УДК 336.71

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОММЕРЧЕСКИХ БАНКОВ

Давнис Валерий Владимирович,
доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета;
vdavnis@mail.ru
Мнацаканян Шушаник Вардановна,
аспирант кафедры финансов и кредита Воронежского государственного университета; Shushanik87@mail.ru

Рассматривается возможность построения многомерных моделей анализа финансовой устойчивости банка. Предлагается для этого использовать идею, которая реализуется для анализа стабильности в многомерных конечно-разностных уравнениях. Показано, что в практических расчетах для оценки стабильности можно применять эконометрические системы регрессионных уравнений.
Ключевые слова: многомерное конечно-разностное уравнение, финансовая стабильность, рекурсивная система, модель финансовой устойчивости.

При исследовании финансовой устойчивости банков, как правило, дело приходится иметь не только с отдельными процессами, описывающими финансовое состояние, но и с целыми комплексами таких процессов, которые, взаимодействуя, оказывают друг на друга определенное влияние. В результате такого взаимодействия появляются смешанные динамические эффекты, которые, накладываясь на чистые, значительно усложняют характер поведения исследуемой системы. В подобной ситуации получить адекватную модель, состоящую из одного уравнения или системы не связанных между собой уравнений в принципе невозможно. В связи с этим возникает необходимость в построении моделей, представляющих собой систему взаимосвязанных уравнений. Построение таких систем хотя и обычная, но довольно сложная практика эконометрического моделирования.

Эффективным инструментом для исследования стабильности одномерных экономических процессов является аппарат конечно-разностных уравнений [1]. Поэтому, естественно, для исследования стабильности многомерных процессов использовать матричный аналог конечно-разностных уравнений.

Неоднородное конечно-разностное матричное уравнение первого порядка записывается следующим образом:

$$P_t = AP_{t-1} + b\,, \tag{1}$$

где $P_t = (P_{1t}, P_{2t}, \dots, P_{nt})'$ – вектор-столбец размера n, с компонентами, равными значению показателей, характеризующих в момент времени t (незапаздывающие эндогенные переменные) финансовое состояние банка;

$P_{t-1} = (P_{1t-1}, P_{2t-1}, \dots, P_{nt-1})'$ – вектор-столбец размера n, с компонентами, равными значению показателей, характеризующих финансовое состояние банке в прошлом, т.е. в момент времени t-1 (запаздывающие эндогенные переменные);

$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)'$ – вектор-столбец значений, учитывающих постоянную составляющую в эффектах, воздествующих на текущее финансовое состояние банка;

$A = \|a_{ij}\|$ – квадратная матрица размера $n\times n$, отражающая структуру влияния запаздывающей эндогенной переменной на динамику показателей, характеризующих

Введем обозначения:

$P*$ – вектор, значения компонент которого характеризуют устойчивое (равновесное) финансовое состояние банка;

u_t – вектор отклонений текущего финансового состояния от устойчивого, представляющий сбой разность между соответствующими финансовыми показателями, т.е. $u_t = P_t - P^*$.

Тогда уравнение (1) по аналогии с тем, как это делается для скалярного неоднородного конечно-разностного уравнения [1], можно записать в виде

$$P_t = P^* + Au_{t-1}\,, \tag{2}$$

где

$$P^* = (I - A)^{-1} b\,. \tag{3}$$

Записанное выражение интерпретируется как возможность представления текущего финансового состояния в виде равновесного состояния и некоторого отклонения от равновесного состояния.

Представление $P*$ в виде (3) получается как особое решение матричного конечно-разностного неоднородного уравнения в предположении, что банком достигнуто состояние финансового равновесия, т.е. рассматривается случай, когда уравнение (1) имеет вид

$$P^* = AP^* + b\,. \tag{4}$$

Выражение (2) позволяет провести анализ стабильности финансового состояния банка. Смысл этого анализа в том, чтобы выяснить условия при которых вектор текущего финансового состояния P_t сходится к вектору равновесного финансового состояния $P*$. Как нетрудно понять эта сходимость зависит от свойств матрицы A. Действительно, если выражение (2) расписать по всему исследуемому периоду, т.е. представить в виде

$$u_t = Au_{t-1} = A^2 u_{t-2} = \ldots = A^t u_0, \tag{5}$$

то очевидным образом из $A^t u_0 \to 0$ при $t \to \infty$ будет следовать, что $P_t \to P^*$. Сходимость последовательности (5), как нетрудно понять, зависит от собственных значений матрицы A, которыми являются корни детерминантного уравнения

$$|A - \lambda I| = 0. \tag{6}$$

Используя известные правила вычисления определителя матрицы, это уравнение можно записать в виде многочлена от λ степени n

$$(-1)^n [\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n p_n] = 0. \tag{7}$$

Многочлен (7) принято называть характеристическим уравнением, а его корни, т.е. числа, для которых выполняется равенство, называются характеристическими корнями или собственными значениями матрицы A.

С каждым характеристическим корнем λ_j связан характеристический вектор, который будем обозначать $g_j = (g_{1j}, g_{2j}, \ldots, g_{nj})'$. Для каждого характеристического вектора выполняется соотношение

$$Ag_j = \lambda_j g_j, \tag{8}$$

которое для наших целей удобно записать в виде

$$(A - \lambda I)g_j = 0. \tag{9}$$

Векторное уравнение (9) представляет собой систему однородных линейных уравнений и имеет решение, отличное от нулевого, только в том случае, если матрица $A - \lambda I$ вырождена, т.е. ее определитель $|A - \lambda I|$ равен нулю.

Обозначая через G матрицу, столбцы которой $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ являются собственными векторами матрицы A, а через D_λ диагональную матрицу с элементами на главной диагонали, равными характеристическим корням λ_j этой же матрицы, можно в соответствии с (8) записать

$$AG = GD_\lambda. \tag{10}$$

Исключая из рассмотрения случай многократных корней, для которых матрица G вырождена, умножим матричное равенство (10) слева на G^{-1}. После перемножения получаем представление матрицы A в следующем виде:

$$A = GD_\lambda G^{-1}. \tag{11}$$

Полученное представление позволяет исследовать условия сходимости степеней матрицы к нулевой матрице. Используя это представление, можно записать выражение для квадрата матрицы

$$A^2 = (GD_\lambda G^{-1})(GD_\lambda G^{-1}) = GD_\lambda^2 G^{-1} \tag{12}$$

и по аналогии для матрицы любой степени t

$$A^t = GD_\lambda^t G^{-1}, \tag{13}$$

где D_λ^t – диагональная матрица с элементами на главной диагонали, равными степеням λ_j^t характеристических корней.

Подставив (12) в (5), получаем удобное для анализа сходимости представление вектора отклонений от равновесия

$$u_t = GD_\lambda^t G^{-1} u_0. \tag{14}$$

В соответствии с полученным представлением вектор отклонений u_t может стремиться к нулевому вектору при $t \to \infty$ только в единственном случае, когда диагональная матрица D_λ стремится к нулевой матрице [2]. А это возможно, если среди характеристических корней нет таких, абсолютная величина которых превосходит единицу.

Таким образом, если все характеристические корни матрицы A по абсолютной величине не превосходят единицу, то в динамике моделируемых финансовых показателей доминирует стабильное поведение, которое характеризуется стремлением всех этих показателей к значениям равновесного состояния P^*. Если хотя бы один характеристический корень по абсолютной величине превосходит единицу, то в динамике финансовых показателей наблюдается тенденция нарушающая сходимость к равновесному состоянию.

Задача нахождения собственных значений произвольной матрицы достаточно сложна, но разрешима. Подробные ответы практически на все вопросы, связанные с решением этой задачи, можно найти в [3, 4]. Нас при исследовании стабильности будет интересовать только частичная проблема собственных значений, т.к. в соответствии с условиями, обеспечивающими сходимость к равновесному состоянию, достаточно оценить значение максимального по абсолютной величине характеристического корня. Для этих целей удобными являются некоторые варианты степенного метода (см., например, [5, с. 367-369]).

Из изложенного становятся понятны основные идеи и принципы теории моделирования финансовой устойчивости банка. Но практические аспекты этой теории требуют решения специальных вопросов, которые в основном связаны с проблемой формирования матрицы A и которые, на наш взгляд, можно решать в рамках эконометрического подхода. Если рассматривать выражение (1) как многомерную авторегрессионную модель, то возникает вопрос оценивания параметров этой модели. Оценивание параметров многомерной авторегрессии довольно сложная задача, детали решения которой излагаются только для случая, когда матрица A имеет размеры 2×2. Этого явно недостаточно, чтобы провести исследование финансовой устойчивости банка.

Рассмотрим еще одну эконометрическую модель, которую можно применить для анализа финансовой стабильности банка и которая представляет собой систему взаимосвязанных уравнений. Самой простой эконометрической моделью из нескольких одновременных уравнений, которые можно легко преобразовать в векторное конечно-разностное уравнение первого порядка (1), является рекурсивная система [6]. Впервые модель в виде рекурсивной системы была разработана Тинбергеном в 1937 году при построении модели экономики Голландии. Возьмем принцип построения таких моделей за основу и рассмотрим рекурсивную систему, уравнения которой отражают одновременную взаимозависимость между показателями, характеризующими финансовую устойчивость банка. Из всего многообразия показателей, отражающих финансовое состояние банка, для построения модели выберем четыре основных:

P_{1t} – достаточность капитала, оценивающая размер капитала банка с точки зрения его достаточности для защиты интересов вкладчиков в момент времени t;

P_{2t} – качество активов, оценивающих в момент времени t возможность обеспечения возврата активов, а также воздействие проблемных кредитов на общее финансовое положение банка;

P_{3t} – уровень рентабельности банка в момент времени t, показывающий достаточность его доходов для расширения банковской деятельности;

P_{4t} – уровень ликвидности банка в момент времени t с точки зрения ее достаточности для выполнения как обычных, так и непредусмотренных обязательств.

В число моделируемых показателей не включен менеджмент, который относится к основным показателям, характеризующим финансовую устойчивость банка, но в котором, на наш взгляд, доминирует субъективная составляющая и поэтому корректность его статистической обработки сомнительна.

Для выбранных показателей запишем рекурсивную систему из четырех уравнений, описывающих цепочку предполагаемых зависимостей

$$\begin{aligned}
P_{1t} &= b_{11}P_{1t-1} + b_{10},\\
P_{2t} &= b_{21}P_{1t} + b_{22}P_{2t-1} + b_{20},\\
P_{3t} &= b_{31}P_{1t} + b_{32}P_{2t} + b_{33}P_{3t-1} + b_{30},\\
P_{4t} &= b_{41}P_{1t} + b_{42}P_{2t} + b_{43}P_{3t} + b_{44}P_{4t-1} + b_{40}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Перенеся эндогенные переменные в правую часть, запишем эту систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -b_{31} & b_{32} & 1 & 0 \\ -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1t} \\ P_{2t} \\ P_{3t} \\ P_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1t-1} \\ P_{2t-1} \\ P_{3t-1} \\ P_{4t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{10} \\ b_{20} \\ b_{30} \\ b_{40} \end{pmatrix}.$$

При условии, что матрица, стоящая слева, имеет обратную, умножим правую и левую части данной системы на эту обратную и получим, предварительно переобозначив полученные результаты произведения, знакомую нам векторную форму конечно-разностного уравнения первого порядка

$$\begin{pmatrix} P_{1t} \\ P_{2t} \\ P_{3t} \\ P_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} & a_{31} \\ a_{41} & a_{41} & a_{41} & a_{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1t-1} \\ P_{2t-1} \\ P_{3t-1} \\ P_{4t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{40} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матрица построенной таким образом системы конечно-разностных уравнений может быть использована для исследования стабильности финансовой системы банка.

Приведем результаты вычислительного эксперимента, в котором использовались финансовые показатели АрдшинИнвест Банка. Каждое уравнение оценивалось по МНК с использованием расчетных данных, полученных по предшествующим уравнениям. Кроме того, расчеты предусматривали введение специальной дихотомической переменной, с помощью которой данные о финансовой устойчивости были разделены на те, которые демонстрировали высокий уровень финансовой деятельности, и те, которые соответствовали низкому уровню финансовой деятельности. В целом введение такой переменной повысило уровень адекватности каждого уравнения рекурсивной системы, но оставило без изменений матрицу этой системы, по максимальному собственному которой оценивается стабильность финансовой системы банка.

Рекурсивная система финансовых показателей АрдшинИнвест Банка выглядит следующим образом:

$$P_{1t} = 10052 P_{1t-1} - 0{,}6809 \text{ ,}$$

$$P_{2t} = 0{,}7186 P_{1t} + 0{,}8111 P_{2t} - 2{,}0515 \text{ ,}$$

$$P_{3t} = -0{,}4700 P_{1t} + 0{,}0770 P_{2t} + 0{,}4840 P_{3t-1} + 7{,}0030 \text{ ,}$$

$$P_{4t} = 0{,}1574 P_{1t} + 1{,}1191 P_{4t-1} - 3{,}2622 \text{ .}$$

Все уравнения рекурсивной системы адекватны, и их коэффициенты статистически значимы. Это гарантирует надежность получаемых результатов анализа стабильности финансового состояния банка.

В результате несложных преобразований из построенной системы получается многомерное конечно-разностное уравнение следующего вида:

$$\begin{pmatrix} P_{1t} \\ P_{2t} \\ P_{3t} \\ P_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}0052 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5828 & 0{,}8111 & 0 & 0 \\ -0{,}2007 & 0{,}0373 & 0{,}4840 & 0 \\ 0{,}1762 & 0 & 0 & 1{,}1191 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1t-1} \\ P_{2t-1} \\ P_{3t-1} \\ P_{4t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}6809 \\ -2{,}5408 \\ 7{,}1273 \\ -3{,}3693 \end{pmatrix}$$

Теперь исследование стабильности сводится к оценке абсолютной величины наибольшего собственного значения матрицы конечно-разностной системы. Для этих целей можно использовать степенной метод, который упоминался выше. Будем использовать вариант степенного метода с ускоренной сходимостью, в котором используются исходная и транспонированная матрицы. Величина наибольшего собственного значения в этом методе оценивается как отношение скалярных произведений

$$\lambda_1 = \frac{(AY_{k-1}, Z_k)}{(Y_{k-1}, Z_k)} \text{ ,} \qquad (17)$$

где Y_{k-1} нормированная итерация $A^{k-1}Y_0$, полученная с помощью исходной матрицы A, а Z_k – нормированная итерация $A'^k Z_0$, полученная с помощью транспонированной матрицы A'. В качестве начальных значений собственных векторов Y_0 и Z_0 обычно используется вектор с единичными компонентами. Вычислительный процесс прекращается как только результаты двух соседних итераций отличаются на величину, не превосходящую заданную точность.

Результаты расчетов показали, что максимальное собственное значение превосходит единицу ($\lambda_1 = 1{,}12$) и, следовательно, финансовое состояние АрдшинИнвест Банка следует считать неустойчивым. Полученный результат следует понимать как наличие в траектории финансового развития банка бифуркационной точки, прохождение которой не исключает возможность попадания на траекторию банкротства.

Список источников

1. Давнис, В.В. Адаптивные модели: анализ и прогноз в экономических системах [текст] / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2006. – 380 с.

2. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика [текст] / Л. Коллатц. – М.: Мир, 1969. – 444 с.

3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Пер. с англ. [текст] / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 367 с.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц [текст] / Ф.Р. Гатмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

5. Фаддеев Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры [текст] / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддева. – М.: Физматгиз, 1960. – 656 с.

6. Розанов Г.В. Проблемы статистического моделирования развития отрасли [текст] / Г.В. Розанов, А.А. Френкель // Статистический анализ экономических временных рядов и прогнозирование. – М.: Наука, 1973.

MODEL BUILDING OF FINANCIAL FIXITY OF COMMERCIAL BANKS

Davnis Valeriy Vladimirovich,
Dr. Sc. of Economy, Professor, Chief of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University; vdavnis@mail.ru
Mnatsakanyan Shushanik Vardanovna,
Post-graduated student of the Chair of Finances and Credit of Voronezh State University; Shushanik87@mail.ru

The possibility of constructing multivariate models of analysis of financial stability of the bank is considered. It is proposed to use the idea, which is implemented to analyze the stability of the multi-dimensional finite-difference equations. It is shown that in practical calculations to assess the stability of the system can be applied econometric regression equations.
Keywords: multidimensional finite and different equation, financial stability, recursive system, model of financial stability.