g(x,t)^{\gamma-1}g_x(x,t)W^{1-\gamma}, \tag{14}$$
$$J_{xx}(W,x,t)=-\gamma g(x,t)^{\gamma-2}g_x(x,t)^2W^{1-\gamma}+\frac{\gamma}{1-\gamma}g(x,t)^{\gamma-1}g_{\mathbf{x}}(x,t)W^{1-\gamma},$$
$$J_x(W,x,t)=\frac{\gamma}{1-\nu}g(x,t)^{\gamma-1}g_x(x,t)W^{1-\gamma},$$
$$\frac{\partial J}{\partial t}(W,x,t)=\frac{\gamma}{1-\gamma}g(x,t)^{\gamma-1}\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)W^{1-\gamma}.$$

Оптимальная инвестиционная стратегия принимает вид

$$\Pi(W,x,t)=\frac{1}{\gamma}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\lambda(x)+\frac{g_x(x,t)}{g(x,t)}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}v(x), \tag{15}$$

а оптимальная стратегия потребления определяется соотношением

$$C(W,x,t)=\varepsilon_1\frac{W}{g(x,t)} \tag{16}$$

(если инвестор не извлекает полезности из промежуточного потребления, $C\equiv 0$). Из (16) следует, что оптимальное потребление представляет собой зависящую от времени и переменной состояния часть капитала. Оптимальные доли капитала, размещаемые в различные рисковые активы, как следует из (15), не зависят от капитала, но зависят от состояния и времени.

Подставляя производные (14) в уравнение (11) и упрощая, получаем, что функция *g (x, t)* должна являться решением следующего дифференциального уравнения в частных производных

$$\begin{gathered}0=\varepsilon_1-\left(\frac{\delta}{\gamma}-\frac{1-\gamma}{\gamma}r(x)-\frac{1-\gamma}{2\gamma^2}\lambda(x)^T\lambda(x)\right)g(x,t)+\\ \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)+\left(m(x)+\frac{1-\gamma}{\gamma}\lambda(x)^Tv(x)\right)g_x(x,t)+\\ +\frac{1}{2}g_{\mathbf{x}}(x,t)\left(v(x)^Tv(x)+\hat{v}(x)^2\right)-\frac{1}{2}(1-\gamma)\hat{v}(x)^2\frac{g_x(x,t)^2}{g(x,t)}\end{gathered} \tag{17}$$

с конечным условием $g(x,T)=\varepsilon_2$. Анализ показывает, что уравнение (17) имеет замкнутые решения в широком классе аффинных и квадратичных моделей (т.е. если $r(x)$, $\lambda(x)^T\lambda(x)$, $m(x)$, $v(x)^T\lambda(x)$, $v(x)^Tv(x)$ и $\hat{v}(x)^2$ являются аффинными или квадратичными функциями *x*).

Применяя описанную процедуру к задаче с логарифмической полезностью, получаем $J_{Wx}(W,x,t)=0$, и оптимальная стратегия инвестора принимает вид

$$\begin{pmatrix} \Pi_0(W,x,t) \\ \Pi(W,x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-N^T\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\lambda(x) \\ \left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\lambda(x) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $\Pi_0$, $\Pi$ – доли капитала, размещаемого в безрисковый и рисковые активы соответственно. Из (18) видно, что инвестор с логарифмической полезностью не хеджирует стохастические изменения инвестиционных возможностей.

## 4. Оптимальные стратегии инвестирования и потребления при многомерной переменной состояния

Рассмотрим обобщение модели на ситуацию, когда переменная состояния *x* имеет размерность *k* и следует диффузионному процессу

$$dx_t = m(x_t)dt + v(x_t)^T dz_t + \hat{v}(x_t)d, \tag{19}$$

где *m* – вектор-функция размерности *k*, *v* и $\hat{v}$ – функциональные матрицы размерности *n x k* и *k x k* соответственно, $\hat{z}$ – стандартное броуновское движение размерности *k*, не зависимое от *z*. Уравнение Беллмана принимает вид

$$\begin{aligned} \delta J(W,x,t) = \sup_{c\geq 0,\pi\in R^n} \Big\{ & u(c) + \frac{\partial J}{\partial t}(W,x,t) + J_W(W,x,t)\left(W\left[r(x)+\pi^T\sigma(x,t)\lambda(x)\right]-c\right) + \\ & + \frac{1}{2}J_{WW}(W,x,t)W^2\pi^T\sigma(x,t)\sigma(x,t)^T\pi + J_x(W,x,t)^T m(x) + \\ & + \frac{1}{2}tr\left(J_{xx}(W,x,t)\left[v(x)^T v(x)+\hat{v}(x)\hat{v}(x)^T\right]\right) + W\pi^T\sigma(x,t)v(x)J_{Wx}(W,x,t)\Big\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Максимизация правой части (20) относительно *c* и $\pi$ приводит к следующим (пробным) оптимальным стратегиям потребления и инвестирования

$$c_t^* = C(W_t^*, x_t, t),$$

$$C(W,x,t) = I(J_W(W,x,t));$$

$$\pi_t^* = \Pi(W_t^*, x_t, t),$$

$$\Pi(W,x,t) = -\frac{J_W(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\lambda(x) - \left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}v(x)\frac{J_{Wx}(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}.$$

Можно представить последний член *Π* в виде суммы *k* членов, по одному на каждую компоненту переменной состояния:

$$\Pi(W,x,t) = -\frac{J_W(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\lambda(x) - \\ -\sum_{j=1}^{k}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\begin{pmatrix} v_{1j}(x) \\ v_{2j}(x) \\ \dots \\ v_{nj}(x) \end{pmatrix}\frac{J_{Wx_j}(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}. \quad (21)$$

Каждое из слагаемых в сумме интерпретируется как вложение капитала, хеджирующее изменение в одной компоненте переменной состояния. Поэтому в рассматриваемом случае имеет место разделение портфеля на *k + 2* фонда: капитал инвестируется в безрисковый актив, спекулятивный фонд и *k* фондов хеджирования.

Подставляя стратегии $c_t^*$ и $\pi_t^*$ обратно в уравнение Беллмана, получаем уравнение в частных производных второго порядка

$$\delta J(W,x,t) = u\left(I\left(J_W(W,x,t)\right)\right) - J_W(W,x,t)I\left(J_W(W,x,t)\right) + \\ + \frac{\partial J}{\partial t}(W,x,t) + r(x)WJ_W(W,x,t) - \frac{1}{2}\frac{J_W(W,x,t)^2}{J_{WW}(W,x,t)}\lambda(x)^T\lambda(x) + \\ + J_x(W,x,t)^T m(x) + \frac{1}{2}tr\left(J_{xx}(W,x,t)\left[v(x)^T v(x) + \hat{v}(x)\hat{v}(x)^T\right]\right) - \\ - \frac{1}{2J_{WW}(W,x,t)}J_{Wx}(W,x,t)^T v(x)v(x)^T J_{Wx}(W,x,t) - \\ - \lambda(x)^T v(x)\frac{J_W(W,x,t)J_{Wx}(W,x,t)}{J_{WW}(W,x,t)}. \quad (22)$$

При функции полезности с постоянным относительным неприятием риска решение уравнения (22) можно найти в виде

$$J(W,x,t) = \frac{g(x,t)^\gamma W^{1-\gamma}}{1-\gamma}. \quad (23)$$

Функция (23) действительно будет решением уравнения Беллмана, если функция *g (xt)* является решением следующего дифференциального уравнения в частных производных

$$0 = \varepsilon_1 - \left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{1-\gamma}{\gamma}r(x) - \frac{1-\gamma}{2\gamma^2}\lambda(x)^T\lambda(x)\right)g(x,t) + \\ + \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) + \left(m(x) + \frac{1-\gamma}{\gamma}v(x)^T\lambda(x)\right)^T g_x(x,t) + \\ + \frac{1}{2}tr\left(g_{xx}(x,t)\left[v(x)^T v(x) + \hat{v}(x)\hat{v}(x)^T\right]\right) - \\ - \frac{1}{2}(1-\gamma)g_x(x,t)^{-1}g_x(x,t)^T\hat{v}(x)\hat{v}(x)^T g_x(x,t)$$

с конечным условием $g(x,T)=\varepsilon_2$. Оптимальная инвестиционная стратегия и стратегия потребления тогда определяются выражениями

$$\Pi(W,x,t)=\frac{1}{\gamma}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\lambda(x)+\frac{1}{g(x,t)}\left(\sigma(x,t)^T\right)^{-1}\nu(x)g_x(x,t), \tag{25}$$

$$C(W,x,t)=\frac{W}{g(x,t)}. \tag{26}$$

## 5. Какие риски следует хеджировать?

Из анализа, проведенного выше, может показаться, что инвесторы должны хеджировать все переменные, влияющие на $r_t$, $\mu_t$ и $\sigma_t$, но в действительности это не так. Покажем, что инвестору имеет смысл хеджировать только те риски, которые влияют на $r_t$ и $\lambda_t$.

Рассмотрим инвестора, выбирающего непосредственно «вектор волатильности капитала» $\varphi_t=\sigma_t^T\pi_t$ вместо вектора $\pi_t$. В этих обозначениях капитал эволюционирует следующим образом:

$$dW_t=W_t\left[r_t+\varphi_t^T\lambda_t\right]dt-c_t dt+W_t\varphi_t^T dz.$$

Неявная функция полезности имеет вид

$$J_t=\sup_{(c,\varphi)}E_t\left[\int_t^T e^{-\delta(s-t)}u(c_s)ds+e^{-\delta(T-t)}\overline{u}(W_T)\right].$$

Заметим, что задача оптимизации не включает $\mu_t$ или $\sigma_t$. Предполагая теперь, что существует переменная $x_t$, так что

$$r_t=r(x_t),\quad \lambda_t=\lambda(x_t),$$

имеем $J_t=J(W_t,x_t,t)$, и можно использовать метод динамического программирования.

Для многомерной переменной получаем оптимальный вектор волатильности капитала

$$\varphi_t=-\frac{J_W(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}\lambda(x_t)-\nu(x)\frac{J_{Wx}(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}. \tag{27}$$

Следовательно, оптимальная портфельная стратегия имеет вид

$$\pi_t=-\frac{J_W(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}\left(\sigma^T\right)^{-1}\lambda(x_t)-\left(\sigma^T\right)^{-1}\nu(x)\frac{J_{Wx}(W,x,t)}{WJ_{WW}(W,x,t)}. \tag{28}$$

Из этого анализа можно заключить, что инвестор должен будет хеджировать только переменные, влияющие на краткосрочную процентную ставку и рыночные цены риска (это, конечно, справедливо только в рамках рассматриваемой постановки задачи: например, инвестор со стохастическим трудовым доходом будет также хеджировать связанный с ним риск). Стохастические изменения в $\mu_t$ и $\sigma_t$ интересны только с точки зрения их влияния на стохастические изменения рыночной цены риска! Можно представить финансовый рынок, на котором волатильности изменяются стохастически, но ожидаемые доходности по рисковым активам следуют изменениям волатильностей, так что рыночная цена риска постоянна во времени. На таком рынке ни один агент не будет оптимально хеджировать изменения волатильностей и ожидаемых доходностей. Матрица волатильностей рисковых активов $\sigma_t$ оказывает влияние, когда агент хочет найти портфель $\pi_t$, генерирующий желаемый вектор волатильности капитала $\varphi_t$.

Этот результат может быть усилен следующим образом. Рассмотрим дифференциальное уравнение (24). Предположим, что и $r$, и $\lambda^T\lambda$ и, следовательно коэффициент при *g (x, t)*, не зависят от *x*. Тогда функция *g (t)*, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению

$$0 = \varepsilon_1 - \left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{1-\gamma}{\gamma} r(t) - \frac{1-\gamma}{2\gamma^2} \lambda(t)^T \lambda(t)\right) g(t) + g'(t)$$

и условию $g(T) = \varepsilon_2^{\frac{1}{\gamma}}$, будет также удовлетворять уравнению в частных производных (24). Таким образом, в этом случае решение *g (xt)* уравнения (24) не зависит от *x*. Следовательно, спрос на хеджирование в стратегии (25) исчезает. Другими словами, инвестор будет хеджировать только стохастические изменения, влияющие на краткосрочную процентную ставку $r_t$ и на квадрат рыночных цен риска

$$\lambda_t^T \lambda_t = (\mu_t - r_t N)^T \left(\sigma_t \sigma_t^T\right)^{-1} (\mu_t - r_t N).$$

Подытожим полученные результаты в следующей теореме.

**Теорема 4.** *Инвесторы, характеризующиеся аддитивной по времени функцией полезности, хеджируют только стохастические изменения краткосрочной процентной ставки и квадрата рыночных цен риска* $\lambda_t^T \lambda_t$.

Этот результат допускает следующую интуитивную интерпретацию. «Касательный» портфель определяется соотношением (см. **Теорему 1**)

$$\pi_t = \frac{1}{N^T \left(\sigma_t^T\right)^{-1} \lambda_t} \left(\sigma_t^T\right)^{-1} \lambda.$$

Ожидаемая избыточная доходность по «касательному» портфелю равна

$$\left(\pi_t\right)^T\left(\mu_t - r_t N\right) = \frac{1}{N^T\left(\sigma_t^T\right)^{-1}\lambda_t}\lambda_t^T\lambda_t \cdot$$

Волатильность «касательного портфеля» определяется выражением

$$\sqrt{\left(\pi_t\right)^T\sigma_t\sigma_t^T\pi_t} = \frac{1}{N^T\left(\sigma_t^T\right)^{-1}\lambda_t}\sqrt{\lambda_t^T\lambda_t} \cdot$$

Наклон мгновенной рыночной линии поэтому равен $\sqrt{\lambda_t^T\lambda_t}$. (В модели с единственным рисковым активом $\lambda_t = \left(\mu_t - r_t\right)/\sigma_t$ и $\sqrt{\lambda_t^T\lambda_t} = \sqrt{\lambda_t^2} = \lambda_t$). В статической постановке оптимальный портфель определяется положением рыночной линии, т.е. (1) безрисковой процентной ставкой *r* и (2) наклоном, который равен коэффициенту Шарпа для «касательного» портфеля. Поэтому естественно, что для инвесторов в динамической модели представляют интерес изменения только этих двух переменных.

## 6. Заключение

В работе показано, что проблема определения оптимальных стратегий инвестирования и потребления с учетом стохастической динамики цен рисковых активов и стохастической эволюции параметров инвестиционной среды может быть решена в замкнутой форме. Для широкого класса моделей предложен метод сведения уравнения в частных производных, характеризующего оптимальные портфельные веса (как функции волатильностей, краткосрочной процентной ставки, инвестиционного горизонта и коэффициента относительного неприятия риска), к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого может быть найдено в аналитическом виде при конкретных спецификациях. Проведен анализ целесообразности хеджирования рисков, влияющих на параметры инвестиционной среды, и выяснено, что инвестору с аддитивной по времени функцией полезности оптимально хеджировать только стохастические изменения краткосрочной процентной ставки и квадрат рисковой премии по рисковым активам.

**Список источников**


1. Eichengreen B. (2002): Financial crises and what to do about them. Oxford: Oxford University Press.
2. Sornette D. (2002): Why stock markets crash. Princeton: Princeton University Press.
3. Наталуха И.Г. Стратегии оптимального хеджирования процентного риска облигациями // Финансы и кредит. – 2005. – № 30 (198). – С. 38-40.
4. Шарп У., Александер Г., Бейли Д. (2003): Инвестиции. М.: ИН-ФРА-М.
5. Крушвиц Л. (2000): Финансирование и инвестиции, СПб.: Питер.

6. Четыркин Е.М. (2002): Финансовая математика. М.: Дело.

7. Samuelson P.A. (1994): The long-term case for equities and how it can be oversold // Journal of Portfolio Management. V. 21. №1.

8. Canner N., Mankiw N.G., Weil D.N. (1997): An asset allocation puzzle // American Economic Review. V. 87. №2. P. 181-191.

9. Campbell J.Y., Viceira L.M. (1999): Consumption and portfolio deci-sions when expected returns are time – varying // Quarterly Journal of Economics. 1999. V. 114. №2.

10. Наталуха И.Г. Моделирование оптимальных стратегий инвестирования и потребления в стохастической инвестиционной среде // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2005. – № 1. – С. 82-86.

11. Merton R.C. (1969): Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous – time case // Review of Economics and Statistics. V. 51. №2.

12. Merton R.C. (1971): Optimum consumption and portfolio rules in a continuous – time model // Journal of Economic Theory. V.3. №2.

13. Kim T.S., Omberg E. (1996): Dynamic nonmyopic portfolio behaviour // Review of Financial Studies. V.9. №1.

14. Balduzzi P., Lynch A.W. (1999): Transaction costs and predictability: some utility cost calculations // Journal of Financial Economics. V. 52. №1.

15. Barberis N. (2000): Investing for the long run when returns are predictable // Journal of Finance. V. 55, №1.

16. Brandt M.W. (1999): Estimating portfolio and consumption choice: a conditional Euler equations approach // Journal of Finance. V. 54. №6.

17. Brennan M.J., Schwartz E.S., Lagnado R. (1997): Strategic asset allocation // Journal of Economic Dynamics and Control. V. 21. №7.

18. Arrow K.J. (1971): The theory of risk aversion // Essays in the Theory of Risk – Bearing / Ed. by K.J. Arrow, Amsterdam: North-Holland.

# MODELING OF OPTIMAL PORTFOLIO STRATEGIES TAKING INTO ACCOUNT INTERMEDIATE CONSUMPTION UNDER STOCHASTIC CONDITIONS

**I.G. Natalukha,**
Ph.D. in Economics, Associate professor of the Chair of Economy and Management, the Kislovodsk Institute of Economy and Law;
in63@mail.ru

**Key words and phrases:** investments, risky assets, optimization, stochastic processes.

**Abstract:** Optimal financial investment strategies of an agent of the financial market when there is intermediate consumption taking into account stochastic dynamics of prices of risky assets and stochastic evolution of investment environment parameters are determined. Constituent parts of an optimal portfolio (speculative demand of an investor and a hedging portfolio) as functions of risk premiums, volatilities of risk assets prices and characteristics of utility of an investor are received in analytical form.