УДК330.43(075.8)

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ВЕКТОРНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

М.Г. Матвеев,
доктор технических наук, профессор кафедры математики и информационных технологий управления Воронежского филиала Российской академии государственной службы при Президенте РФ; mgmatveev@yandex.ru

Предложены модификации метода наименьших квадратов и метода моментов для параметрической идентификации модели векторной авторегрессии. Обосновано применение модифицированного метода наименьших квадратов для идентификации коротких стационарных временных многомерных рядов с высокой коррелированностью.

Ключевые слова: Многомерные временные ряды, модель векторной авторегрессии, параметрическая идентификация, уравнения Юла – Уолкера, условия стационарности временного ряда.

1. Постановка задачи. Модели векторной авторегрессии (ВАР) находят применение в экономических приложениях как альтернативный подход к построению систем одновременных уравнений. В отличие от эконометрических систем одновременных уравнений в моделях ВАР не пытаются воссоздать структуру экономического объекта, не проводится различий между эндогенными и экзогенными переменными. Каждое уравнение модели ВАР описывает зависимость одной из переменных от лаговых значений всех переменных модели. Несмотря на ряд недостатков моделей ВАР – отсутствие экономической интерпретации параметров, проблемы с идентификацией параметров, в целом модели ВАР проще структурных моделей, что и определило повышенный интерес к ним со стороны экономистов [1].

Модели ВАР(p,n) имеют следующий вид:

$$\bar{x}_j = A_1\bar{x}_{j-1} + \ldots + A_p\bar{x}_{j-p} + \bar{\delta}_j, \tag{1}$$

или сокращенно-векторная модель авторегрессии СВАР(p,n)

$$\bar{x}_j = A_0 + A_1\bar{x}_{j-1} + \ldots + A_p\bar{x}_{j-p} + \bar{\delta}_j, \tag{1a}$$

где $\bar{x}_j = (x_{1,j};...x_{n,j})^T$ - вектор значений переменных в j-й момент времени; A_0- матрица-столбец свободных членов; A_k - квадратная матрица параметров модели; $\bar{\delta}_j = (\delta_{1j};...;\delta_{nj})^T$ - вектор случайных членов.

Модели ВАР отображают поведение n одномерных временных рядов x_i, попарно связанных между собой корреляционной зависимостью. Такие ряды называют многомерным временным рядом [2].

Арсенал методов параметрической идентификации статистических моделей достаточно широк и разнообразен, однако четких, теоретически обоснованных рекомендаций по их применению практически не существует. Наиболее актуальна проблема параметрической идентификации для моделей ВАР. Это связано с несколькими причинами. Прежде всего, модели ВАР используют авторегрессионные зависимости, в которых на структурном уровне, строго говоря, нарушается четвертое условие Гаусса-Маркова.

Случайный член $\bar{\delta}_j$ и объясняющие переменные $\bar{x}_{j-k}, k = 1,..., p$ не независимы, хотя и не коррелированны в текущий момент времени j. Как известно [1] это приводит к получению смещенных оценок параметров модели при использовании метода наименьших квадратов, основного инструмента идентификации моделей ВАР. На больших выборках или при длинных рядах это свойство практически не проявляется. Но на малых выборках (коротких рядах) оно может внести существенные искажения в результаты оценивания. Понятие большой и малой выборки связано с количеством оцениваемых параметров и свойствами рядов. В моделях ВАР количество оцениваемых параметров быстро возрастает с увеличением порядка разностных уравнений. Действительно, для моделей первого порядка ($p=1$) каждое уравнение системы (1) содержит три параметра, для моделей второго порядка ($p=2$) уже пять и т.д. Кроме того, наличие корреляционной зависимости между рядами обуславливает требование увеличения размера выборки. Таким образом, при наличии ограничений на длину временного ряда, характерных для экономических приложений, возникают трудности с параметрической идентификацией моделей ВАР.

Непосредственное использование метода моментов, основанного на уравнениях Юла — Уолкера [2], свободного от указанных недостатков метода наименьших квадратов, невозможно для моделей ВАР вследствие структурного несоответствия одномерных и многомерных рядов.

В настоящей работе предлагается модификации метода наименьших квадратов и метода моментов, применительно к моделям СВАР, описывающих поведение стационарных многомерных рядов и исследование модифицированных методов.

2. Модифицированный метод МНК оценки параметров модели СВАР. Построим модель СВАР, при этом выберем самую простую модель, позволяющую наглядно показать суть предлагаемой модификации, не загромождая изложение сложными выкладками, но и не теряя общности подхода.

Пусть модель имеют вид СВАР(1,2):

$$x_{1,j} = \alpha_{11}x_{1,j-1} + \alpha_{12}x_{2,j-1} + \beta_1 e_{1j} ,$$
$$x_{2,j} = \alpha_{21}x_{1,j-1} + \alpha_{22}x_{2,j-1} + \beta_2 e_{2j} . \quad (2)$$

Здесь индекс j — суть дискретное время, а e_j- реализация порождающего дискретного белого шума единичной интенсивности.

Задача параметрической идентификации состоит в получении по выборочной статистике оценок параметров модели: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$.

Если рассматривать первый и второй ряд по отдельности, без учета взаимного влияния, то есть в виде обычного марковского процесса или модели авторегрессии первого порядка (АР(1))

$$x_{1,j} = \alpha_1 x_{1,j-1} + \beta_1 e_{1j} ,$$
$$x_{2,j} = \alpha_2 x_{1,j-1} + \beta_2 e_{2j} ; \quad (3)$$

то оценки параметров α_1, α_2 можно получить несколькими альтернативными способами [2]. Например, основываясь на методе моментов:

$$a_1 = r(x_{1,j}; x_{1,j-1}),\ \ a_2 = r(x_{2,j}; x_{2,j-1}) , \quad (4)$$

где $r(\bullet)$ - выборочная оценка значения автокорреляционной функции с единичным лагом. Оценки параметров выражения (3) могут быть получены и другим путем – с применением обыкновенного метода наименьших квадратов. Заметим, что для получения статистически значимых оценок параметров системы (3) потребуется выборка меньшая, чем для получения статистически значимых оценок параметров системы (2).

Модификация стохастической модели (2) состоит в том, что с учетом указанных особенностей рядов, то есть, учитывая схожесть поведения смежных рядов, предлагается модель вида

$$x_{1,j} = \mu_{11}\alpha_1 x_{1,j-1} + \mu_{12}\alpha_1 x_{2,j-1} + b_1 e_{1j} , \quad (5)$$
$$x_{2,j} = \mu_{21}\alpha_2 x_{1,j-1} + \mu_{22}\alpha_2 x_{2,j-1} + b_2 e_{2j} ,$$

где $\mu_{ik} = \dfrac{r(x_i, x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{2} \left| \ r(x_i, x_k) \ \right|}$ - весовые коэффициенты так называемого метода «центра тяжести» [3]; $r(x_i, x_k)$ - коэффициенты парной корреляции рядов, в нашем случае $r(x_1, x_1) = 1$; оценка $r(x_1, x_2)$ - легко вычисляется. В каждом уравнении системы (5) МНК оценивает уже не два, а один параметр α , для расчета которого требуется меньшая выборка, чем для двух параметров.

Оценки β_i будем определять по аналогии с [2]. Для этого запишем одно из уравнений системы (5) в виде

$$x_{i,j} = \alpha_{i1}x_{1,j-1} + \alpha_{i2}x_{2,j-1} + \beta_i e_j\,, \tag{6}$$

где $\alpha_{ij}=\mu_{ij}\alpha$.

Умножим обе части выражения (6) на $x_{i,j}$, $i=1,2$ получим

$$x_{i,j}^2 = \alpha_{i1}x_{i,j}x_{1,j-1} + \alpha_{i2}x_{i,j}x_{2,j-1} + \beta_i e_j(\alpha_{i1}x_{1,j-1} + \alpha_{i2}x_{2,j-1} + \beta_i e_j). \tag{7}$$

Возьмем математическое ожидание левой и правой части (7). Тогда, с учетом центрированности рядов и взаимной некоррелированности e_j и $x_{i,j-1}$ получаем

$$D_{xi} = \alpha_{i1}\operatorname{cov}(x_{i,j}, x_{1,j-1}) + \alpha_{i2}\operatorname{cov}(x_{i,j}, x_{2,j-1}) + \beta_i^2. \tag{8}$$

Здесь D_{xi} -дисперсия стационарного ряда; $\operatorname{cov}(\bullet)$ – ковариация.

Окончательно получаем

$$\beta_i = \sqrt{D_{xi} - a_{i1}\operatorname{cov}(x_{i,j}, x_{1,j-1}) - a_{i2}\operatorname{cov}(x_{i,j}, x_{2,j-1})} \tag{9}$$

Формулу (9) можно использовать для получения оценки b_i, если заменить ее детерминированные характеристики их выборочными оценками.

Таким образом, определены все необходимые оценки параметров модели (5). Модель (5) и выражение (9) составляют модифицированный метод идентификации стохастической модели (2). То есть оценки параметров модели (2) будут рассчитываться следующим образом:

$$a_{11} = \mu_{11}a_1;\quad a_{12} = \mu_{12}a_1;\quad a_{21} = \mu_{21}a_2;\quad a_{22} = \mu_{22}a_2,$$

где a_1, a_2- оценки параметров α_1, α_2 в системе (3).

Полученный метод легко записать и для моделей более высокого порядка без изменений существа предложений.

3. Модифицированный метод моментов оценки параметров модели СВАР. Для получения оценок модели СВАР, как и в предыдущем разделе, воспользуемся самой простой формой СВАР (1,2).

Для получения уравнений, аналогичных уравнениям Юла-Уокера умножим обе части выражения (6) сначала на $x_{i,j-1}$, а затем на $x_{i,j-2}$, получим

$$x_{i,j}x_{i,j-1} = \alpha_{i1}x_{1,j-1}x_{i,j-1} + \alpha_{i2}x_{2,j-1}x_{i,j-1} + \beta_i e_j x_{i,j-1}, \tag{11}$$

$$x_{i,j}x_{i,j-2} = \alpha_{i1}x_{1,j-1}x_{i,j-2} + \alpha_{i2}x_{2,j-1}x_{i,j-2} + \beta_i e_j x_{i,j-2}. \tag{12}$$

Возьмем математическое ожидание левой и правой части выражений (11) и (12) и разделим каждое выражение на дисперсию соответствующего ряда D_{xi}. Тогда, с учетом центрированности рядов и взаимной некоррелированности e_j и $x_{i,j-1}$ получаем для выражения (11) при i=1, $$r(x_{1,j};x_{1,j-1})=\alpha_{11}+\alpha_{12}r(x_{1,j};x_{2,j}), \qquad (13)$$

при i=2, $$r(x_{2,j};x_{2,j-1})=\alpha_{21}r(x_{1,j-1};x_{2,j-1})+\alpha_{22}; \qquad (14)$$

Аналогично для выражения (12) получаем

при i=1, $$r(x_{1,j};x_{1,j-2})=\alpha_{11}r(x_{1,j};x_{1,j-1})+\alpha_{12}r(x_{1,j-1};x_{2,j-1}), \qquad (15)$$

при i=2, $$r(x_{2,j};x_{2,j-1})=\alpha_{21}r(x_{1,j};x_{2,j-1})+\alpha_{22}r(x_{2,j};x_{2,j-1}). \qquad (16)$$

Здесь $r(\bullet)$- выборочные оценки соответствующих коэффициентов парной корреляции.

Решение линейных систем (13, 15) и (14, 16) определяет оценки пара-метров α_{ij} модели СВАР(1,2). Отличие модифицированного метода состоит в том, что уравнения (13-16) содержат не только значения автокорреляционных функций как в уравнениях Юла-Уолкера, а и значения корреляции между рядами x_1 и x_2 .

Оценка параметров β_1 осуществляется так же как и в модифицированном методе наименьших квадратов.

4. Верификация предложенных модификаций. Проверку эффек-тивности предложенных методов будем проводить путем сравнения качественных характеристик моделей, полученных с применением обычного МНК и модифицированных методов.

Проверку удобно проводить на модельной задаче. Задается формирующая модель двумерного ряда, отвечающая условиям стационарности. Для получения этих условий необходимо систему конечно-разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_{1,j} &= a_{11}x_{1,j-1}+a_{12}x_{2,j-1}, \\ x_{2,j} &= a_{21}x_{1,j-1}+a_{22}x_{2,j-1}; \end{aligned} \qquad (17)$$

привести к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} x_{1,j} &= c_1x_{1.j-1}+c_2x_{1,j-2}, \\ x_{2,j-1} &= \frac{1}{a_{12}}(x_{1,j}-a_{11}x_{1,j-1}). \end{aligned} \qquad (18)$$

Второе уравнение эквивалентной системы получено из первого уравнения исходной системы (17), а его подстановка во второе уравнение системы (17) определяет первое уравнение эквивалентной системы с параметрами

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11}+a_{22}, \\ c_2 &= a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Для первого конечно-разностного уравнения системы (19) можно сос-тавить соответствующее характеристическое уравнение

$$z^2-c_1z-c_2=0\ . \qquad (20)$$

Условия стационарности двумерного ряда вида (11) состоят в требовании размещения корней уравнения (20) строго внутри окружности единичного радиуса.

Чтобы выразить искомые условия через параметры системы (17), следуя [4], проведем в характеристическом уравнении замену переменой по правилу $z = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$, , где λ - новая переменная. Тогда уравнение приобретает вид:

$$\lambda^2(1 + c_1 - c_2) + \lambda(2 + 2c_2) + (1 - c_1 - c_2) = 0 \quad (21)$$

Особенность проведенной замены заключается в том, что если уравнение (20) имеет корни по модулю меньшие единицы, то уравнение (21) имеет корни с отрицательными вещественными частями (как говорят, левые корни), и наоборот, левым корням уравнения (21) соответствуют корни уравнения (20), меньшие по модулю единицы. Но, как известно из курса линейной алгебры, уравнение (21) имеет левые корни тогда и только тогда, когда все три коэффициента уравнения положительны, то есть

$$1 + c_1 - c_2 > 0;\ 2 + 2c_2 > 0;\ 1 - c_1 - c_2 > 0$$

или же

$$c_2 - c_1 < 1;\ c_1 + c_2 < 1;\ |c_2| < 1. \quad (22)$$

Ограничения (22) и являются искомыми условиями стационарности двумерного ряда (17).

Одним из примеров, принятой в исследовании формирующей модели является модель вида

$$\begin{aligned} x_{1,j} &= 0{,}60x_{1,j-1} + 0{,}30x_{2,j-1} + 0{,}20e_{1j}\ , \\ x_{2,j} &= 0{,}55x_{1,j-1} + 0{,}25x_{2,j-2} + 0{,}20e_{2j}\ . \end{aligned} \quad (23)$$

Параметры формирующей модели отвечают полученным условиям стационарности : c_2- c_1=-0,835, c_1+c_2=0,865, c_2=0,015.

С помощью модели (23) формировалась выборочная статистика в виде модельных рядов различной длины n, на которой проводился сравнительный анализ МНК и предложенных модифицированных методов. В качестве критериев сравнения методов приняты сумма квадратов остатков

$$S_i = \sum_{j=1}^{n}(x_{i,j} - \widehat{x}_{i,j})^2\ , \quad (24)$$

где $\widehat{x}_{i,j}$- значения ряда, полученные по рассчитанным оценкам; n – длина ряда; и статистическая значимость полученных оценок.

Кроме того, полученные оценки должны проверяться на выполнение условий стационарности (22).

Как отмечалось в постановке задачи, на качество оценок должна оказывать влияние степень коррелированности рядов между собой. При одной и той же длине ряда n у рядов с высоким значением коэффициента парной корреляции оценки МНК должны быть хуже, чем при низких значениях.

Изменение степени коррелированности рядов между собой можно достигать выбором последовательности значений «белого шума», например, при $e_1=ke_2$, k – коэффициент пропорциональности, коррелированность будет выше, чем при различных значениях последовательностей e_1 и e_2, при прочих равных условиях.

Так для рядов, сформированных с помощью модели (23) с n = 21, были получены выборочные оценки параметров этой же модели обычным МНК и модифицированными методами при условии $e_1 = e_2$ и при $e_1 \neq e_2$. Значения оценок и их характеристики приведены в таблицах 1 - 6.

Результаты сравнительного исследования модифицированных методов оценок параметров и МНК при низкой коррелированности рядов и малой выборке (таблицы 1, 2)

Таблица 1

R(x1,x2)= 0,609 n = 21		МНК			Модифицир. МНК				Модифицир. ММ		
		a_{i1}	a_{i2}	b_i	a_i	a_{i1}	a_{i2}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	b_i
1 ряд	значение	0,26	0,79	0,17	0,76	0,48	0,29	0,22	0,69	-0,20	0,26
	t-статистика	1,49	3,80		5,17						
2 ряд	значение	0,29	0,55	0,18	0,82	0,31	0,51	0,18	-0,51	1,02	0,21
	t-статистика	1,78	2,81		6,08						

Таблица 2

R(x1,x2)= 0,609 n = 21	Критерии сравнения качества моделирования					
	Сумма квадратов остатков			Выполнение условий стационарности		
	МНК	Модифиц. МНК	Модифиц. метод. моментов.	МНК	Модифиц. МНК	Модифиц. метод. моментов.
1 ряд	0,3043	0,2228	78	$\lvert c_2\rvert$ =0,16 c_2-c_1=0,67 c_2+c_1=0,35	$\lvert c_2\rvert$ =0,15 c_2-c=-0,84 c_2+c_1=1,14	$\lvert c_2\rvert$ =0,60 c_2-c_1=2,31 c_2+c_1=1,11
2 ряд	0,2133	0,1689	670			

Результаты сравнительного исследования модифицированных методов оценок параметров модели и МНК при высокой коррелированности рядов e_1=e_2 и малой выборке (таблицы 3, 4)

Таблица 3

R(x1,x2)= 0,996 n = 21		МНК			Модифицир. МНК				Модифицир. ММ		
		a_{i1}	a_{i2}	b_i	a_i	a_{i1}	a_{i2}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	b_i
1 ряд	значение	2,24	-1,50	0,17	0,86	0,43	0,43	0,18	1,22	-0,63	0,20
	t-статистика	0,95	0,59		7,16						
2 ряд	значение	2,19	-1,55	0,20	0,82	0,41	0,41	0,18	0,93	-0,42	0,20
	t-статистика	0,93	0,61		6,23						

Таблица 4

R(x1,x2)= 0,996 n = 21	Критерии сравнения качества моделирования					
	Сумма квадратов остатков			Выполнение условий стационарности		
	МНК	Модифиц. МНК	Модифиц. метод. моментов.	МНК	Модифиц. МНК	Модифиц. метод. моментов.
1 ряд	0,4241	0,1131	0,9746	$\|c_2\|$ =-0,07 c_2-c_1=-0,82 c_2+c_1=0,67	$\|c_2\|$ =0 c_2-c_1=-0,84 c_2+c_1=0,84	$\|c_2\|$ =-0,08 c_2-c_1=-0,7 c_2+c_1=0,88
2 ряд	0,3583	0,0539	0,7942			

Результаты сравнительного исследования модифицированных методов оценок параметров модели и МНК при высокой коррелированности рядов $e_1 \neq e_2$ и большой выборке (таблицы 5, 6)

Таблица 5

R(x1,x2)= 0,999 n = 51		МНК			Модифицир. МНК				Модифицир. ММ		
		a_{i1}	a_{i2}	b_i	a_i	a_{i1}	a_{i2}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	b_i
1 ряд	значение	0,41	0,51	0,20	0,87	0,44	0,44	0,21	0,86	0,01	0,20
	t-статистика	0,29	0,33		12,5						
2 ряд	значение	0,36	0,46	0,20	0,85	0,42	0,42	0,19	-0,01	0,86	0,20
	t-статистика	0,26	0,30		11,1						

Таблица 6

R(x1,x2)= 0,999 n = 51	Критерии сравнения качества моделирования					
	Сумма квадратов остатков			Выполнение условий стационарности		
	МНК	Модифиц. МНК	Модифиц. метод. моментов.	МНК	Модифиц. МНК	Модифиц. метод. моментов.
1 ряд	0,0037	0,0232	0,0032	$\|c_2\|$ =-0,005 c_2-c_1=-0,86 c_2+c_1=0,88	$\|c_2\|$ =0 c_2-c_1=-0,86 c_2+c_1=0,86	$\|c_2\|$ =0,74 c_2-c_1=-1,0 c_2+c_1=2,46
2 ряд	0,0035	0,0182	0,0348			

5. Обсуждение результатов сравнительного анализа. Результаты верификации, представленные таблицами 1-6, в целом, подтверждают предположение о появлении смещенных оценок метода наименьших квадратов для параметров векторной модели на малых выборках.

Действительно, значения t-статистики практически для всех оценок, полученных методом наименьших квадратов, показывают их статистическую незначимость. Особенно это проявляется в условиях высокой коррелированности рядов (табл. 3, 5). При этом увеличение выборки более чем вдвое, не улучшает статистическую значимость оценок МНК.

Напротив, промежуточные оценки a_i модифицированного МНК вполне статистически значимы во всех вариантах выборок.

Модифицированный МНК может давать хорошие оценки параметров векторной модели даже в условиях малых выборок и низкой коррелированности рядов. Так по критерию суммы квадратов остатков в таблице 2, модифицированный МНК дает оценки даже несколько лучше, чем обычный МНК, хотя и допускает незначительное отклонение от требований стационарности.

В условиях малой выборки и высокой коррелированности рядов модифицированный МНК дает оценки, очевидно превосходящие по своему качеству оценки обычного МНК (табл. 4).

В условиях большой выборки (табл. 6), модифицированный метод уступает методу наименьших квадратов по критерию суммы квадратов остатков.

Модифицированный метод моментов уступает альтернативным методам в условиях малой выборки и не показывает явных преимуществ в условиях большой выборки. Для этого метода характерно то, что полученные оценки не отвечают условиям стационарности в условиях таблиц 2 и 6. Так значения критерия суммы квадратов ошибок для этого метода в таблице 1 связано с появлением нестационарного тренда в модельной реализации временных рядов 1 и 2. Можно предположить, что неудовлетворительная работа метода моментов связана с недостаточным количеством статистических данных для расчета оценок соответствующих значений корреляционных и автокорреляционных функций.

Полученные результаты сравнительного исследования предложенных модификаций методов оценки параметров модели СВАР дают основание для использования модифицированного МНК в условиях малых выборок или коротких временных рядов, особенно при наличии высокой степени корреляции в многомерных рядах.

Список источников

1. Айвазян, С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики [Текст] / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М: ЮНИТИ, 1998.

2. Елисеева, И.И. Эконометрика [Текст] / под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2006.

3. Матвеев, М.Г. Модели и методы искусственного интеллекта: применение в экономике [Текст] / М.Г. Матвеев, А.С. Свиридов, Н.А. Алейникова. – М.: Финансы и статистика, 2008.

4. Чураков, Е.П. Прогнозирование экономических временных рядов [Текст] / Е.П. Чураков. – М.: Финансы и статистика, 2008.

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF MODELS OF VECTORIAL AUTOREGRESSION

M.G. Matveyev,
Dr.Sc. of Technical Science, Professor of the Chair of Mathematics and Information Technologies of Management of Voronezh Filial branch of Russian Academy of Governmental Service under the President of RF;
mgmatveev@yandex.ru

Modifications of least-squares method and method of moments for parametrical identification of model of vectorial auteregression are offered. Application of the modified least-squares method is reasonable for authentication of short stationary temporal multidimensional rows with high correlation.
Keywords: Multidimensional temporal rows, model of vectorial auteregression, self-reactance authentication, equalizations of Yule-Walker, terms of stationarity of temporal row.