

---

## О ПЕРСПЕКТИВНОМ НАПРАВЛЕНИИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОБЛЕМ РИСК- НЕЙТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ОПЦИОНОВ

---

**Г.Б. Суюнова,**

соискатель кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; [suyunovazhanna@mail.ru](mailto:suyunovazhanna@mail.ru)

**Ключевые слова и фразы:** опцион, риск-нейтральная оценка, CRR-модель.

**Аннотация:** Обсуждается подход к оценке стоимости опционов, в основе которого лежит модель Кокса – Росса – Рубинштейна (CRR-модель). Обосновывается целесообразность использования аппарата эконометрического моделирования для оценки характеристик этой модели.

В последней четверти XX в. на финансовом рынке был создан новый сектор – рынок производных финансовых инструментов (деривативов). Его появление стало своеобразным результатом поиска таких финансовых инструментов, которые могли бы повысить надежность инвестирования. Этот сектор финансового рынка вызвал огромный интерес у инвесторов, о чем свидетельствуют высокие темпы его развития.

Все возрастающая популярность деривативов (фьючерсов, форвардов, опционов, свопов) объясняется тем, что их можно использовать как для снижения риска, так и для ведения спекулятивной игры, а значит – для получения значительной быстрой прибыли.

Проанализируем структуру операций на РТС [1]. Как видно из таблицы, наибольшая доля сделок приходится на опционы и фьючерсы на индексы.

Рассмотрим более подробно финансовые опционы. Опцион – это определенный тип контракта, основы структуры которого отражены на рисунке.

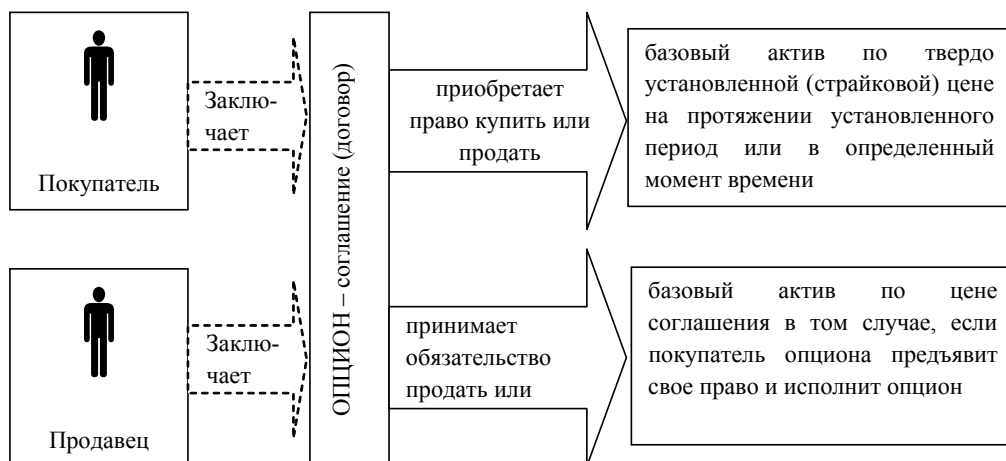
Обоснование стоимости опционов было и, несмотря на нобелевские премии за создание красивого в теоретическом плане и полезного для проведения практических расчетов инструмента в виде формулы Блэка – Шоулза, продолжает оставаться не до конца решенной проблемой современной финансовой теории. В настоящее время принято считать, что непротиворечивость теоретического обоснования достигнута при построении двух моделей, используемых для оценки стоимости опционов.

Имеется в виду модель Блэка – Шоулза [2] и модель Кокса – Росса – Рубинштейна [3].

Таблица

**Информация об общем количестве сделок и общем стоимостном объеме сделок, заключенных в порядке вторичного обращения на ОАО «Фондовая биржа РТС» в январе 2010 г.**

Вид ценных бумаг и срочных сделок	Аукционный режим		Режим переговоров		Сделки репо		Суммарно	
	Стоимостной объем, млн. руб	Количество сделок	Стоимостной объем, млн. руб	Количество сделок	Стоимостной объем, млн. руб	Количество сделок	Стоимостной объем, млн. руб	Количество сделок
Суммарно по видам бумаг и срочных сделок	1 484 744	6 225 854	22 650	8 095	196	9	1 507 591	6 233 958
Акции	200 220	360 384	13 118	5 644	196	9	213 534	366 037
Корпоративные облигации	2	3	-	-	-	-	2	3
Паи ПИФов	-	-	710 443	1	-	-	0,7	1
Фьючерсы на акции	124 415	1 621 410	597	1 370	-	-	125 013	1 622 780
Фьючерсы на индексы	991 317	3 926 573	1 672	296	-	-	992 989	3 926 869
Прочие фьючерсы	132 578	247 896	3 981	388	-	-	136 559	248 284
Опционы на акции								
Опционы на фьючерсы на акции	4 424	16 169	1 004	253	-	-	5 428	16 422
Опционы на фьючерсы на индексы	29 296	52 582	2 276	143	-	-	31 573	52 725
Прочие опционы	2 489	837	-	-	-	-	2 489	837



*Рис. Основы структуры финансового опциона*

Революционная идея Блэка, Шоулза и Мертона о том, что цена опциона напрямую связана со стоимостью его хеджирования, позволила создать теоретически непротиворечивую модель. Ученые продемонстрировали, что опционная позиция может быть полностью защищена от риска при помощи самофинансируемой стратегии динамического хеджирования, которая в каждый момент времени генерирует выплаты, равные выплатам опциона.

Через несколько лет после теоретических обоснований модели Блэка – Шоулза Кокс и Росс опубликовали результаты своих исследований по разработке модели, позволяющей получить риск-нейтральную оценку стоимости опционов. Идеи, на основе которых построена эта модель, открыли путь для разработки множества подходов к оценке опционов с использованием биномиального дерева или метода статистических испытаний (метод Монте-Карло) для моделирования стоимости опциона в будущем.

Данная модель обеспечивает проведение расчетов «в мире, нейтральном к риску». Это позволяет обойти проблему оценки «истинной» ожидаемой доходности и «истинной» ставки дисконтирования. Расчеты, по сути, проводятся в предположении, что ожидаемая доходность всех финансовых активов и ставка дисконтирования принимаются равными безрисковой процентной ставке. В действительности отношение инвесторов к риску нельзя считать нейтральным, но при взвешенном моделировании такое предположение приводит к обоснованным оценкам стоимости опционов.

Модель, на основе которой проводятся эти расчеты, принято называть биномиальной моделью Кокса – Росса – Рубинштейна (CRR-моделью). Построение модели основано на упрощающем предположении о том, что за каждый достаточно короткий промежуток времени курс базового актива может перейти из исходного состояния только в одно из двух возможных состояний. Такое предположение позволяет легко определить все возмож-

ные значения стоимости базового актива в упреждающем периоде, а затем использовать их в расчетах.

Полагая, что для одного временного периода выплаты, аналогичные выплатам по опциону, можно получить, сформировав портфель из акций и заемных средств, запишем выражение для определения стоимости такого портфеля в начальный момент времени

$$nS - B = c_0, \quad (1)$$

где  $B$  – цена акции в момент заключения опционного контракта;  $c$  – сумма кредита, получаемого под безрисковую процентную ставку;  $n$  – количество акций, включаемых в хеджирующий портфель;  $c_0$  – стоимость опциона в момент заключения контракта.

В случае, когда до исполнения опциона рассматривается всего один период, стоимость самофинансируемого портфеля воспроизводящего выплаты по опциону формируется в соответствии с одним из следующих уравнений:

$$nSu - RB = c_u, \quad (2)$$

$$nSd - RB = c_d, \quad (3)$$

где  $c_u$  – стоимость портфеля и, следовательно, опциона в случае, когда цена акции увеличилась;  $c_d$  – стоимость портфеля и, следовательно, опциона в случае, когда цена акции снизилась;  $u = 1 + r_u$  – множитель наращивания цены акции в случае, когда прирост равен  $r_u$ ;  $d = 1 + r_d$  – множитель понижения цены акции в случае, когда падение равно  $r_d$ ;  $R = 1 + r$  – множитель наращивания кредитной суммы по безрисковой процентной ставке  $r$ .

Решение системы уравнений (3)-(4) позволяет определить структуру портфеля, который генерирует те же самые денежные потоки, что и опцион. В общем виде решение записывается следующим образом:

$$n = \frac{c_u - c_d}{(u - d)S}, \quad B = \frac{dc_u - uc_d}{(u - d)R}. \quad (4)$$

Тогда стоимость опциона в начальный период

$$c_0 = \left[ \left( \frac{R - d}{u - d} \right) c_u + \left( \frac{u - R}{u - d} \right) c_d \right] / R. \quad (5)$$

Числитель полученной формулы представляет собой ожидаемую стоимость опциона к моменту истечения контракта. Вычисляется эта стоимость как взвешенная сумма выплат по контракту в конце периода. В качестве

весовых коэффициентов выступают значения  $\left(\frac{u-R}{u-d}\right)$  и  $\left(\frac{R-d}{u-d}\right)$ .

В общем случае для  $n$  периодов формула, по которой в соответствии с предположениями CRR-модели рассчитывается риск-нейтральная цена опциона, может быть записана следующим образом:

$$c = \left[ \sum_{j=k}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} (u^j d^{n-j} S - X) \right] / R^n, \quad (6)$$

где  $n$  – число уровней биномиального дерева;  $k$  – число подъемов цены, необходимых для того, чтобы опцион оказался с выигрышем  $r$ ;  $p$  – риск-нейтральная вероятность (вероятность роста цены базового актива, при которой его ожидаемая доходность равна ставке без риска).

Возможность представления финальной расчетной формулы в виде (6) обеспечивается введением специально определяемого числа  $k$ . Фактически, с помощью этого числа определяется граница отсечения тех случаев, когда внутренняя стоимость опциона равна нулю. Величина  $k$  без труда определяется из условия

$$u^k d^{n-k} S > X. \quad (7)$$

Если его переписать в виде

$$\left(\frac{u}{d}\right)^k d^n S > X, \quad (8)$$

то можно получить неравенство

$$\left(\frac{u}{d}\right)^k > \frac{X}{Sd^n}, \quad (9)$$

из которого определяется  $k$ . Логарифмирование (9) позволяет для  $k$  записать неравенство

$$k > \left[ \ln \frac{X}{Sd^n} / \ln \frac{u}{d} \right], \quad (10)$$

в котором квадратные скобки обозначают целую часть.

Введение величины  $k$ , с одной стороны, позволяет формулу для расчета риск-нейтральной цены записать в более компактной форме, а с другой стороны, делает содержательный смысл расчета менее прозрачным. Поэтому запишем формулу для расчета  $c$  в виде, который не предусматривает использование  $k$

$$c = \left[ \sum_{j=0}^n \left( \frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max(0, u^j d^{n-j} S - X) \right] / R^n. \quad (11)$$

В данной формуле без труда узнается математическое ожидание случайной величины, имеющей биномиальный закон распределения. Таким образом, основная идея, которая реализуется с помощью CRR-модели, заключается в том, чтобы для упреждающего периода построить биномиальное дерево, и с помощью этого дерева рассмотреть все возможные варианты эволюции цен базового актива, которые могут иметь место на упреждающем отрезке времени и использовать эти варианты для определения справедливой цены опциона.

Из сказанного следует, что риск-нейтральная цена – это математическое ожидание, при расчете которого использовалась риск-нейтральная вероятность и расчетная внутренняя цена опциона. В свою очередь, риск-нейтральная вероятность и внутренняя цена опциона определяются через множители роста  $u$  и падения  $d$ . В тоже время истинные значения этих величин не известны, и поэтому возникает проблема их определения.

В подобных ситуациях, как правило, рекомендуется использовать оценки. Известно, что оценки, которые будут обладать свойствами, обеспечивающими им высокую надежность, можно получить с помощью эконометрического подхода. Поэтому этот подход, на наш взгляд, является перспективным направлением исследования проблем, связанных с риск-нейтральным оцениванием опционов.

#### **Список источников**

1. URL: <http://www.rts.ru> – сайт Российской торговой системы.
2. Black F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – Pp. 637-654.
3. Cox J.C. Option Pricing: A Simplified Approach / J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein // Journal of Financial Economics. – 1979. – Vol. 7. – P. 229-263.

---

## **ABOUT A PERSPECTIVE LINE OF STUDY OF PROBLEMS OF RISK-NEUTRAL OPTIONS EVALUATION**

---

**G.B. Suyunova,**

Applicant of the Chair of Information Technology and Mathematical Methods for Economics, the Voronezh State University; suyunovazhanna@mail.ru

**Keywords and phrases:** an option, risk-neutral valuation, CRR model.

**Abstract:** The approach to assessment of options value based on the Cox-Ross-Rubinstein Model (CRR-model) is discussed. The expediency of use of the econometric modelling framework for estimation of characteristics of this model is proved.