
МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ПРОГНОЗИРОВАНИЮ ВЕЛИЧИНЫ И ДИНАМИКИ ВОЛАТИЛЬНОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕСТАБИЛЬНОСТИ НА РЫНКАХ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Яновский Леонид Петрович,

доктор экономических наук, профессор кафедры экономики АПК
Воронежского государственного аграрного университета;
Leonidya60@yandex.ru

Лебедевская Елена Анатольевна,

аспирант Института менеджмента, маркетинга и финансов;
leblen@mail.ru

В статье рассматриваются модели прогнозирования волатильности, построенные с использованием теории мультифракталов. Для нахождения параметров моделей был предложен метод, позволяющий спрогнозировать не только величину, но и динамику (рост или спад) волатильности, реализованный в среде MATLAB. Используя данные стоимости акций семи компаний с 2002 г. по 2010 г., была доказана эффективность предложенного метода, а также применения теории мультифракталов для построения моделей прогнозирования величины и динамики волатильности.

Ключевые слова: волатильность, мультифрактальность, модели прогнозирования волатильности, генетические алгоритмы, финансовые активы.

Современный рынок финансовых активов характеризуется высокой степенью неопределенности и нестабильности, т.е. повышенным уровнем волатильности курсов ценных бумаг, валют, биржевых индексов. В этих условиях инвестиционные процессы становятся чрезмерно рискованными, для подтверждения их эффективности требуются новые подходы к обоснованию стратегий финансового менеджмента. Одной из таких стратегий является прогнозирование волатильности. Применение теории мультифракталов для прогнозирования волатильности является одним из новых и наиболее эффективных методов прогнозирования на рынках финансовых активов.

Цель данной работы – используя мультифрактальные методы, спрогнозировать не только величину волатильности, но и ее тенденцию (рост или спад), исследуя закономерности динамики показателя за предыдущие периоды.

Для фракталов и мультифракталов уже существует обширное математическое обоснование. Фрактальные модели появляются не только в распределении галактик в космосе, в форме береговых линий и в декоративных проектах, произведенных компьютерными программами, но и в изменениях котировок ценных бумаг.

Фрактал – геометрическая форма, которая может быть разделена на части, каждая из которых – уменьшенная версия целого. В финансах эта концепция может быть переформулирована следующим образом: движения акции или валюты внешне похожи, независимо от масштаба времени и цены. Наблюдатель не может сказать по внешнему виду графика, относятся ли данные к недельным, дневным или же часовым изменениям. Монофрактальный временной ряд – ряд с постоянными стабильными характеристиками фрактальности такими, как показатель Хёрста, индекс фрактальности, корреляционная размерность, показатель Гёльдера, степень убывания автокорреляций и т. д. Мультифрактал – комплексный фрактал, который определяется не одним единственным алгоритмом построения, а несколькими последовательно сменяющимися друг друга алгоритмами. В финансах мультифрактальность означает изменение показателей фрактальности с изменением масштаба, например, после агрегирования временного ряда к другому интервалу, в частности, при переходе от часовых показателей к дневным показателям.

Мультифрактальный подход к прогнозированию значений волатильности применяется в работах Кальвита и Фишера (2007 г.). В работе ученых «Multifractal Volatility» была рассмотрена модель The Markov-Switching Multifractal (MSM) Model, применяемая для прогнозирования стохастической волатильности. В статье подробно описана данная модель. А также в статье рассмотрены GARCH-модель и Multifractal GARCH-модель, построенная на основе GARCH-модели с учётом теории мультифракталов, и метод нахождения параметров моделей, учитывающий важность направления изменения динамики волатильности, описанные ниже.

1. The Markov-Switching Multifractal (MSM) Model

Считаем, что финансовый ряд P_t определён для всех $t=0, 1, 2, \dots, \infty$. P_t – цена финансового актива. Полагаем $\varepsilon_t = (P_t - P_{t-1})$ – доходность актива на момент времени t . Задан Марковский вектор состояний первого порядка из \bar{k} компонент:

$$M_t = (M_{1,t}; M_{2,t}; \dots; M_{\bar{k},t}) \in R_t^{\bar{k}}.$$

Компоненты вектора M_t определяются следующим ниже алгоритмом.

Предполагаем, что вектор состояний волатильности определён на момент времени $t-1$. Для каждого $k \in \{1, \dots, \bar{k}\}$ на следующий период компонента $M_{k,t}$ выбирается из фиксированного распределения M с вероятностью γ_k , иначе с вероятностью $1-\gamma_k$ компонента $M_{k,t}$ принимает предыдущее значение: $M_{k,t} = M_{k,t-1}$. Считаем, что для распределения M справедливы следующие свойства: $M \geq 0$; $E(M) = 1$. Случайные компоненты $M_{k,t}$ являются

постоянными, неотрицательными, $E(M_{k,t}) = 1$. Тогда стохастическая волатильность может быть определена следующим образом:

$$\sigma(M_t) \equiv \bar{\sigma} \left(\prod_{i=1}^{\bar{k}} M_{k,t} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где $\bar{\sigma}$ - положительная константа;
доходность актива $\varepsilon_t = \sigma(M_t)k_t$;

где $k_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$; σ_t - дисперсия на период t .

Вероятности перехода $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\bar{k}})$ определяются по формуле (2):

$$\gamma_k = 1 - (1 - \gamma_1)^{b^{k-1}} \quad (2)$$

где $\gamma_1 \in (0,1)$ $b \in (1, \infty)$.

При малых значениях k величина $\gamma_1 b^{k-1}$ мала и формула вероятностей перехода (2) будет иметь следующий вид:

$$\gamma_k \approx \gamma_1 b^{k-1},$$

при условии, что $\gamma_1 < \dots < \gamma_{\bar{k}} < 1 < b$.

Частным случаем данной модели является биномиальная модель "The Binomial Markov-Switching Multifractal (MSM) Model". Для данной модели случайная переменная M принимает только два значения m_0 и m_1 . Для простоты, мы часто предполагаем, что эти два результата происходят с равной вероятностью, причём $m_1 = 2 - m_0$. Тогда полный вектор параметров можно записать следующим образом:

$$\psi = (m_0, \bar{\sigma}, b, \gamma_{\bar{k}}) \in R_+^4.$$

GARCH Model – (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic model), предложенная в 1986 г. Т. Боллерслевом – обобщенная авторегрессионная модель гетероскедастичности, которая предполагает, что на текущую изменчивость дисперсии влияют как предыдущие изменения показателей, так и предыдущие оценки дисперсии (т.н. «старые новости»). Согласно данной модели (GARCH(p,q)) расчет дисперсии производится по следующей формуле:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2, \quad (3)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0,1);$$

где $\hat{\sigma}_t^2$ – прогнозируемое значение дисперсии (волатильности) на период t ;

ω – коэффициент задержки (лага) или базовая волатильность;

α_i, β_i – весовые коэффициенты модели;

$\varepsilon_{t-i}^2 = (P_{t-i} - P_{t-i-1})$ – доходность актива;

P_t – цена актива;

σ_{t-i}^2 – фактическое значение дисперсии (волатильности) на период $t-i$.

Модель (3) также может быть представлена в виде:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2,$$

где L – лаговый оператор, для которого определены следующие равенства:

$$\alpha(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i; \beta(L) = \sum_{i=1}^p \beta_i L^i.$$

GARCH-модель применима для фрактального (самоподобного) временного ряда. Для такого временного ряда существует один параметр подобия, переводящий волатильность на одном интервале в волатильность на другом временном интервале. Так, например, для случайного броуновского движения дисперсия на дневном интервале и дисперсия на годовом интервале связаны соотношением:

$$\sigma_T^2 = N\sigma_t^2$$

где σ_T^2 – годовая дисперсия;

σ_t^2 – дневная дисперсия;

N – количество торговых дней в году.

Если временной ряд обладает мультифрактальными свойствами, то параметр подобия для разных промежутков времени «плывёт», не являясь константой. В этом случае целесообразно ввести в модель волатильность на разных временных промежутках, т.е. рассмотреть Multifractal GARCH Model, описанную ниже.

2. Multifractal GARCH Model – мультифрактальная GARCH-модель, учитывающая зависимость величины дневной волатильности от значений часовой волатильности:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^m \gamma_i \tilde{\sigma}_{t-i}^2, \quad (4)$$

где $\hat{\sigma}_t^2$ – прогнозируемое значение дисперсии (волатильности) на период t ;

ω – коэффициент задержки (лага) или базовая волатильность;

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – весовые коэффициенты модели;

$\varepsilon_{t-i}^2 = (P_{t-i} - P_{t-i-1})$ – доходность актива;

P_t – цена актива;

σ_{t-i}^2 – дневная дисперсия (волатильность) на период $t-i$;

$\tilde{\sigma}_t^2$ – часовая дисперсия (волатильность) на период $t-i$.

Для нахождения параметров моделей (1), (3), (4) существуют различные методы, например МНК. Однако данный метод не учитывает направление изменения волатильности. Учитывая этот факт, целевую функцию потерь модели запишем в виде (5):

$$Q = (1 - \mu) \sum_{i=2}^{n-1} \delta_{i+1}^2 - \mu \sum_{i=2}^{n-1} G_{i+1} \rightarrow \min, \quad (5)$$

$$\text{где } G_{i+1} = \text{sign}[(\hat{\sigma}_{i+1}^2 - \hat{\sigma}_i^2)(\sigma_{i+1}^2 - \sigma_i^2)] = \begin{cases} -1, & (\hat{\sigma}_{i+1}^2 - \hat{\sigma}_i^2)(\sigma_{i+1}^2 - \sigma_i^2) < 0, \\ 1, & (\hat{\sigma}_{i+1}^2 - \hat{\sigma}_i^2)(\sigma_{i+1}^2 - \sigma_i^2) > 0, \\ 0, & (\hat{\sigma}_{i+1}^2 - \hat{\sigma}_i^2)(\sigma_{i+1}^2 - \sigma_i^2) = 0; \end{cases}$$

μ – коэффициент приоритетности прогноза динамики волатильности по сравнению с точностью прогноза по абсолютной величине.

Решение задачи (5) стандартными методами типа ветвей и границ, динамического или линейного программирования крайне затруднено. Поэтому для нахождения решения задачи (5) был применен метод, который использует генетические алгоритмы.

Генетические алгоритмы (ГА) – это стохастические, эвристические оптимизационные методы, впервые предложенные в 1975 Джоном Генри Холландом. Идея генетических алгоритмов заимствована у живой природы и состоит в организации эволюционного процесса, конечной целью которого является получение решения в сложной задаче оптимизации. Общая схема генетических алгоритмов может быть записана следующим образом:

1. Формирование начальной популяции.
2. Оценка особей популяции.
3. Отбор (селекция).
4. Скрещивание.
5. Мутация.
6. Формирование новой популяции.
7. Если популяция не сошлась, то 2. Иначе – останов. Для реализации данного алгоритма был выбран пакет прикладных программ Matlab.

Пример. Взятые дневные, часовые и пятиминутные данные стоимости акций компаний ОАО «Газпром», ОАО «Роснефть», ОАО «Аэрофлот», ОАО «Сбербанк» с 1.09.2009 г. по 25.06.2010 г., с 24.01.07 г. по 9.11.07 г., с 12.11.07 г. по 4.09.08 г., с 12.11.09 г. по 6.09.10 г., с 8.07.09 по 28.04.10 г., данные стоимости акций компаний ОАО «Газпромнефть», ОАО «Сургутнефтегаз», ОАО «Ростелеком», ОАО «Аэрофлот» с 20.03.06 г. по 23.01.07 г., с 26.05.05 г. по 17.03.06 г., с 29.07.04 г. по 25.05.05 г., с 3.10.03 г. по 28.07.04 г., с 11.12.02 г. по 2.10.03 г., с 21.02.02 г. по 10.12.02 г. Для рассматриваемых временных рядов были найдены значения дневных и часовых волатильностей. Найдены параметры модели The Binomial Markov-Switching Multifractal (MSM) Model и получены прогнозируемые значения волатильности. Вероятности прогнозирования динамики волатильности и количественные значения параметров модели MSM для компаний ОАО «Газпром», ОАО «Роснефть» представлены в таблицах 1, 2. Для компаний ОАО «Аэрофлот», ОАО «Сбербанк» также были найдены основные параметры модели The Markov-Switching Multifractal (MSM), прогноз по моделям осуществлялся для $k=1,2,..,10$. Наилучший результат прогнозирования для ОАО «Аэрофлот» – 51%, для ОАО «Сбербанк» – 54% угадывания динамики волатильности. Модель The Markov-Switching Multifractal (MSM) была испытана ещё на 10 временных интервалах на активах компаний ОАО «Газпром», ОАО «Роснефть», ОАО «Аэрофлот», ОАО «Сбербанк», ОАО «Газпромнефть», ОАО «Сургутнефтегаз», ОАО «Ростелеком», и результат получился разочаровывающий: вероятность угадывания динамики

составила, как правило, менее 50%.

Для рассмотренных компаний, на данных временных промежутках построены GARCH-модели, Multifractal GARCH-модели ($q=1$; $p=1$; $m=1$, $n=100$, $\mu=0,9$ (отдаем приоритетность прогноза динамики волатильности)) методом (5), учитывающим важность направления изменения динамики волатильности, и МНК. Пример GARCH-модели, Multifractal GARCH-модели, построенных на временном промежутке с 1 сентября 2009 г. по 1 февраля 2010 г., представлены в табл. 3, табл. 4. Прогноз дневной волатильности по построенным моделям осуществлялся на следующие 100 наблюдений. Качественные результаты прогноза дневной волатильности, средние вероятности прогнозирования динамики дневной волатильности, на период с января 2007 г. по июнь 2010 г. представлены в табл. 5, на период с декабря 2002 г. по март 2006 г. представлены в табл. 6.

Таблица 1
Результаты применения модели The Markov-Switching Multifractal (MSM)
для прогнозирования волатильности акций ОАО «Газпром»

k	\hat{m}_0	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma}_{\bar{k}}$	\hat{b}	Вероятность прогнозирования динамики волатильности
1	0,7973	1,5703	0,421300	-	49%
2	0,3703	0,6538	1,000001	1,0100	58%
3	0,9819	1,0083	0,473581	1,3736	33%
4	1,0865	0,4871	0,588405	1,0100	36%
5	1,1308	1,3527	0,900627	1,0725	29%
6	0,8350	1,6468	0,985847	1,0100	53%
7	0,9434	1,7310	0,655701	1,0100	30%
8	1,1485	1,5819	0,725943	1,0100	38%
9	0,9265	1,1892	0,820697	1,0100	43%
10	0,8881	1,0000	0,999956	1,0100	39%

Таблица 2
Результаты применения модели "The Markov-Switching Multifractal" (MSM)
для прогнозирования волатильности акций ОАО «Роснефть»

k	\hat{m}_0	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma}_{\bar{k}}$	\hat{b}	Вероятность прогнозирования динамики волатильности
1	0,9649	0,4546	0,751200	-	54%
2	0,2354	0,2419	0,602196	2,0100	47%
3	0,7261	0,2500	0,825567	1,0100	49%
4	0,9245	0,4696	0,883998	1,0100	45%
5	0,8156	0,1262	0,821506	1,0725	49%
6	1,0010	0,7476	1,105413	1,4151	45%
7	1,0010	0,2193	0,965346	1,0100	41%
8	0,7577	0,1597	0,936573	1,0725	40%
9	1,1782	0,3968	0,902128	1,0100	51%
10	0,8868	0,3109	0,711114	1,0100	41%

Таблица 3
GARCH-модели прогнозирования волатильности, полученные методом (5)

Наименование компании	Модели прогнозирования волатильности
ОАО "Газпром"	$\sigma_t^2 = 2,1509 + 0,0079\varepsilon_{t-1}^2 - 0,4948\sigma_{t-1}^2$
ОАО "Роснефть"	$\sigma_t^2 = 0,4686 + 0,004\varepsilon_{t-1}^2 - 0,29\sigma_{t-1}^2$
ОАО "Аэрофлот"	$\sigma_t^2 = 0,9076 - 0,0497\varepsilon_{t-1}^2 - 0,4702\sigma_{t-1}^2$
ОАО "Сбербанк"	$\sigma_t^2 = 0,4686 + 0,004\varepsilon_{t-1}^2 - 0,3002\sigma_{t-1}^2$

Таблица 4
Multifractal GARCH - модели прогнозирования волатильности,
полученные методом (5)

Наименование компании	Модели прогнозирования волатильности
ОАО "Газпром"	$\sigma_t^2 = 1,97 + 0,0083\varepsilon_{t-1}^2 - 0,4938\sigma_{t-1}^2 - 0,1014\tilde{\sigma}_{t-1}^2$
ОАО "Роснефть"	$\sigma_t^2 = 1,0989 + 0,0193\varepsilon_{t-1}^2 - 1,777\sigma_{t-1}^2 + 3,0522\tilde{\sigma}_{t-1}^2$
ОАО "Аэрофлот"	$\sigma_t^2 = 0,4235 + 0,0076\varepsilon_{t-1}^2 - 0,408\sigma_{t-1}^2 - 0,1255\tilde{\sigma}_{t-1}^2$
ОАО "Сбербанк"	$\sigma_t^2 = 0,6899 + 0,0019\varepsilon_{t-1}^2 - 0,4774\sigma_{t-1}^2 + 0,1522\tilde{\sigma}_{t-1}^2$

Таблица 5
Средние вероятности прогнозирования динамики дневной волатильности
на период с января 2007г. по июнь 2010 г.

Наименование компании	GARCH Model		Multifractal GARCH Model	
	МНК	Метод (4)	МНК	Метод (4)
ОАО "Газпром"	43%	63%	47%	67%
ОАО "Роснефть"	36%	58%	40%	63%
ОАО "Аэрофлот"	48%	64%	48%	67%
ОАО "Сбербанк"	46%	61%	49%	63%

Таблица 6
Средние вероятности прогнозирования динамики дневной волатильности
на период с декабря 2002 г. по март 2006 г.

Наименование компании	GARCH Model		Multifractal GARCH Model	
	МНК	Метод (5)	МНК	Метод (5)
ОАО "Газпромнефть"	45%	59%	45%	60%
ОАО "Сургутнефтегаз"	42%	61%	42%	63%
ОАО "Ростелеком"	38%	59%	40%	60%
ОАО "Аэрофлот"	50%	63%	48%	66%

Из табл. 5, табл. 6 видно, что с наибольшей вероятностью спрогнозировать динамику дневной волатильности удастся, используя Multifractal GARCH-модель и метод (4), учитывающий важность направления изменения динамики волатильности.

Полученные результаты подтверждают эффективность применения метода (4), учитывающего важность направления изменения волатильности, по сравнению с обычным МНК. Следует отметить, что применение теории мультифракталов для прогнозирования величины и тенденции (роста или спада) волатильности позволило увеличить точность прогнозирования для принятия рационального инвестиционного решения в условиях риска и нестабильности на рынках финансовых активов.

Список источников

1. Давнис В.В. Адаптивные модели: анализ и прогноз в экономических системах [текст] / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2006. – 380 с.
2. Каширина, И.Л. Введение в эволюционное моделирование: Учебное пособие [текст] / И.Л. Каширина. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2006. – 38 с.
3. Матвеев, Д.А. Сравнение GARCH-моделей с различными распределениями для моделирования волатильности финансовых индексов [текст] / Д.А. Матвеев. – Челябинск: Южно-Уральский государственный университет, 2009.
4. Нагин, А.А. Адаптивные модели в задачах анализа и прогнозирования стоимости финансовых активов: Дис. канд. эк. наук [текст] / А.А. Нагин. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2006. – 163 с.
5. Bollerslev, T. Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity [текст] / T. Bollerslev // Journal of Econometrics. – №31. – 1986. – Pp 307-327.
6. Calvet, L. Multifractal Volatility [текст] / L. Calvet, A. Fisher. – Yale University, 2007.
7. Drake, Adrian E. Genetic Algorithms in Economics and Finance [текст] / Adrian E. Drake, Robert E. Marks // Forecasting Stock Market Prices and Foreign Exchange. – Australia, Sydney: University of Stuttgart, University of New South Wales, 2006.
8. Engle, R.F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation [текст] / R.F. Engle // Econometrica. – №50. – 1982. – pp. 987-1007.
9. Engle, R.F. Measuring and testing the impact of news on volatility [текст] / R.F. Engle, V.K. Ng // Journal of Finance. – 1993. – Pp 1749 – 1778.
10. Knight John. Forecasting Volatility in the Financial Markets [текст] / J. Knight, S. Satchell - 2007.

MULTIFRACTAL APPROACH TO PROGNOSTICS OF VOLUME AND DYNAMICS OF THE VOLATILITY IN UNSTABLE TIMES ON MARKETS OF FINANCIAL ASSETS

Yanovskiy Leonid Petrovich,

Dr. Sc. of Economy, Professor of the Chair of Economy of AIC of Voronezh State University; Leonidya60@yandex.ru

Lebedyanskaya Elena Anatolievna,

Post-graduate student of Institute of Management, Marketing and Finances; leblen@mail.ru,

The article considers volatility models, constructed with use multifractals theories. The Method which takes into account importance of volatility change direction and allows to predict not only the volatility size, but its dynamics (growth or fall), realized in the development framework of MATLAB, has been offered for a finding of model parameters. Efficiency of the proposed method, application of multifractals theory for construction of volatility models has been proved by the use of the data of seven companies stock value since 2002 on 2010.

Keywords: volatility, multifractals, volatility models, genetic algorithms, financial assets.