УДК 330.43; 336.773

ОПТИМИЗАЦИЯ ДОХОДНОСТИ И РИСКА ПОРТФЕЛЬНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МНОГОМЕРНЫХ АДАПТИВНЫХ ARCH-МОДЕЛЕЙ

Кретинин Иван Александрович,
аспирант кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; ivankret@mail.ru

Формирование портфеля ценных бумаг является ключевой задачей принятия решений в инвестиционной деятельности на фондовом рынке. В настоящей работе рассмотрен классический подход Г. Марковица к решению этой задачи, выявлены его недостатки. Предложена многомерная модель авторегрессионной условной гетероскедастичности, позволяющая получать прогнозные значения дисперсий доходностей отдельных активов, а также их ковариаций. Показана возможность расширения предложенной модели адаптивным механизмом.

Ключевые слова: портфель ценных бумаг, доходность, риск, дисперсия, ковариация, авторегрессионная условная гетероскедастичность, адаптивная модель.

Одной из важнейших задач инвестиционной деятельности на фондовом рынке является оптимизация структуры портфеля ценных бумаг. Формирование портфеля, являясь составной частью инвестиционного процесса, включает в себя определение конкретных активов для вложения средств, а также пропорций (весов) распределения инвестируемого капитала между активами. Критериев оптимизации может быть несколько, тенденции их улучшения могут противоречить друг другу. Под наилучшим результатом в разных случаях понимается или максимальная прибыль, или заданный уровень прибыли при минимальном риске, возможно, с учётом дополнительных ограничений внешней среды и предпочтений лица, принимающего решение. Главная задача менеджеров по управлению портфелями инвестиций с точки зрения современной теории формирования портфеля заключается в достижении наилучшего возможного компромисса между возможными риском и доходностью инвестиций.

В 1952 г. Г. Марковиц опубликовал фундаментальную работу, которая является основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля. Подход Марковица начинается с предположения, что инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег для инвестирования. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени, который называется периодом владения. В конце периода владения инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода, после чего либо использует полученный доход на потребление, либо реинвестирует доход в ценные бумаги (либо делает и то и другое одновременно).

Марковиц утверждает, что инвестор должен основывать свое решение по выбору портфеля исключительно на ожидаемой доходности и стандартном отклонении. Это означает, что инвестор должен оценить ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого портфеля, а затем выбрать "лучший" из них, основываясь на соотношении этих двух параметров. Ожидаемая доходность может быть представлена как мера потенциального вознаграждения, связанная с конкретным портфелем, а стандартное отклонение – как мера риска, связанная с данным портфелем. Таким образом, после того, как каждый портфель был исследован в смысле потенциального вознаграждения и риска, инвестор должен выбрать портфель, который является для него наиболее подходящим.

Введем следующие обозначения: w_i – доля i-го актива в портфеле инвестора, $\Sigma w_i = 1$; r_i – доходность i-го актива. Заметим, что отдельные компоненты w_i могут быть и отрицательными, что соответствует операции «короткая продажа». Так как доходность является случайной величиной, то обозначим m_i – математическое ожидание доходности i-го актива. Переходя к векторным обозначениям, w, r, m – векторы долей, доходностей и математических ожиданий доходностей активов. Тогда математическое ожидание доходности всего портфеля μ можно вычислить по формуле:

$$\mu = M(w'r) = w'm.$$

Пусть Σ – ковариационная матрица доходностей активов, тогда дисперсию всего портфеля σ^2 можно рассчитать по следующей формуле:

$$\sigma^2 = M(w'r - w'm)^2 = w'\Sigma w.$$

Задача инвестора, стремящегося минимизировать общий риск (дисперсию) портфеля при неком заданном уровне доходности μ может быть представлена следующей задачей квадратичной оптимизации с линейными ограничениями:

$$\begin{cases} w'\Sigma w \to \min, \\ w'm = \mu, \\ w'i = 1 . \end{cases} \tag{1}$$

Решением данной задачи будет вектор w^*. Соответствующий ему портфель будем называть эффективным. При задании различных значений ожидаемой доходности портфеля μ стандартное отклонение эффективного портфеля

σ будет принимать различные значения. Зависимость между ожидаемой доходностью и стандартным отклонением эффективного портфеля имеет вид кривой a, представленной на рисунке. Эта зависимость на плоскости определяет линию, называемую эффективной границей или эффективным фронтом.

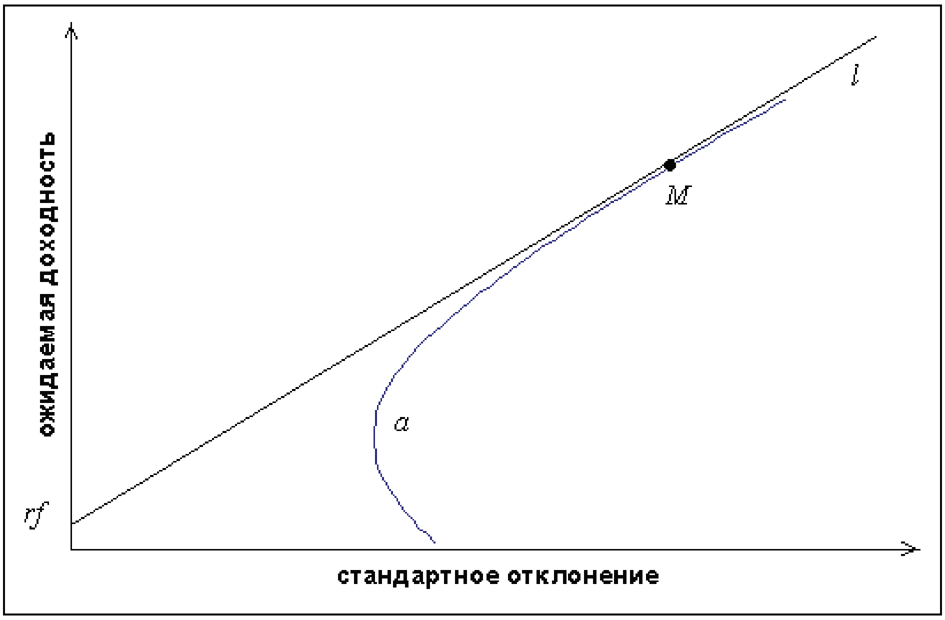

Рис. Фронт эффективных портфелей

В том случае, если инвестор имеет возможность инвестировать в безрисковые активы (часто к ним относят государственные ценные бумаги) с гарантированной доходностью r_f, эффективная граница приобретает вид луча l, исходящего из точки, соответствующей безрисковой ставке доходности, к точке касания M с эффективной границей Марковица (см. рис. 1). Портфель из рисковых активов, соответствующий точке касания, называется касательным портфелем, который определяет структуру рисковой части портфеля инвестора. Соотношение же рисковой и безрисковой частей в портфеле определяется индивидуальной склонностью к риску инвестора.

При всех своих достоинствах, модель Марковица подвергается критике по нескольким направлениям. Одним из недостатков модели является предположение о постоянстве доходностей и дисперсий отдельных активов, а также их ковариаций. Однако, эти характеристики финансовых активов не являются постоянными и могут изменяться с течением времени. Несмотря на это, обычно при формировании портфеля делается прогноз только по доходностям отдельных активов, а ковариационная матрица доходностей рассчитывается на основе исторических данных. Получить прогноз дисперсий доходностей активов, а также ковариаций доходностей можно при помощи построения многомерных авторегрессионных моделей условной гетероскедастичности (ARCH).

К росту популярности класса моделей с условной авторегрессионной гетероскедастичностью, введенного Робертом Инглом, привело усиление роли риска и соображений неопределенности в современной экономической теории. Ключевой момент, предлагаемый моделью ARCH, состоит в различении условных и безусловных моментов второго порядка. В то время как безусловная матрица ковариаций для представляющих интерес переменных может быть неизменной во времени, условные дисперсии и ковариации часто зависят нетривиальным образом от состояний мира в прошлом. Понимание точного характера этой временной зависимости крайне важно для многих проблем в макроэкономике и финансах. Кроме того, с точки зрения получения эконометрических выводов потеря в асимптотической эффективности из-за неучета гетероскедастичности может быть сколь угодно большой, и при составлении экономических прогнозов, как правило, можно использовать намного более точную оценку неопределенности ошибки прогноза, если получать ее как условную по текущему информационному множеству.

Особенно полезными ARCH-модели проявили себя при анализе временных рядов, где часто наблюдается явление кластеризации волатильности, то есть когда наблюдения с большими и малыми отклонениями от средних значений образуют группы. Особенно часто это явление проявляется в финансовых временных рядах, таких как валютные курсы, котировки ценных бумаг, общие динамические соотношения для цен активов, динамика процентных ставок и др.

Впервые формальное описание процесса кластеризации дисперсии остаточного члена предложил Р. Ингл, разработав класс моделей, особенностью которых является зависимость условной дисперсии случайного члена от предыдущих значений случайного члена. В общем случае ARCH-модель можно представить:

$$\begin{aligned} &y_t = x_t'\beta + u_t, \\ &\operatorname{var}(u_t \mid I_{t-1}) = h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p u_{t-p}^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

где x_t – вектор-столбец значений экзогенных переменных в момент t;

β – вектор-столбец коэффициентов при экзогенных переменных;

y_t – значение эндогенной переменной в момент t;

$h^2_t = V(u_t| u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots, u_{t-p}) = E(u^2_t| u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots, u_{t-p})$ – условная по I_t дисперсия ошибок u_t;

I_t – совокупность информации, известной на момент t.

Эффект кластеризации возмущений объясняется последним уравнением системы (2). Процесс (2) называется авторегрессионной условно гетероскедастичной моделью порядка p (AutoRegressive, Conditional Heteroscedastic), ARCH(p).

Безусловная дисперсия ошибок u_t в модели (2) постоянна и равна

$$\operatorname{var}(u_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i} > 0.$$

Смысл модели ARCH состоит в том, что если абсолютная величина u_t оказывается большой, то это приводит к повышению условной дисперсии в последующие периоды. Наоборот, если значения u_t в течение нескольких периодов близки к 0, то это приводит к понижению условной дисперсии в последующие периоды практически до уровня α_0. Таким образом, ARCH-процесс характеризуется инерционностью условной дисперсии (кластеризацией волатильности).

Модель GARCH (generalized ARCH — обобщенная модель ARCH), предложенная Тимом Боллерслевом, является модификацией модели ARCH, позволяющей получить более длинные кластеры при малом числе параметров.

Модель GARCH (p,q) имеет следующую спецификацию:

$$\begin{aligned} &y_t = x_t'\beta + u_t, \\ &\mathrm{var}(u_t \mid I_{t-1}) = h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\varphi_i h_{t-i}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение для дисперсии ошибки модели (3) содержит как прошлые значения ошибок модели, так и их дисперсии.

Также широкое распространение при анализе финансовых временных рядов приобрели адаптивные модели. Их отличие от других прогностических моделей состоит в том, что они отражают текущие свойства ряда и способны непрерывно учитывать эволюцию динамических характеристик изучаемых процессов. Цель адаптивных методов заключается в построении самокорректирующихся (самонастраивающихся) экономико-математических моделей, которые способны отражать изменяющиеся во времени условия, учитывать информационную ценность различных членов временного ряда и давать достаточно точные оценки будущих членов данного ряда. Именно поэтому такие модели предназначаются прежде всего для краткосрочного прогнозирования. Так, если между двумя переменными существует статистическая линейная зависимость, параметры которой не являются постоянными с течением времени, возможно применение адаптивной модели линейной зависимости:

$$\begin{aligned} &\hat{y}_1(t) = \hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t}\Delta x_{t+1}, \\ &\hat{a}_{1,t} = \alpha_1 y_t + (1-\alpha_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}\Delta x_t), \quad 0 \le \alpha_1 \le 1, \\ &\hat{a}_{2,t} = \alpha_2(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) / \Delta x_t + (1-\alpha_2)\hat{a}_{2,t-1}, \quad 0 \le \alpha_2 \le 1; \end{aligned} \tag{4}$$

где $\hat{y}_1(t)$ – прогноз зависимой переменной, сделанный в момент времени t на один шаг вперед;

$\hat{a}_{1t}, \hat{a}_{2t}$– текущие оценки коэффициентов адаптивного полинома первого порядка;

α_1, α_2 – параметры экспоненциального сглаживания (параметры адаптации);

$\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ – первые разности значений факторной переменной.

Модель линейной зависимости по своей структуре во многом аналогична модели линейного роста Ч. Хольта; однако, здесь в качестве независимой переменной используются не последовательные периоды времени, а разности значений факторной переменной, изменения которой происходят не линейно и не монотонно. В связи с этим в модели были сделаны соответствующие изменения по отношению к модели Хольта, позволяющие корректно обновлять оценки коэффициентов адаптивного полинома и оценивать будущие значения зависимой переменной.

Адаптивную модель линейной зависимости (4) возможно использовать в качестве первого уравнения GARCH-модели (3). Таким образом, получим комбинированную модель, адаптивные свойства которой сочетаются с эффектом авторегрессионной условной гетероскедастичности.

Рассмотрим теперь многомерные модели авторегрессионной условной гетероскедастичности. В многомерном ARCH-процессе рассматривается m-компонентный случайный вектор Yt, m-компонентный вектор его условного математического ожидания, $m x m$ – матрица условной вариации.

Одним из способов оценки многомерной ARCH-модели является метод, предложенный Ф. Клаассеном. Вычисляется матрица безусловной вариации $V_{(yt)}$ и ее собственные вектора. Собственные вектора формируют ортонормированный базис W в пространстве переменных. Наблюдаемые процессы преобразуются в главные компоненты, которые рассчитываются по формуле

$$f_t = y_t W.$$

Безусловные ковариации между главными компонентами равны нулю. Основное предположение модели состоит в равенстве нулю условных ковариаций между главными компонентами. Условные ожидания и дисперсии главных компонент оцениваются с помощью m независимых одномерных ARCH-моделей. Внедиагональные элементы условной ковариационной матрицы главных компонент $V(f_t|\Omega_{t-1})$ заполняются нулями. Обратным преобразованием оцененные условные моменты главных компонент трансформируются в условные моменты наблюдаемых процессов по формулам

$$E(y_t \mid \Omega_{t-1}) = E(f_t \mid \Omega_{t-1}) W^T, \quad (5)$$

$$V(y_t \mid \Omega_{t-1}) = W V(f_t \mid \Omega_{t-1}) W^T. \quad (6)$$

Оценивание m-мерной модели, таким образом, сводится к построению m одномерных моделей.

Применяя многомерные ARCH-модели, дополненные адаптивным механизмом, к временным рядам доходностей финансовых активов, можно получать прогнозные значения не только самих доходностей, но также их дисперсий и ковариаций. Это позволит точнее оценить риск портфельных инвестиций и, таким образом, сформировать портфель, отвечающий требованиям конкретного инвестора.

Список источников

1. Klaassen, F. Have Exchange Rates Become More Closely Tied? Evidence from a New Multivariate GARCH Model [Текст] / F. Klaassen, Center for Economic Research, Tilburg University, 1999.

2. Давнис, В.В. Адаптивные модели: анализ и прогноз в экономических системах [Текст] / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2006. – 380 с.

3. Магнус, Я.Р. Эконометрика. Начальный курс: Учеб. [Текст] / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. – 7-е изд. – М.: Дело, 2005. – 504 с.

4. Тарасевич, Л.С. Макроэкономика [Текст] / Л.С. Тарасевич, П.И. Гребенников, А.И. Леусский – М.: Юрайт-Издат, 2003. – 650 с.

OPTIMIZATION OF YIELD AND RISK OF PORTFOLIO INVESTMENT WITH USE OF MULTIDIMENSIONAL ADAPTIVE ARCH-MODELS

Kretinin Ivan Aleksandrovich,
Post-graduate student of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods of Economy of Voronezh State University;
ivankret@mail.ru

Building of portfolio of securities is a key decision-making task in the investment activity in stock market. In the present work classical approach of G. Markowitz to solve this task is examined, its disadvantages are displayed. Multidimensional model of autoregressive conditional heteroskedasticity is suggested, which allows to receive predictive values of variances of yields of separate assets, as well as their covariations. The possibility of extension of suggested model with adaptive mechanism is shown.
Keywords: portfolio of securities, yield, risk, variance, covariation, autoregressive conditional heteroskedasticity, adaptive model.