
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

УДК 330.45:004.942

ИМИТАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

В.В. Давнис,

доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета;
vdavnis@mail.ru

Д.А. Хабибулин,

аспирант кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; itmme@econ.vsu.ru

Предлагается имитационно-аналитическая модель, реализующая принцип стохастического воспроизведения исторического периода. Обсуждаются результаты эмпирического исследования по применению этой модели для обоснования эффективности портфельного инвестирования.

Ключевые слова: имитация, имитационное моделирование, имитационно-аналитическая модель, портфельное инвестирование

К имитационно-аналитическому моделированию доходности финансовых активов обращаются всякий раз, когда не удается получить аналитическое решение, но допускается возможность использования оценок, усредненных по всем возможным вариантам риска. С этим можно согласиться, а можно и не согласиться, так как моделей, в названиях которых нет термина «имитационные», но, с помощью которых оценивают доходность финансовых активов, достаточно много. И все же, если под имитационно-аналитической моделью понимать модель, в которой есть аналитическая и стохастическая составляющие, то уравнение, которое связывают с именем Башелье [4] и которое в модели Блэка – Шоулса [5] описывает на микроуровне механизм формирования доходности акции

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

следует считать имитационно-аналитической моделью.

В этом уравнении μ – средний уровень доходности; Δt – небольшой отрезок времени, на котором данная модель имеет смысл; σ – риск, измеренный среднеквадратическим отклонением; ε – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Первое слагаемое уравнения (1) является непрерывной составляющей и представляет собой ожидаемый уровень доходности акции, а второе слагаемое – величину риска, который в каждом конкретном случае оказывает шоковое (заранее неизвестное) воздействие на уровень доходности, изменяя ее в ту или иную сторону в зависимости от знака и значения случайной величины ε . Если в уравнении (1) случайную величину ε генерировать с помощью датчика случайных чисел, то это уравнение превратится в микроимитационную модель. Само дифференциальное уравнение Блэка – Шоулса, решение которого являются стохастическим процессом в некотором смысле можно рассматривать как имитационно-аналитическую модель специального типа. Вполне естественно, что решение этого стохастического дифференциального уравнения получено в виде математического ожидания, т.е. в такой же форме как принято представлять результаты имитационных экспериментов.

По термину «имитационно-аналитическая» без труда из всего многообразия моделей можно выделить те, структура которых содержит аналитическую и имитационную составляющие. В качестве аналитической составляющей обычно используются эвристические выражения, теоретические и эмпирические модели, результаты дедуктивного или индуктивного выводов, алгоритмическое описание процесса принятия решения и другие приемы отражения реальных процессов. Имитационная составляющая, как правило, содержит случайную переменную, варианты возможных значений которой, генерируются датчиком случайных чисел, подчиняющихся определенному закону распределения.

Модели этого класса обладают высокой универсальностью и применимы даже в тех случаях, когда знания о моделируемом процессе не обеспечивают его формализованное описание. Подобного рода ситуации в задачах обоснования инвестиционных решений являются правилом, а не исключением из правил. Заметим, что это относится не только к обоснованию инвестиций, а практически ко всем задачам, решение которых осуществляется в текущий момент времени, а результат принятого решения отнесен в будущее. Поэтому каждый раз, когда решается подобная задача, возникает вопрос обоснования такого решения, которое обладает из всех возможных решений наименьшим риском. В качестве инструмента для получения такого решения целесообразно использовать имитационно-аналитические модели.

Основное требование, которое предъявляется к имитационно-аналитическим моделям, заключается в том, чтобы воспроизводимые с ее помощью данные правдоподобно отражали моделируемый процесс. Как правило, этому вопросу при построении имитационных моделей уделяется особое внимание. Но четких правил, подобных тем, которые имеют место в эконометрике и выполнение которых является обязательным, нет. Возможно, это связано с тем, что к результатам имитационного моделирования предъявляются требования, отличные от требований, которым удовлетворяют результаты эконометрического моделирования. Они не должны демонстрировать точность подгонки. С их помощью стараются получить наиболее полное воспроизведение всего спектра возможных ситуаций. Поэтому, как правило, модели имитационного моделирования предусматривают получение таких характеристик моделируемого процесса, как среднее квадратическое отклонение, размах, оценка вероятности отдельных ситуаций и т.п.

Правдоподобность результатов имитирования обеспечивается предварительной идентификацией распределения случайных величин, присутствующих в данных, которые генерируются реальным процессом. Усилия по подгонке распределения к реальным случайным величинам не всегда бывают успешными. В силу этого очень часто в практических расчетах используется датчик, с помощью которого генерируются нормально распределенные случайные числа, которые в соответствии с центральной предельной теоремой принимаются за воспроизводимую искусственным путем реальность.

Имитационно-аналитические модели по сравнению с имитационными моделями обладают дополнительными возможностями, которые в предлагаемых нами моделях реализуются за счет использования при их построении принципа стохастического воспроизведения закономерностей исторического периода. Эти дополнительные возможности делают более правдоподобными получаемые результаты, так как повышается вероятность имитирования тех значений, в которых отражена приближенная, возможно корреляционная, взаимосвязь с закономерностями исторического периода.

Идея стохастического воспроизведения закономерностей исторического периода позволяет создать новую конструкцию имитационно-аналитической модели. Обычно расчетная схема, в которой используется имитационно-аналитическая модель, предусматривает применение аналитической составляющей для получения значений в соответствии с обнаруженными в моделируемом процессе закономерностями и применение стохастической составляющей для генерирования случайных чисел. Окончательный результат получается в виде суммы полученных таким образом чисел. Принципиальная схема проводимых таким образом расчетов изображена на рис. 1.

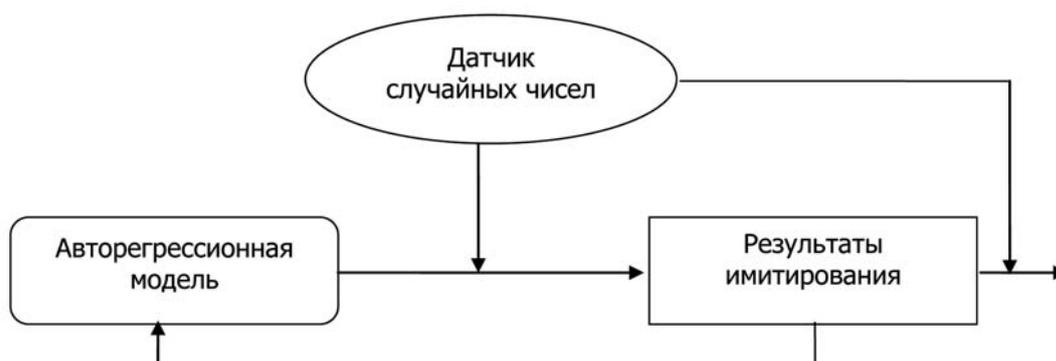


Рис. 1. Простейшая схема имитационных расчетов

Стохастическое воспроизведение закономерностей исторического периода предусматривает в дополнение к эконометрической модели построение специальной зависимости, обеспечивающей в режиме имитационных расчетов вероятностную взаимосвязь получаемых результатов с условиями, в которых эти результаты правдоподобны. Вероятностная взаимосвязь понимается в том смысле, что изменение условий повышает вероятность соответствующих изменений в моделируемом процессе. Сама вероятность используется для окончательной корректировки усредненного результата имитационных расчетов. Схема расчетов для этого случая представлена на рис. 2.

Строгих рамок, регламентирующих построение имитационных моделей, нет. В предлагаемых нами моделях таким регламентирующим элементом является принцип воспроизведения закономерностей исторического периода. Можно предположить, что существуют различные варианты модельного представления этого принципа. В наших моделях этот принцип реализуется с помощью эконометрических моделей с дискретной (качественной) зависимой переменной.



Рис. 2. Простейшая схема воспроизведения исторического периода

Рассмотрим простейший вариант имитационно-аналитической модели, в которой реализован принцип стохастического воспроизведения закономерностей исторического периода. В общем виде, с ориентацией на получение прогнозных оценок доходности финансового актива, такая модель может быть записана следующим образом:

$$\xi_k = RND, \quad (2)$$

$$\Lambda(\xi_k) = \frac{e^{b_0 + b_1 \xi_k}}{1 + e^{b_0 + b_1 \xi_k}}, \quad (3)$$

$$\zeta_k = N(0, \sigma^2), \quad (4)$$

$$\sigma = d - 2d\Lambda(\xi_k), \quad (5)$$

$$r_{t+1}^k = a_0 + a_1 r_t + \sigma + \zeta_k, \quad (6)$$

где r_{t+1}^k – уровень доходности финансового актива, полученный в результате k -го имитационного эксперимента для момента времени $t+1$; a_0, a_1, d – оцениваемые коэффициенты модели; σ – распределенная волатильность; $\Lambda(\bullet)$ – функция логистического распределения; ζ_k – случайная величина, сгенерированная датчиком нормально распределенных случайных чисел в k -м имитационном эксперименте; $N(0, \sigma^2)$ – датчик нормально распределенных случайных чисел; b_0, b_1 – оцениваемые коэффициенты логистической функции; ξ_k – случайная величина, сгенерированная датчиком равномерно распределенных случайных чисел в k -м имитационном эксперименте; RND – датчик равномерно распределенных случайных чисел.

В модели (2) – (6) предусматривается генерирование двух случайных величин ξ_k и ζ_k . Первая случайная величина имеет равномерное распределение и используется в качестве аргумента логистической функции для стохастического воспроизведения с помощью распределенной волатильности закономерностей исторического периода. Результат получается в виде ожидаемого отклонения от экстраполяционной оценки, получаемой с помощью аналитической составляющей. Его складывают с этой экстраполяционной оценкой, получая усредненное стохастическое воспроизведение исторического периода. Вторая случайная величина имеет нормальное распределение и предназначена для ослабления зависимости от данных исторического периода. Трудно понять смысл введения двух случайных величин, эффекты, от воздействия которых на результаты моделирования, противоречат друг другу. Поэтому кратко поясним основную идею замысла, который реализуется с помощью данного приема.

Целевое назначение первой случайной составляющей – описание будущего в виде такого многообразия, усреднение которого позволяет понять, что будущее это прошлое, видоизмененное в соответствии с доминирующими на историческом периоде тенденциями. Вторая случайная величина привносит в это описание те элементы нового, ростки которого не зафиксированы статистикой в прошлом. Таким образом, правдоподобность описания будущего повышается до такой степени, что сгенерированные данные этого описания можно использовать для построения различного рода моделей инвестирования, точно таким же образом, как это делается при построении моделей с использованием данных исторического периода. Например, данные, сгенерированные с помощью такой имитационно-аналитической модели, могут использоваться для построения портфеля ценных бумаг. Чтобы понять преимущество предлагаемого подхода, рассмотрим более подробно его эмпирическое обоснование.

Основная идея использования имитационно-аналитических моделей для построения портфеля ценных бумаг состоит в том, чтобы с помощью этих моделей сформировать образ будущего в виде многовариантного описания и использовать данные этого описания для построения портфеля. В связи с чем возникает необходимость в формировании образа будущего. Объясняется это тем, что портфель является инструментом упущенных возможностей. Данный факт хорошо иллюстрируют результаты расчетов, выполненные по данным табл. 1 и приведенные в табл. 2.

Логика эмпирического доказательства того, что портфель Марковица [7] – это портфель упущенных возможностей, следующая. Известный набор данных делится на две части. Ту часть, в которую включены более ранние наблюдения, будем считать историческим набором данных, а в которую включены более поздние наблюдения – поступреждающим набором данных, т.е. таким, который на момент формирования портфеля известен, но в его расчетах не используется и предназначен для тестирования портфеля.

В табл. 2 приведены результаты расчетов структуры двух портфелей. Портфель 1 был построен только с использованием данных исторического периода. Приведенные доходности этого портфеля на историческом и поступреждающем периодах свидетельствуют о том, что если бы этот портфель был сформирован в начале исторического периода то он обеспечил бы в конце данного периода заданный уровень доходности, равный 0,5 %. Но портфель был сформирован в конце исторического периода и от вложения в него, по сути, ждуть эффект в упреждающем периоде, роль которого в нашем вычислительном эксперименте играет поступреждающий период. Расчеты показали, что на упреждающем отрезке времени портфель оказался убыточным (доходность -0,05 %).

Таблица 1

Динамика доходности акций, %

| Дата | Компании | | | | | |
|------------------------|----------|---------|----------|----------|---------|---------|
| | Газпром | Лукойл | СургутНГ | Сбербанк | МТС | НГМК |
| Исторический период | | | | | | |
| 20.11.2009 | -1,6641 | -2,0354 | -1,9778 | -1,4564 | 2,5702 | -1,4130 |
| 23.11.2009 | 0,2543 | 0,7705 | 2,8060 | 0,9392 | 0,0000 | 1,1497 |
| 24.11.2009 | -2,0792 | -2,6642 | 0,1987 | -2,3597 | 0,0000 | -3,3970 |
| 25.11.2009 | -1,8298 | -1,0835 | -0,0697 | 0,4715 | 0,0000 | -1,5692 |
| 26.11.2009 | -3,5277 | -3,0750 | -2,6887 | -3,1850 | 0,2385 | -1,6693 |
| 27.11.2009 | -0,5675 | 0,2742 | -4,6678 | -3,9102 | 0,0194 | -0,3881 |
| 30.11.2009 | 0,6055 | 1,6065 | 2,4780 | 3,5880 | 0,2101 | 2,6430 |
| 01.12.2009 | 1,2093 | 2,4691 | 2,8027 | 3,8553 | -0,0291 | 2,9061 |
| 02.12.2009 | -0,6061 | -0,6167 | 1,0636 | 1,3718 | 0,2430 | 1,6348 |
| 03.12.2009 | -0,8609 | 0,8705 | -0,4203 | 1,9773 | 0,2752 | 2,0999 |
| 04.12.2009 | -0,4538 | -1,6930 | -0,7755 | 0,5014 | 0,2557 | -0,4521 |
| 07.12.2009 | -0,2197 | -0,5824 | -0,2365 | 0,5701 | 0,0000 | -2,2447 |
| 08.12.2009 | 0,3217 | -1,4478 | -0,0043 | -0,2978 | 0,2008 | 0,6103 |
| 09.12.2009 | 0,5474 | -1,8682 | 0,2256 | -0,5739 | 0,0320 | -0,1806 |
| 10.12.2009 | -0,2892 | -1,8931 | -0,9620 | 1,5377 | 0,0000 | -0,1775 |
| 11.12.2009 | 0,2503 | 0,3206 | 0,6380 | 1,1365 | 0,0000 | -1,2030 |
| 14.12.2009 | -0,1657 | 0,6036 | -0,5800 | 0,7220 | 1,9382 | -0,2907 |
| 15.12.2009 | 1,9343 | 0,6414 | 0,3418 | 1,2099 | 0,0174 | 1,6142 |
| 16.12.2009 | 4,9804 | 3,3391 | 3,7282 | 4,8581 | 0,0000 | 2,8054 |
| 17.12.2009 | 0,5929 | 0,0803 | 0,8232 | 1,9819 | 0,0000 | -0,2021 |
| Поступреждающий период | | | | | | |
| 18.12.2009 | 1,1415 | -1,0945 | 0,0001 | 0,6823 | 0,2233 | -0,3881 |
| 21.12.2009 | 0,8487 | -0,0824 | -1,3713 | -1,3838 | 0,4069 | -0,5779 |
| 22.12.2009 | -0,0707 | -0,3933 | -1,8520 | 0,1612 | 0,0000 | -0,4166 |
| 23.12.2009 | 0,9927 | 0,4989 | -0,5718 | -0,2065 | 0,0000 | 0,9100 |
| 24.12.2009 | -1,4094 | -0,0270 | -1,4922 | -0,4247 | 0,0000 | -0,5795 |
| 25.12.2009 | -0,7541 | 0,1552 | -0,0762 | 0,2005 | 0,0000 | -1,7722 |
| 28.12.2009 | 1,1585 | 1,3437 | 1,4901 | -0,0323 | -0,2511 | 1,5613 |
| 29.12.2009 | 0,0833 | 0,7062 | 0,7640 | -0,6877 | -0,1108 | 1,2889 |
| 30.12.2009 | -0,2617 | -0,5236 | 0,5607 | 1,0086 | 0,0000 | 0,2043 |
| 31.12.2009 | 0,6013 | 0,0821 | -0,2708 | 1,9624 | 0,0000 | -0,2969 |

Возникает закономерный вопрос о возможности построения портфеля, который на поступреждающем отрезке времени смог бы обеспечить заданный уровень доходности. Такой портфель построить можно, если использовать для этого данные поступреждающего периода. Портфель 2, структура которого приведена в этой же таблице, обеспечивает получение на поступреждающем периоде требуемого уровня средней доходности. Его

структура значительно отличается от структуры портфеля, для построения которого использовались данные исторического периода.

Таблица 2

Доходности портфелей исторического и поступреждающего периодов

| Компании | Исторический период | | Поступреждающий период | | |
|----------|---------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------|-------------------------------|
| | Портфель 1 | Средняя доходность портфеля 1 | Средняя доходность портфеля 1 | Портфель 2 | Средняя доходность портфеля 2 |
| Газпром | -0,0492 | 0,5 | -0,05 | 0,5623 | 0,5 |
| Лукойл | -0,1014 | | | 0,9510 | |
| СургутНГ | 0,4188 | | | -0,8000 | |
| Сбербанк | 0,5978 | | | 0,5667 | |
| МТС | 0,0369 | | | 0,2679 | |
| НГМК | 0,0970 | | | -0,0684 | |

Результаты эмпирического исследования ориентируют на реализацию идеи, в соответствии с которой построению портфеля должна предшествовать процедура воссоздания прогнозного образа упреждающего периода [1]. Данные прогнозного образа используются для построения портфеля. Понятно, что успех данного подхода зависит от того, насколько точно воспроизведена динамика доходности активов упреждающего периода. Критериев, с помощью которых можно было бы оценить в целом точность прогнозного образа, нет. Эконометрические критерии, как, например, дисперсионное отношение Фишера или статистическая значимость по Стьюденту [3], в данной ситуации приемлемы, но при условии, что упреждающий период будет мало отличаться от исторического.

К сожалению, реальное различие между историческим и упреждающим периодом выходит за рамки, гарантируемые статистической надежностью. Поэтому наиболее приемлемым следует признать подход, в основу которого положена та же самая идея, которая реализована в CRR-модели [6], используемой для расчета риск-нейтральной цены опциона.

Смысл этой идеи в том, чтобы будущее представить набором вариантов, содержащих в своем составе такие, которые мало отличаются от упреждающей реальности. В качестве инструмента формирования подобного набора можно использовать имитационно-аналитическую модель (2)–(6). Ее свойства, на наш взгляд, вполне смогут обеспечить формирование множества упреждающих инвестиционных возможностей, мало отличающихся от тех, которые будут известны инвестору в конце упреждающего периода.

Вычислительный эксперимент проводился с тем же самым набором данных, который выше использовался для того, чтобы продемонстрировать эффект упущенных возможностей портфеля Марковица. Результаты промежуточных расчетов приведены в табл. 3. Эта таблица содержит по каждому финансовому активу оцененные коэффициенты аналитической части модели, параметр распределенной волатильности, коэффициенты

логит-распределения и параметры нормального распределения. Фактически построено шесть моделей (без учета возможной взаимосвязи между активами). С помощью этих моделей был сформирован прогнозный образ упреждающего периода. Для каждого момента времени предусматривалось формирование десяти вариантов. Повторные серии экспериментов показали, что даже при десяти вариантах наблюдается устойчивость результатов имитирования.

Таблица 3

Значения параметров имитационно-аналитических моделей

| Параметры | Компании | | | | | |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | Газпром | Лукойл | СургутНГ | Сбербанк | МТС | НГМК |
| a_0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a_1 | 0,3964 | 0,1484 | 0,2661 | 0,3652 | 0,3104 | 0,1708 |
| d | 1,2868 | 1,5967 | 1,4236 | 1,5119 | 0,6224 | 1,6257 |
| b_0 | 21,9980 | 29,5667 | 16,8607 | 20,8159 | 16,2562 | 35,3370 |
| b_1 | -47,3481 | -57,0463 | -31,9859 | -47,2174 | -25,0237 | -65,9378 |
| μ | -0,1117 | -0,1908 | 0,1123 | 0,3234 | -0,2326 | 0,0206 |
| σ | 1,4202 | 0,9524 | 1,3128 | 1,3717 | 0,9109 | 1,0745 |

Построенный на основе результатов имитационных экспериментов портфель (табл. 4) показал, что его средняя доходность на фактических данных поступреждающего периода, хотя и не высокая, но положительная в отличие от портфеля Марковица.

Таблица 4

Портфель, построенный на основе результатов имитационных расчетов

| Структура портфеля | | | | | | Средняя доходность на поступреждающем периоде |
|--------------------|---------|----------|----------|----------|---------|---|
| Газпром | Лукойл | СургутНГ | Сбербанк | МТС | НГМК | |
| 0,731263 | 0,13624 | -0,07994 | -0,72417 | 0,454928 | 0,48168 | 0,1182 |

В заключении имеет смысл заметить, что многие исследователи рекомендуют использовать метод Монте-Карло [2] в задачах обоснования инвестиционных решений. Но варианты использования различны. Специфика предложенного подхода не в применении имитационных расчетов с использованием процедуры Монте-Карло, а в имитационной модели, реализующей принцип стохастического воспроизведения исторического периода. Этот принцип предполагает применение процедуры Монте-Карло, но не исключает возможность ее замены экспертными оценками. И в первом, и во втором случае благодаря этому принципу удастся построить наиболее правдоподобный образ будущего, и, как следствие, сформировать портфель без упущенных возможностей. Но нельзя абсолютизировать результаты эмпирических исследований. Выводы, построенные на их основе,

имеют статистическую, а не абсолютную надежность. Статистическая надежность уточняется, корректируется, улучшается, поэтому вопрос исследования возможностей имитационного моделирования в обосновании инвестиционных решений остается открытым.

Список источников

1. Давнис, В.В. Прогноз и адекватный образ будущего [Текст] / В.В. Давнис, В.И. Тинякова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Экономика и управление. – 2005. – № 2. – С. 183-190.

2. Соболев, И.М. Метод Монте-Карло [текст] / И.М. Соболев. – М.: Наука, 1968. 64 с.

3. Эконометрика / Под ред. И.И. Елисеевой [текст]. – М.: Финансы и статистика, 2005. 576 с.

4. Bachelier, L. Theory of Speculation [Text] / L. Bachelier // in Cootner (ed.) The Random Character of Stock Prices. Cambridge: MIT, 1964. – P. 71-78.

5. Black, F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [Text] / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637-654.

6. Cox, J.C. Option Pricing: A Simplified Approach [Text] / J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein // Journal of Financial Economics. – 1979. – Vol. 7. – P. 229-263.

7. Markowitz, H.M. Portfolio Selection [Text] / H.M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – №1. – P. 77-91.

IMITATIVE AND ANALYTICAL MODEL-BUILDING OF PROFITABLENESS OF FINANCIAL ASSETS

V.V. Davnis,

Dr. Sc. of Economy, Professor, Chief of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods of Economy of Voronezh State University; vdavnis@mail.ru

D.A. Khabibulin,

Post-graduate student of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods of Economy of Voronezh State University; itmme@econ.vsu.ru

The imitative and analytical model realizing the principle of stochastic reproduction of the historical period is offered. Results of empirical research on application of this model for an efficiency substantiation of portfolio investment are discussed.

Keywords: imitation, imitative model-building, imitative and analytical model, portfolio investment.