УДК 330.322(075.8)

ОЦЕНКА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ КАК ВОЗМУЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Гасилов Валентин Васильевич,
доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой экономики строительства Воронежского государственного архитектурно-строительного университета; V_Gasilov@mail.ru
Околелова Элла Юрьевна,
доктор экономических наук, профессор кафедры экономики строительства Воронежского государственного архитектурно-строительного университета; Ella_ok16@mail.ru

Статья посвящена описанию инвестиционного процесса как динамической системы. Рассмотрен потенциал рыночной ситуации как экономический результат поведения инвестиционного объекта. Определен асимптотический ряд для точного решения задачи.

Ключевые слова: инвестиционный проект, факторы рынка, динамические системы, возмущенные уравнения, асимптотический ряд.

Экономическая оценка инвестиционных проектов, как и любая другая задача прогнозирования поведения реального объекта во времени, опирается на оценку рисков, т.е. наступлением неблагоприятных событий. В данном случае задача определяется не только негативным влиянием факторов, но и учетом повышающих эффектов. Следовательно, можно рассматривать поведение рынка с точки зрения потенциала ситуации, который может вызвать как негативный, так и позитивный результат.

Потенциалом рыночной ситуации будем называть экономический результат поведения инвестиционного объекта во времени в зависимости от совокупного воздействия факторов.

Потенциал ситуации может являться результатом воздействия разного рода позитивных и негативных факторов, оставаясь при этом незначительным в силу высокой энтропии внешних воздействий, оказывающих противоположно направленные действия. В этом заключается задача исследования инвестиционного проекта с точки зрения его устойчивости (или чувствительности).

Инвестиционный процесс представляет собой экономическую задачу определения зависимости величины накопленного дохода от цены продукции и времени совершения сделки. График функции аппроксимируется параболой с областью определения t на множестве положительных чисел.

Теория гладких динамических систем в значительной мере связана с качественной теорией дифференциальных уравнений, в особенности, когда вопрос стоит о локальном или глобальном изучении свойств конкретных систем, описываемых дифференциальными уравнениями, таких как положение равновесия, типы траекторий для потоков и их аналогий для каскадов, квазипериодических траекторий и инвариантных многообразий и т.п.

Динамические системы определяются несколькими процессами и различными временными масштабами. Экономические системы как нельзя более подходят под это определение. При описании таких процессов используются дифференциальные уравнения, в которых малый параметр μ стоит при производной высшего порядка. Это сингулярно возмущенные уравнения [3].

Рассмотрим начальную задачу для дифференциального уравнения

$$\mu \frac{dx}{dt} = F(x,t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x\Big|_{t=t_0} = x_0 , \tag{2}$$

где μ – малый параметр. При μ=0 и при условии регулярного возмущения задача приближается к решению невозмущенной задачи. В данном случае в условиях сингулярно возмущенной задачи при μ=0 имеем систему алгебраических соотношений

$$F(x,t) = 0, \tag{3}$$

$$x\Big|_{t=t_0} = x_0 . \tag{4}$$

Эта система может оказаться несовместной. Если (3) имеет решение $x=\varphi(x)$, то оно может не удовлетворять начальному условию (4). Таким образом, если для некоторого решения $\varphi(x)$ уравнения (3) $\varphi(t_0)=x_0$, то решения возмущенной и невозмущенной задачи совпадают. Если это соотношение не выполнено ни для одного решения уравнения (3), то в точке $t=t_0$ при любом $\mu\neq 0$ решение невозмущенной задачи не аппроксимирует решение возмущенной. Следовательно, в этом случае в окрестности начальной точки аппроксимации нет. Она возникает при достаточно больших t [1, 3].

Запишем систему уравнений, описывающих поведение динамической системы, в которой малый параметр μ является множителем при производной только в первом уравнении:

$$\mu \dot{z} = F(z,y,t),$$
$$\dot{y} = f(z,y,t), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

с начальным условием $z(0)=z_0$, $y(0)=y_0$. Предположив μ=0, придем к невозмущенной системе

$$0 = F(\bar{z},\bar{y},t), \quad \dot{\bar{y}} = f(\bar{z},\bar{y},t), \tag{6}$$

для которой достаточно задать одно начальное условие $\overline{y}(0)=y_0$.

Для решения воспользуемся теоремой А.Н. Тихонова и сформулируем три условия [2].

1. Пусть уравнение $F(\overline{z},\overline{y},t)=0$ имеет изолированный корень относительно $\overline{z}$: $\overline{z}=\varphi(\overline{y},t)$, $(\overline{y},t)\in D$, где D – некоторая область, а задача $\dot{\overline{y}}=f(\varphi(\overline{y},t),\overline{y},t)$, $\overline{y}(0)=y_0$ имеет единственное решение на отрезке $[0,\mathrm{T}]$, соответствующее этому корню.

Наглядно корень $z=\varphi(y,t)$ можно представить как некоторую поверхность в пространстве *(y, z, t)*, на которой функция F равна нулю (рис. 1).

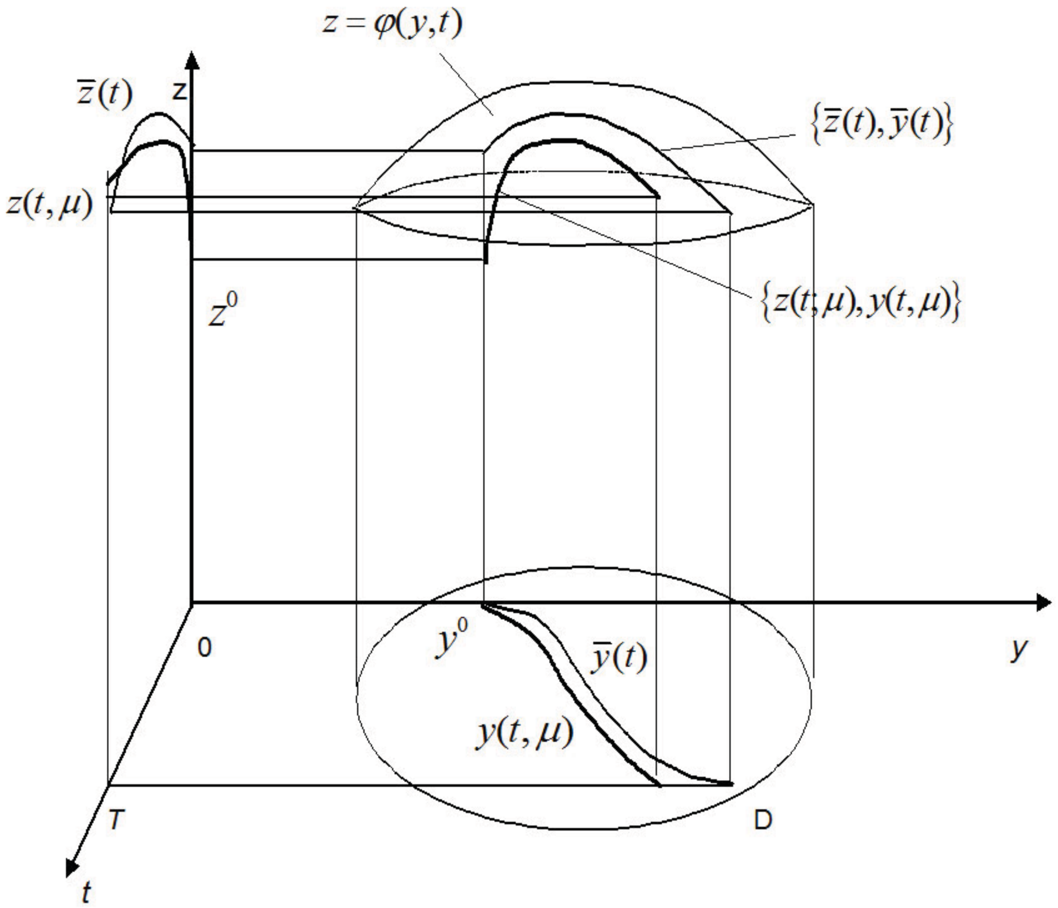

Рис. 1. Точное и приближенное решение сингулярно возмущенной задачи.

Рассмотрим так называемую присоединенную систему уравнений. Обозначим через $\tau=t/\mu$ «медленное время», тогда (5) с начальными условиями примет вид

$$z'_\tau=F(z,y,\tau\mu);\qquad y'_\tau=\mu f(z,y,\tau\mu). \tag{7}$$

При малых μ правая часть (7) мала, и скорость изменения y по отношению к «медленному» времени будет иметь порядок $O(\mu)$. Следовательно, $y=y0+O(\mu)$ при $0\le\tau\le\tau_0$. Тогда

$$z'_\tau = F(z, y_0 + O(\mu), \tau\mu) \qquad (8)$$

есть регулярное возмущение по отношению к

$$z'_\tau = F(z, y_0, O). \qquad (9)$$

Предполагается, что при малых μ решения (8) и (9) будут близки. Соотношение

$$\tilde{z}'_\tau = F(\tilde{z}, y, t) \qquad (10)$$

является присоединенным уравнением. В силу условия (1) $\tilde{z} = \varphi(y,t)$ есть решение уравнения (8). Оно не зависит от τ и обращает правую часть в ноль. Это решение является точкой покоя.

2. Пусть точка покоя присоединенного уравнения является асимптотически устойчивой по Ляпунову при $\tau\to\infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что если $\left|\tilde{z}(0) - \varphi(y,t)\right| < \delta$, то выполняются условия

$$\left|\tilde{z}(0) - \varphi(y,t)\right| < \varepsilon \quad \forall\tau > 0, \qquad (11)$$

$$\tilde{z}(\tau) \to \varphi(y,t),\ \tau \to \infty \qquad (12)$$

При начальных параметрах $y=y_0$, $t=0$ присоединенное уравнение примет вид

$$\tilde{z}'_\tau = F(\tilde{z}, y_0, 0) \qquad (13)$$

с начальным условием $z(0)=z_0$, т.е. значением исходного начального условия (6).

3. Пусть решение $\tilde{z}(\tau)$ уравнения (13) стремится к точке покоя $\varphi(y_0, 0)$ при $\tau \to \infty$. Считается, что в этом случае значение z_0 принадлежит области влияния точки покоя.

На основании теоремы А.Н. Тихонова [1] можно утверждать, что при выполнении условий 1-3 и при достаточно малых μ задача (5) имеет единственное решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$. Для этого решения справедливы предельные равенства:

$$\lim_{\mu\to 0} y(t,\mu) = \overline{y}(t), \qquad 0 \le t \le T$$

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \overline{z}(t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Таким образом, $\overline{y}(t)$ является асимптотическим приближением для $y(t, \mu)$ на отрезке $[0; T]$, а $\overline{z}(t)$ - асимптотическим приближением для $z(t, \mu)$ на отрезке $[\delta; T]$, $\delta>0$.

Следовательно, для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений существует и единственное решение исходной сингулярно возмущенной задачи. Это создает условия построения приближенного асимптотического решения, как решения исходной системы при малом параметре.

Решения более высокой точности могут быть найдены с помощью асимптотического ряда. В широком смысле теория возмущений есть совокупность методов разложения в ряд Тейлора по какому-нибудь малому параметру. Ряд Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки t_0 есть:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n \text{ . (14)}$$

Этот ряд есть разложение по параметру (t-t_0). Если этот параметр мал (т.е. отклонение t от t_0 невелико), то каждый член ряда мал по сравнению с предыдущим, и для вычисления $f(t)$ можно ограничиться небольшим количеством членов ряда.

Рассмотрим решение уравнения для функции накопленного инвестиционного дохода.

$$\ln d \cdot S' = -\frac{S \ln d}{2t} + \frac{S}{4t^2}, \tag{15}$$

где S – функция аккумулируемого дохода. Введем обозначения: μ=ln d, a=0,5. Тогда уравнение (15) примет вид:

$$\mu \frac{dS(t, \mu)}{dt} = -aS(t, \mu) + S(t), \ S(0, \mu) = 0 \ . \tag{16}$$
$$a > 0, \ \mu > 0, \ 1 \le t \le T$$

Функция $f(t)$ бесконечно дифференцируема. Необходимо пояснить границы выбранного интервала t∈[1; T]. В условиях экономической постановки задачи нас интересует начальный момент времени $t_0=1$, т.е. та начальная точка отсчета, когда инвестор может ожидать поступления первого платежа в результате реализации инвестиционного проекта.

Если искать решение задачи (16) в виде ряда по степеням параметра μ, то формальное решение имеет вид

$$S(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k S_k(t), \quad S_k(t) = (-1)^k \frac{f^{(k)}(t)}{a^{k+1}}. \tag{17}$$

Так как для n-ой частичной суммы ряда (17) начальное условие не удовлетворяется с точностью до некоторого $O(\mu^{n+1})$, то ряд (17) не является асимптотическим рядом для решения. Нужно изменить этот ряд так, чтобы он стал асимптотическим.

Задача (16) имеет точное решение

$$S(t, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_{t_0}^{t} f(t) e^{-a(t-t_0)/\mu} dt \tag{18}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$S(t,\mu) = \frac{1}{a} \int_{t_0}^{t} f(t) de^{-a(t-t_0)/\mu} = \frac{1}{a} f(t) e^{-a(t-t_0)/\mu} \Big|_{t_0}^{t} - \frac{1}{a} \int_{t_0}^{t} f'(t) e^{-a(t-t_0)/\mu} dt =$$
$$= \frac{f(t)}{a} - \frac{f(t_0)}{a} e^{-at/\mu} - \frac{\mu}{a^2} \int_{t_0}^{t} f'(t) de^{-a(t-t_0)/\mu} \tag{19}$$

Интегрируя по частям n раз, получаем

$$S(t,\mu)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\mu^k}{a^{k+1}}\left(f^{(k)}(t)-f^{(k)}(t_0)e^{-at/\mu}\right)+(-1)^n\frac{\mu^n}{a^{n+1}}\int_{t_0}^{t}f^{(n+1)}(t)e^{-a(t-t_0)/\mu}dt \quad (20)$$

Запишем уравнение (20) в виде

$$S(t,\mu)=\sum_{k=0}^{n}\mu^k\left(x_k(t)-\Pi_k(\tau)\right)+r_n(t,\tau) \quad (21)$$

$$\tau=t/\mu,\ \ x_k(t)=(-1)^k\frac{f^{(k)}(t)}{a^{k+1}},\ \ \Pi_k(\tau)=(-1)^k\frac{f^{(k)}(1)}{a^{k+1}}e^{-a\tau}$$

$$r_n(t,\tau,\mu)=(-1)^n\frac{\mu^n}{a^{n+1}}\int_{1}^{t}f^{(n+1)}(t)e^{-a(t-t_0)/\mu}d\tau$$

Пусть $C_n=\max\limits_{t\in[1,T]}\left|f^{(n)}(t)\right|$

Оценивая остаток при $t\in[1;\ T]$, получаем

$$\left|r_n(t,\tau,\mu)\right|\le\frac{\mu^nC_n}{a^{n+1}}\int_{t_0}^{T}e^{-a(t-t_0)/\mu}dt\le\frac{C_n\mu^{n+1}}{a^{n+2}}\left(1-e^{-aT}\right)\le\frac{C_n\mu^{n+1}}{a^{n+2}}. \quad (22)$$

Переменная t - быстрое время, а переменная $\tau=t/\mu$ - медленное время, функции $\Pi_k(\tau)$ - погранслойные функции. Эта оценка доказывает, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\left(S_k(t)-\Pi_k(\tau)\right) \quad (23)$$

является асимптотическим рядом для точного решения.

При малых значениях параметра μ учет погранслойных функций существенен только в достаточно малой окрестности границы $t=0$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mu^kS_k(t)$ называют регулярной частью асимптотики, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi_k(\tau)$ - погранслойной частью асимптотики. Регулярная часть является асимптотическим рядом для точного решения на любом отрезке $[\delta,T],\delta>0$, но не на всем отрезке $[1;T]$.

Будем искать решение задачи (16) в виде суммы

$$S(t,\tau,\mu)=\xi(t,\mu)+\Pi(\tau,\mu)=t/\mu \quad (24)$$

Подставляя (24) в (16), получаем

$$\mu\frac{d\xi(t,\mu)}{dt}+\frac{d\Pi(\tau,\mu)}{d\tau}=-a\xi(t,\mu)-a\Pi(\tau,\mu)+f(t),\ \xi(0,\mu)=0 \quad (25)$$

$$a>0,\ \mu>0,\ 1\le t\le T$$

или

$$\mu\frac{d\xi(t,\mu)}{dt}+a\xi(t,\mu)-f(t)=-\frac{d\Pi(\tau,\mu)}{d\tau}-a\Pi(\tau,\mu),\ \xi(0,\mu)=0 \quad (26)$$

$$a>0,\ \mu>0,\ 1\le t\le T$$

Считаем t и τ независимыми переменными. Поэтому без ограничения получим

$$\mu\frac{d\xi(t,\mu)}{dt}+a\xi(t,\mu)-f(t)=0,\ \frac{d\Pi(\tau,\mu)}{d\tau}+a\Pi(\tau,\mu)\,. \quad (27)$$

$$\Pi(0,\mu)=-\xi(0,\mu)$$

Будем искать решение в виде рядов

$$\xi(t,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k x_k(t),\ \Pi(\tau,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi_k(\tau,\mu) \quad (28)$$

Подставляя эти ряды в уравнение (25), получаем

$$\begin{aligned} &x_0(t)=\frac{1}{a}S(t),\ \frac{d\Pi_0(\tau)}{dt}+a\Pi_0(\tau)=0,\ \Pi_0(0)=-x_0(0),\\ &x_k(t)=\frac{1}{a^{k+1}}S^{(k)}(t),\ \frac{d\Pi_k(\tau)}{dt}+a\Pi_k(\tau)=0,\ \Pi_k(0)=-x_k(0). \end{aligned} \quad (29)$$

Решая последовательно эти уравнения, получим асимптотический ряд. Асимптотический ряд может быть полезен при вычислении значений функции при малых или больших значениях параметра [2].

Рассмотрены малые параметры возмущения. Это справедливо для функции накопления доходов, которая отражает процесс накопления средств от реализации инвестиционного проекта и не подвержена резким скачкообразным изменениям. В условиях относительно стабильной экономики малый возмущающий параметр более точно отражает реальные условия. Кроме того, в силу принципа суперпозиции воздействия экономических факторов, резкие скачки в части конечной реализации проекта вряд ли возможны.

Для более точного описания динамической инвестиционной системы необходимо исследовать функцию поступления доходов, которая не имеет явно выраженной зависимости и носит случайный характер. В этом случае возможны как малые (при достаточно стабильных экономических условиях), так и большие параметры возмущений.

Список источников

1. Петров, А.А. Экономические модели [текст] / А.А. Петров, И.Г. Поспелов // Серия «Экономическая кибернетика». — М.: Знание, 1979.

2. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977.

3. Филатов, А.Н. Теория устойчивости [текст] / А.Н. Филатов. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 220 с.

4. Чуличков, А.И. Методы решения некорректных задач [текст] / А.И. Чуличков, А.Н. Тихонов, В.Н. Арсенин. – М.: Наука, 1979.

5. Чуличков, А.И. Математические модели нелинейной динамики [текст] / А.И. Чуличков. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 296 с.

6. Шаповалов В.И. Модель устойчивости экономической системы смешанного типа [текст] / В.И. Шаповалов // Синергетика и проблемы теории управления / под ред. А.А. Колесникова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – С. 447 – 453.

EVALUATION OF INVESTMENT PROJECTS AS A PERTURBATION DYNAMIC SYSTEMS

Gasilov Valentin Vasilyevich,
Dr. Sc. of Economy, professor, Chief of the Chair of Construction Economics of Voronezh State Architectural-Construction University;
V_Gasilov@mail.ru
Okolelova Ella Yuryevna,
Dr. Sc. of Economy, professor of the Chair of Construction Economics of Voronezh State Architectural-Construction University;
Ella_ok16@mail.ru

The article describes the investment process as a dynamic system. The potential of the market situation as a result of the economic behavior of the investment object. Defined asymptotic series for the exact solution of the problem.
Keywords: investment project, market factors, dynamical systems perturbed equation, asymptotic series.