ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

УДК 519.8

К ВОПРОСУ О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ИГР С ПРИРОДОЙ

Егоров Владислав Валерьевич,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов и информатики в экономике Волгоградского государственного университета;
yegoroff_vv@mail.ru

О методах принятия решения в конфликтной ситуации двух лиц, представленной матричной игрой при дополнительном влияния со стороны “природы” на возможные результаты конфликта, т.е. при наличии непредвиденных обстоятельств, возникающих собственно в природе, в том или ином социуме, рынке и так далее.
Ключевые слова: матричные игры, игры с природой, принятие решений.

Введение

В рамках теории матричных игр исследуется антагонистический конфликт двух лиц [1, 4, 5, 7], представленный матрицей выигрышей одного из них у другого (или биматрицей выигрышей этих игроков), а игры с природой [2] подразумевают отсутствие целенаправленного противодействия игрока-природы сознательно действующему другому игроку. Однако в реальных условиях часто возникает ситуация одновременного наличия и разумного соперника, и непреднамеренных случайностей окружающего мира. Связанные с этим вопросы являются достаточно важными и актуальными в области экономико-математического и социального моделирования. При этом, в отличие от [3], где изучаются различные варианты понятия максимина (наилучшего гарантированного результата), их оценки и т.д., здесь рассматриваются различные методы принятия решения в зависимости от степени информированности конфликтующих сторон.

Постановка задачи

Пусть у каждого из двух игроков $И_i$ (i=1,2) имеется n_i (i=1,2) возможных стратегий поведения. Обозначим через s – то или иное возможное состояние природы, причем либо $s \in \{1,\ldots,m\}$в дискретном, либо $s<\alpha, \beta> \subseteq \Re^1$в непрерывном случае.

Каждый из игроков независимо друг от друга и от природы выбирает одну из своих возможных стратегий поведения, а природа независимо от этого и неосознанно переходит в одно из своих возможных состояний, т.е. ее можно рассматривать, как третьего игрока с "безразличным" критерием поведения (пусть это будут соответственно некоторые стратегии i, j и состояние s). Для каждой из таких ситуаций известен выигрыш $a_{ij}(s)$ игрока $И_1$ у игрока $И_2$. В описанных обстоятельствах игроку $И_1$ нужно принять решение о способе выбора стратегии, позволяющей сделать его выигрыш, по возможности, больше, а игроку $И_2$ – позволяющей сделать его проигрыш, по возможности, меньше.

Заметим, что начальные данные задачи в дискретном по отношению к природе случае для наглядности можно представить в виде трехмерной матрицы $A = A_{n_1 \times n_2 \times m} = \left(a_{ij}(s)\right)$, i=1,…,n_1, j=1,…,n_2, s=1,…,m (см. рис.):

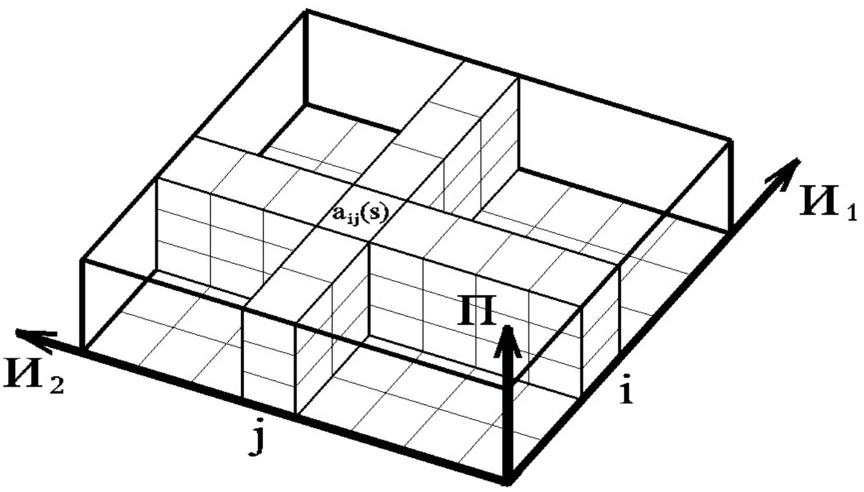

Рис. Матрица результатов игры при дискретных состояниях природы

В непрерывном по отношению к природе случае каждый столбец значений этой "матрицы" следует воспринимать, как множество значений некоторой функции $a_{ij}(s)$.

Ясно, что при каждом фиксированном состоянии s природы имеем соответствующий горизонтальный слой $a_{**}(s)$ трехмерной матрицы A, представляющий собой обычную матричную игру.

Ситуация стохастической неопределенности при наличии информации у соперников о знаниях друг друга

Пусть каждому игроку в дискретном случае известны вероятности $p=(p_1,…,p_m)$ имеющихся состояний природы, а в непрерывном случае – функция $p(s)$ плотности распределения вероятностей таких состояний.

Тогда, например, выбору игроком $И_2$ стратегии j соответствует вертикальный слой $a_{*j}(_*)$ матрицы A возможных выигрышей игрока $И_1$.

В этой ситуации математические ожидания величин выигрыша игрока $И_1$ при выборе им той или иной своей стратегии i равны (с учетом поведения природы):

$$b_{ij}^1 = \sum_{s=1}^{m} a_{ij}(s) p_s$$ (дискретный случай состояний s природы),

$$b_{ij}^1 = \int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}(s) p(s) ds$$ (непрерывный случай состояний s природы, когда для корректности s рассматривается, как абсолютно непрерывная случайная величина с борелевской функцией ее плотности распределения вероятностей и предполагается интегрируемость подынтегральных выражений).

Таким образом, в результате из трехмерной матрицы A получаем матрицу $B^1 = B^1_{n_1 \times n_2} = (b_{ij}^1)$, $i=1,\ldots,n_1$, $j=1,\ldots,n_2$, математических ожиданий выигрышей игрока $И_1$ у игрока $И_2$, т.е. игру, уже не требующую учета состояний природы.

Рассуждая аналогично, но теперь начиная с выбора игроком $И_1$ некоторой стратегии i, приходим к матрице $B^2 = B^2_{n_1 \times n_2} = (b_{ij}^2)$, $i=1,\ldots,n_1$, $j=1,\ldots,n_2$, математических ожиданий проигрышей игрока $И_2$ игроку $И_1$, т.е. снова к получению игры, не требующей учета состояний природы.

Однако легко видеть, что $B^1=B^2=B$ и, следовательно, исходная матрица A дает не биматричную, а обычную матричную игру B.

Заметим, что биматричные игры возникают, если исходно задана не антагонистическая игра, когда элементы матрицы A представлены парами чисел $\left(a_{ij}^1(s), a_{ij}^2(s)\right)$ – выигрышей игроков $И_1$ и $И_2$, соответственно. Тогда элементами биматричных игр очевидно будут:

$$b_{ij}^{1,2} = \sum_{s=1}^{m} a_{ij}^{1,2}(s) p_s$$ (дискретный случай),

$$b_{ij}^{1,2} = \int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}^{1,2}(s) p(s) ds$$ (непрерывный случай).

Также биматричные игры возникают, когда игрокам точно неизвестен закон поведения природы ($p=(p_1,\ldots,p_m)$ – в дискретном или $p(s)$ – в непрерывном случае), но при этом каждый игрок знает некоторый "прогноз погоды" (т.е. оценку закона поведения природы) и то, какому "прогнозу" доверяет (ориентируется на него) его соперник.

Обозначив указанные оценки через $\hat{p}^{1,2} = (\hat{p}_1^{1,2},\ldots,\hat{p}_m^{1,2})$ и $\hat{p}^{1,2}(s)$ – в дискретном и непрерывном случаях, соответственно, получаем биматрицу с элементами (методы решения биматричных игр представлены, например, в [8]):

$$\hat{b}_{ij}^{1,2} = \sum_{s=1}^{m} a_{ij}(s) \hat{p}_s^{1,2}$$ или $$\hat{b}_{ij}^{1,2} = \sum_{s=1}^{m} a_{ij}^{1,2}(s) \hat{p}_s^{1,2}$$ (дискретный случай),

$$\hat{b}_{ij}^{1,2} = \int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}(s) \hat{p}^{1,2}(s) ds$$ или $$\hat{b}_{ij}^{1,2} = \int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}^{1,2}(s) \hat{p}^{1,2}(s) d$$ (непрерывный случай).

Ситуация стохастической неопределенности при отсутствии информации у соперников о знаниях друг друга.

Пусть каждый игрок ориентируется на некоторую известную ему оценку закона поведения природы, но не знает, на какую подобную оценку ориентируется его соперник. Т.е. пусть величины $\hat{b}_{ij}^{1}$ известны игроку $И_1$ (и он должен выбрать некоторую свою стратегию $i=1,\dots,n_1$), но неизвестны игроку $И_1$, а величины $\hat{b}_{ij}^{2}$ известны игроку $И_2$ (и он должен выбрать некоторую свою стратегию $j=1,\dots,n_2$), но неизвестны игроку $И_1$.

В этом случае каждому игроку $И_k$, $k=1,2$, следует рассматривать известную ему матрицу получаемых указанным ранее образом величин $\hat{b}_{ij}^{k}$, $k=1,2$, как стандартную игру с природой, вероятности состояний которой ему не доступны, но только теперь в качестве природы будет выступать его соперник.

Если в описанной ситуации в указанную игру можно играть неоднократно, то на основе фиксируемых наблюдений каждый игрок имеет возможность (например, на основе байесовского подхода и применения методов статистики) корректировать свои прежние оценки о поведении природы и получать оценки закона поведения соперника.

Ситуация полной неопределенности

Пусть теперь игроки не знают ни оценок вероятностей состояний природы, ни предпочтений соперника по использованию того или иного типа стратегии в этом случае.

Приведем некоторые возможные способы поведения игроков (или способы принятия ими решений, как действовать) при наличии такой ситуации.

а) Принцип недостаточного основания Лапласа.

В предположении, что при выборе игроком $И_1$ некоторой стратегии i и его соперник, и природа могут с равными и независимыми вероятностями "ответить" любым возможным образом, имеем следующую оценку математического ожидания его выигрыша:

$$\hat{V}_i^1 = \frac{1}{n_2 \cdot m} \sum_{\substack{j=\overline{1,n_2} \\ s=\overline{1,m}}} a_{ij}(s) \text{ (дискретный случай),}$$

$$\hat{V}_i^1 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=\overline{1,n_2}} \int_{\alpha}^{\beta} a_{ij}(s) \frac{1}{\beta-\alpha} ds \text{ (непрерывный случай в предположении}$$

игрока И1 о равномерном на $<\alpha, \beta>$ распределении вероятностей состояний природы).

Тогда при применении данного принципа игроку $И_1$ следует выбирать стратегию: $i_0 = Arg \max\limits_{i=\overline{1,n_1}} \hat{V}_i^1$.

Аналогично для игрока И2:

$$\hat{V}_j^2 = \frac{1}{n_1 \cdot m} \sum_{\substack{i=\overline{1,n_1} \\ s=\overline{1,m}}} a_{ij}(s) \quad \text{или} \quad \hat{V}_j^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=\overline{1,n_1}} \int_{\delta}^{\gamma} a_{ij}(s) \frac{1}{\gamma-\delta} ds \text{,}$$

и тогда $j_0 = Arg \min\limits_{j=1,n_2} \hat{V}_j^2$.

б) Максиминный (минимаксный) критерий крайнего пессимизма Вальда.

В предположении игрока о том, что как бы он ни поступил, всегда следует рассчитывать на худший при таком действии результат, этому игроку следует использовать то действие, которое соответствует выбору лучшего из худших результатов.

В рассматриваемом обобщении игр с природой указанный подход дает:

При применении данного критерия игроку $И_1$ следует выбирать стратегию $i_0 = Arg \max\limits_i \min\limits_j \inf\limits_s a_{ij}(s)$, а игроку $И_2$ –

$$j_0 = Arg \min\limits_j \max\limits_i \sup\limits_s a_{ij}(s) \cdot$$

в) Критерий минимаксного (максиминного) риска Сэвиджа

Для игрока $И_1$ по трехмерной матрице A выигрышей $И_1$ у $И_2$ строится трехмерная матрица сожалений R^1 об упущенных наилучших возможностей с элементами-отклонениями от его наибольших возможных выигрышей

(в случае, когда при стратегии j игрока $И_2$ и состоянии s природы была бы выбрана другая, отличная от i, стратегия поведения игрока $И_1$):

$$r_{ij}^1(s) = \max\limits_{l=1,n_1} a_{lj}(s) - a_{ij}(s),$$

после чего к матрице R^1 применяется минимаксный критерий Вальда, диктующий игроку $И_1$ выбрать стратегию: $i_0 = Arg \min\limits_i \max\limits_j \sup\limits_s r_{ij}^1(s)$.

Аналогично для игрока $И_2$ по матрице A строится матрица R^2 с элементами-отклонениями от его наименьших возможных проигрышей (в случае, когда при стратегии i игрока $И_1$ и состоянии s природы была бы выбрана другая, отличная от j, стратегия поведения игрока $И_2$):

$$r_{ij}^2(s) = a_{ij}(s) - \min\limits_{l=1,n_2} a_{il}(s),$$

после чего к матрице R^1 применяется максиминный критерий Вальда, диктующий игроку $И_2$ выбрать стратегию: $j_0 = Arg \max\limits_j \min\limits_i \inf\limits_s r_{ij}^2(s)$.

г) Критерий оптимизма-пессимизма Гурвица с уровнем $L \in [0,\ 1]$ оптимизма.

Для игрока $И_1$ найдем "субъективные средние" выигрыши E_i^1, соответствующие некоторому его уровню $L^1 \in [0,\ 1]$ оптимизма:

$$E_i^1 = L^1 \max\limits_j \sup\limits_s a_{ij}(s) + (1 - L^1) \min\limits_j \inf\limits_s a_{ij}(s) \cdot$$

Тогда при применении данного критерия игроку $И_1$ следует выбирать стратегию: $i_0 = Arg \max\limits_{i=1,n_1} E_j^1$, а игроку $И_2$: $j_0 = Arg \min\limits_{j=1,n_2} E_j^2$, где

$E_j^2 = (1 - L^2) \max\limits_i \sup\limits_s a_{ij}(s) + L^2 \min\limits_i \inf\limits_s a_{ij}(s)$ – "субъективные средние" проигрыши игрока $И_2$.

В заключение приведем следующие замечания:

1. Разумеется, в рассмотренном случае полной неопределенности один из игроков может решить использовать какой-то один из описанных способов поведения, а его соперник – какой-то другой. Отступление от субъективизма здесь возможно при рассмотрении конкретных примеров, внутренние особенности которых будут указывать, какой критерий для применения лучше.

2. Известно, что в ситуации игр нескольких лиц (а изложенную в статье ситуацию можно представить, как игру трех лиц, одно из которых имеет "безразличный" критерий поведения с постоянной функцией выигрыша) справедливо утверждение о существовании равновесия по Нэшу [1], но при этом в общем случае неизвестны алгоритмы быстрого его нахождения.

В данном случае возможна и представляет собой отдельный интерес разработка численных методов расчетов величин из указанных в статье алгоритмов принятия решения (подобные проблемы разбираются в [6]).

3. Приведем пример экономико-математической модели, в рамках которой применимы представленные методики.

Рассмотрим ситуацию дуополии, когда имеется два основных или просто два игрока-предприятия, производящих некоторый одного и того же вида товар (либо услугу). Пусть прибыль каждого из этих предприятий за периоды его работы известна (например, в силу прозрачности демократической экономики страны их функционирования). Следовательно, будем считать известным Ad_i $(i=1,2)$ – максимальную возможную величину расходов из бюджета предприятия i $(i=1,2)$ на рекламу своей деятельности (или лоббирование своих интересов).

Аналогично, через ad_i $(i=1,2)$ обозначим величину расходов из бюджета предприятия i $(i=1,2)$ на его рекламу своей деятельности и, в зависимости от степени идеализации строящейся модели, будем рассматривать значения этой величины непрерывными $ad_i \in [0, Ad_i]$ или дискретными, кратными некоторому значению. Пусть, для определенности, $ad_i \in \{0, 1, \ldots, Ad_i\}$ и эти допустимые значения следует воспринимать, как возможные действия игрока-предприятия $И_i$.

На предстоящий период времени (сезон) представим потребность некоторого рынка (или какого-то региона) в товаре, производимом предприятиями, через $D+s$. Здесь D – известная средняя потребность рынка на сезон (емкость рынка), s – случайная величина-возмущение потребности D с известным каждому игроку законом поведения (например, s может быть дискретной случайной величиной с известным рядом распределения вероятностей).

Предполагая, что регион (его потребители или централизованная власть) будет приобретать товар у игрока-предприятия в объеме, пропорциональном рекламным вложениям предприятия в суммарных рекламных вложениях обоих предприятий, получаем, что указанная величина закупок у предприятия $i\ (i=1,2)$, соответственно, равна:

$$d_1 = \frac{ad_1}{ad_1 + ad_2}(D+s) \text{ и } d_2 = \frac{ad_2}{ad_1 + ad_2}(D+s) = (D+s) - \frac{ad_1}{ad_1 + ad_2}(D+s),$$

где договоримся считать, что $ad_i /(ad_1 + ad_2) = 1/2\ (i=1,2)$ при $ad_1 = = ad_2 = 0$ (когда регион знает лишь о существовании предприятий, но не более того).

Заметим, что заранее, до начала рассматриваемого сезона, узнать точно величины $D + s,\ d_1,\ d_2$ – невозможно. Поэтому каждый игрок $И_i$ должен выбрать (помимо величины своих рекламных вложений), какой объем товара v_i ему изготовить к указанному сезону (во время которого товар уже должен распространяться, а не еще лишь производиться). Таким образом, в качестве чистых стратегий игрока $И_i$ следует рассматривать пары $(ad_i,\ v_i)$.

Пусть $Price$ – известная установившаяся на рынке цена одной условной единицы товара, а $Cost$ – стоимость производства такой единицы.

Тогда при каждом значении s (иными словами, при каждом состоянии природы) найдем величины прибылей игроков. Сделаем это с учетом того, что в случае, когда один из них имеет произведенного товара меньше величины, планируемой для приобретения у него регионом, то другой игрок сможет некоторым образом компенсировать это (в случае отсутствия у себя самого таких проблем).

Отметим, что если $v_1 > d_1$, то первый игрок имеет перепроизводство в размере $v_1 - d_1$. Однако, если при этом $v_2 < d_2$, т.е. у второго игрока имеется недопроизводство в размере $d_2 - v_2$, то это недопроизводство может частично или полностью компенсировать первый игрок на величину:

$$comp_1 = \min\{\max\{d_2 - v_2; 0\}; v_1 - d_1\} \in [0, \min\{d_2 - v_2; v_1 - d_1\}]$$

(которая равна нулю, когда на самом деле $v_2 \geqslant d_2$, и которая не больше величины перепроизводства первого игрока, т.е. $0 \leqslant comp_1 \leqslant v_1 - d_1$).

В представленном случае первый игрок получит прибыль от реализации d_1 условных единиц товара, запланированных для покупки у него регионом, также он получит прибыль от реализации указанных $comp_1$ условных единиц товара, и он получит убыток от не реализации оставшихся $((v_1 - d_1) - comp_1)$ единиц товара. А в итоге представленной здесь ситуации (по сути, представляющей собой случай, когда второй игрок делает слишком большие рекламные вложения, которые в результате идут в пользу конкурента) имеем:

$$d_1 \cdot (Price - Cost) + comp_1 \cdot (Price - Cost) - ((v_1 - d_1) - comp_1) \cdot Cost =$$

$$= (d_1 + comp_1) \cdot Price - v_1 \cdot Cost.$$

Следовательно, элементами трехмерных матриц A^1 и A^2 выигрышей первого и выигрышей второго игрока-предприятия будут, соответственно:

$$a^1((ad_1, v_1);(ad_2, v_2); s)=$$

$$=\begin{cases} v_1 \cdot (Price - Cost) & npu \quad v_1 \le d_1, \\ (d_1 + \min\{\max\{d_2 - v_2; 0\}; v_1 - d_1\}) \cdot Price - v_1 \cdot Cost & npu \quad v_1 > d_1 \end{cases};$$

$$a^2((ad_1, v_1);(ad_2, v_2); s)=$$

$$=\begin{cases} v_2 \cdot (Price - Cost) & npu \quad v_2 \le d_2, \\ (d_2 + \min\{\max\{d_1 - v_1; 0\}; v_2 - d_2\}) \cdot Price - v_2 \cdot Cost & npu \quad v_2 > d_2 \end{cases}.$$

После построения указанным образом модели конкурентной ситуации, представленной в виде трехмерной биматрицы, получаем по приведенным ранее формулам (соответственно, в дискретном или непрерывном случае):

$$b^{1,2}((ad_1, v_1);(ad_2, v_2)) = \sum_{s=1}^{m} a^{1,2}((ad_1, v_1);(ad_2, v_2); s)p_s$$

или

$$b^{1,2}((ad_1, v_1);(ad_2, v_2)) = \int_{\alpha}^{\beta} a^{1,2}((ad_1, v_1);(ad_2, v_2); s)p(s)ds$$

обычную биматричную игру (у имени элементов которой вместо традиционных набора значений индексов i – набор пар (ad_1, v_1), и вместо набора значений индексов j – набор пар (ad_2, v_2)) и находим ее ситуацию равновесия.

Список источников

1. Васин, А.А. Теория игр и модели математической экономики [текст] / А.А. Васин, В.В. Морозов. – М.: МАКС пресс, 2005. – 272 с.

2. Вентцель, Е.С. Исследование операций [текст] / Е.С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.

3. Гермейер, Ю.Б. Введение в теорию исследования операций [текст] / Ю.Б. Гермейер. – М.: Наука, 1971. – 384 с.

4. Оуэн, Г. Теория игр [текст] / Г. Оуэн. – М.: Мир, 1971. – 232 с.

5. Петросян, Л.А. Теория игр [текст] / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.

6. Федоров, В.В. Численные методы максимина [текст] / В.В. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 278 с.

7. Фон Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение [текст] / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970. – 708 с.

8. Lemke, C.E. Equilibrium points of bimatrix games [текст] / C.E. Lemke, J.J. Jr. Howson // Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A., 1961. V. 47. P. 1657–1662.

ON SOME GENERALIZATIONS OF THE GAME WITH NATURE

Yegorov Vladislav Valeryevich,
Ph. D. of Mathematics, Associate Professor of the Chair of Mathematical Methods and Informatics in the Economy of Volgograd State University; yegoroff_vv@mail.ru

On decision-making's problem in conflict situation of two individuals, presented a matrix game with additional influence from the "nature" on the possible outcomes of conflict, when unforeseen circumstances arise in nature itself, in a social life, market, etc.
Keywords: matrix games, games with nature, decision-making.