УДК 336.763.3

О ВАРИАЦИОННОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛЯМ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Хацкевич Владимир Львович,
доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Всероссийского заочного финансово-экономического института (филиал ВЗФЭИ в г. Воронеже); okp.voronezh@vsfei.ru
Хацкевич Максим Владимирович,
магистрант экономического факультета Ворогнежского государственного университета; okp.voronezh@vsfei.ru

В работе рассматриваются непрерывные по времени динамические аналоги моделей Марковица и Тобина об оптимизации портфеля ценных бумаг за конечный период времени, использующие интегральный критерий эффективности портфеля. Основное внимание уделено задаче максимизации доходности портфеля при ограниченном риске. В силу специфики задачи, применяемый вариационный подход позволяет получить результаты во многом аналогичные классическому стационарному случаю, в частности, выписать формулы для решений в явном виде. Некоторые результаты оказываются новыми и для классических задач Марковица и Тобина.

Ключевые слова: портфель ценных бумаг, модель Марковица, модель Тобина, вариационный подход.

1. Рассмотрим нестационарные модификации моделей Марковица [1] и Тобина [2] на конечном промежутке времени $[0,\mathrm{T}]$, основанные на вариационном подходе. Сразу отметим, что несмотря на значительное количество литературы по финансовым моделям с непрерывным временем [3] предлагаемая нами методика является, по-видимому, новой. Результаты настоящей работы носят теоретический характер, однако, приведенные формулы могут служить ориентирами для практических инвесторов.

Итак, пусть имеется n видов ценных бумаг, из которых инвестор в любой момент времени $t \in [0,T]$ может сформировать портфель. Эти бумаги предположим характеризуются эффективностями (доходностями) $R_1(\mathrm{t}), \mathrm{R}_2(\mathrm{t}), \ldots, \mathrm{R}_\mathrm{n}(\mathrm{t})$, которые являются случайными величинами с известными математическими ожиданиями $m_i(\mathrm{t})$ $(i=1,\ldots,n)$ и известной ковариационной матрицей $V_{ij}(\mathrm{t}) = cov(\mathrm{R_i}(\mathrm{t}), \mathrm{R_j}(\mathrm{t}))$ $(i, j=1,\ldots,n)$. Если инвестор распределил свой капитал долями $x_i(\mathrm{t})\left(0 \le \mathrm{x_i} \le 1, \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{x_i}(\mathrm{t}) = 1\right)$

в разные ценные бумаги, то эффективность сформированного портфеля $R_p(t)=\sum_{i=1}^{n} x_i(t)R_i(t)$ имеет при $\forall\, t\in[0,T]$ следующие математическое ожидание $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)m_i(t)$ и дисперсию $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij}(t)x_i(t)x_j(t)$ ([4], [5] в стационарном случае).

Поставим вариационную задачу (типа Блэка) об отыскании портфеля ценных бумаг максимальной интегральной эффективности: найти распределение долей капитала $x_i(t)$, максимизирующих ожидаемую доходность портфеля за период $[0,T]$

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{n} x_i(t)m_i(t)dt \to max \tag{1}$$

при условиях ограниченности риска

$$\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}(t)x_i(t)x_j(t)=r_p^2(t)\ \ (\forall t\in[0,T]) \tag{2}$$

и полноты долей

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t)=1\ \ (\forall t\in[0,T])\,. \tag{3}$$

Отметим, что в качестве неизвестных заранее функций $m_i(t)$ и $V_{ij}(t)$ можно использовать прогнозные значения, либо применять оценки $\underline{m_i}\le m_i(t)\le \overline{m_i}$ и $\underline{V_{ij}}\le V_{ij}(t)\le \overline{V_{ij}}$. Решая задачу (1)-(3) для верхних или нижних границ найдем оценки $\underline{x_i}\le x_i(t)\le \overline{x_i}$.

Функция Лагранжа для задачи (1)-(3) задается формулой

$$L(t,x_i(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t))=\sum_{i=1}^{n} x_i(t)m_i(t)+\lambda_1(t)\left(1-\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\right)+\lambda_2(t)\left(r_p^2-\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}x_i(t)x_j(t)\right),$$

где λ_1, λ_2 - множители Лагранжа. Соответствующие уравнения Эйлера

$$L_{x_i}-\frac{d}{dt}L_{x_i'}=0\ \ (i=1,\dots,n)$$

имеют вид

$$m_i(t)-\lambda_1(t)-\lambda_2(t)\sum_{j=1}^{n} V_{ij}(t)x_j(t)=0\quad (i=1,\dots,n). \tag{4}$$

При этом на функции $x_i(t)$ не накладываются никакие краевые условия, поскольку подынтегральная функция максимизируемого интеграла не содержит производных от $x_i(t)$([6]).

Отметим, что система необходимых условий экстремума (2) – (4) при каждом $t\in[0,T]$ совпадает с системой Марковица для стационарной задачи об оптимальной эффективности портфеля ценных бумаг.

Пусть $X(t)=(x_i(t))$ и $M(t)=(m_i(t))$ – векторы-столбцы долей $x_i(t)$ и ожидаемых эффективностей $m_i(t)$ $(i=1,\dots,n)$; $V(t)=(V_{ij}(t))$ – матрица ковариаций доходностей ценных бумаг; I – n-мерный вектор-столбец, компоненты которого равны 1. Тогда система (2)-(4) примет вид

$$(V(t)X(t),X(t))=r_p^2(t)\ \ (\forall t\in[0,T]), \tag{5}$$

$$(X(t),I)=1\ \ (\forall t\in[0,T])\,, \tag{6}$$

$$M(t)-\lambda_1(t)I-\lambda_2(t)V(t)X(t)=0 \quad (\forall t\in[0,T]), \qquad (7)$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение в эвклидовом пространстве R^n. Ниже для краткости аргумент t будем опускать.

Из (7) следует, что $VX=\frac{1}{\lambda_2}M-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}I$.

Предположим, что $det\ V(t)\neq 0$ при каждом $t\in[0,T]$. В этом случае при $\forall t\in[0,T]$ существует обратная матрица $V^{-1}(t)$ и решение системы (4) равно

$$X^*=\frac{1}{\lambda_2}V^{-1}M-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}V^{-1}I. \qquad (8)$$

На основании (8) и в силу (5) и (6) множители Лагранжа $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ при $\forall t\in[0,T]$ определяются соотношениями

$$\lambda_2=b-c\lambda_1,\ a-2b\lambda_1+c\lambda_1^2=r_p^2\lambda_2^2. \qquad (9)$$

В (9) $a=(M,V^{-1}M)$, $b=(M,V^{-1}I)$, $c=(I,V^{-1}I)$. Из (9) следует, что $\lambda_2^2=(ac-b^2)/(cr_p^2-1)$.

Формулы (8), (9) характеризуют структуру долей портфеля ценных бумаг максимальной эффективности при каждом $t\in[0,T]$.

Заметим, что в случае положительной определенности ковариационной матрицы V выполнено условие

$$ac=\left\|V^{-\frac{1}{2}}M\right\|\left\|V^{-\frac{1}{2}}I\right\|\geq\left|\left(V^{-\frac{1}{2}}M,V^{-\frac{1}{2}}I\right)\right|\geq\left(V^{-\frac{1}{2}}M,V^{-\frac{1}{2}}I\right)=b.$$

Поэтому необходимым и достаточным условием разрешимости поставленной вариационной задачи (1) – (3) является условие $cr_p^2\geq 1$.

Это же утверждение сохраняет силу и для классической постановки задачи Блэка о портфеле максимальной доходности. Нам оно раньше не встречалось.

Приведем другую постановку задачи оптимизации критерия (1) при условиях (3), где вместо (2) рассмотрим интегральное ограничение

$$\int_0^T\sum_{i,j=1}^{n}V_{ij}(t)x_i(t)x_j(t)dt=r_p^2. \qquad (10)$$

Функция Лагранжа задачи (1), (3), (10) имеет вид

$$L=\sum_{i-1}^{n}x_i(t)m_i(t)+\lambda_1(t)\left(1-\sum_{i-1}^{n}x_i(t)\right)+\lambda_2(t)\left(z'(t)-\sum_{i,j=1}^{n}V_{ij}x_i(t)x_j(t)\right).$$

Здесь $z(t)=\int_0^t\sum_{i,j=1}^{n}V_{ij}(s)x_i(s)x_j(s)ds$, а $z'(t)$ – производная.

Система необходимых условий экстремума в этом случае включает уравнение (3), систему уравнений Эйлера (4), соотношение (10), а также условие независимости множителя Лагранжа λ_2 от t, полученное из условия $L_z-\frac{d}{dt}L_{z'}=0$.

Таким образом, аналогично предыдущему справедливо равенство (8). Поэтому из (3) следует $\lambda_2 = \mathrm{b} - \mathrm{c}\lambda_1$, а из (10) вытекает

$$\int_0^T \left[a - 2b\lambda_1 + c\lambda_1^2\right]dt = r_p^2 \lambda_2^2 \ .$$

Откуда $\lambda_2^2 = \alpha / \left(r_p^2 - \beta\right)$, где $\alpha = \int_0^T \left(a - b^2/c\right)dt$, $\beta = \int_0^T (1/c)dt$.

Следовательно, решение задачи (1), (3), (10) дается формулой (8) с определенными выше для этого случая коэффициентами λ_1 и λ_2 .

2. При наличии на рынке безрисковых ценных бумаг приведем аналог модели Тобина. В этом случае задача формирования портфеля максимальной интегральной эффективности в векторно-матричной форме такова:

$$\int_0^T (\mathrm{x}_0(\mathrm{t})\,\mathrm{m}_0 + (\mathrm{X}(\mathrm{t}), \mathrm{M}(\mathrm{t})))\mathrm{dt} \to max\,, \tag{11}$$

$$(\mathrm{V}(\mathrm{t})X(\mathrm{t}), \mathrm{X}(\mathrm{t})) = \mathrm{r}_\mathrm{p}^2(\mathrm{t}), \quad (\forall \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}]) \tag{12}$$

$$\mathrm{x}_0 + (\mathrm{I}, \mathrm{X}(\mathrm{t})) = 1 \quad (\forall \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}]). \tag{13}$$

Здесь m_0 - эффективность безрисковых бумаг, а x_0 - доля капитала, в них вложенного.

Для нахождения условного максимума составим функцию Лагранжа:

$$\mathrm{L} = \mathrm{x}_0(\mathrm{t})\mathrm{m}_0 + (\mathrm{X}(\mathrm{t}), \mathrm{M}(\mathrm{t})) + \lambda_1(\mathrm{t})\left[1 - \mathrm{x}_0(\mathrm{t}) - (\mathrm{X}(\mathrm{t}), \mathrm{I})\right] + \lambda_2\left[\mathrm{r}_\mathrm{p}^2(\mathrm{t}) - (\mathrm{V}(\mathrm{t})\mathrm{X}(\mathrm{t}), \mathrm{X}(\mathrm{t}))\right].$$

Уравнения Эйлера задачи (11) - (13) имеют вид (4) и дополнительно выполнено уравнение $\mathrm{m}_0 - \lambda_1 = 0$, полученное из условия $\mathrm{L}'_{\mathrm{x}_0} = 0$. Из последнего уравнения видим, что λ_1 не зависит от переменной t, $\lambda_1 = \mathrm{m}_0$. Подставляя это в выражение (8), получим

$$\mathrm{X} = \frac{1}{\lambda_2}\mathrm{V}^{-1}(\mathrm{M} - \mathrm{m}_0\mathrm{I}). \tag{14}$$

Для нахождения λ_2 подставим найденное X в (12). Тогда

$$\frac{1}{\lambda_2^2}((\mathrm{M} - \mathrm{m}_0\mathrm{I}), \mathrm{V}^{-1}(\mathrm{M} - \mathrm{m}_0\mathrm{I})) = \mathrm{r}_\mathrm{p}^2.$$

Отсюда находим λ_2^2. Поэтому из (14) окончательно выводим формулу для оптимальных долей ценных бумаг для любого $t \in [0,T]$.

$$\mathrm{X}^* = \frac{\mathrm{r}_\mathrm{p}}{(\mathrm{V}^{-1}(\mathrm{M} - \mathrm{m}_0\mathrm{I}), \mathrm{M} - \mathrm{m}_0\mathrm{I})^{\frac{1}{2}}}\mathrm{V}^{-1}(\mathrm{M} - \mathrm{m}_0\mathrm{I}). \tag{15}$$

Формула (15) аналогична известной (см. [4]) формуле для задачи Тобина формирования портфеля максимальной эффективности. Она показывает, что при любом $t \in [0,T]$ структура рисковой части оптимального в этом смысле портфеля, как и в стационарном случае не зависит от ограничений на величину риска.

Отметим, что в случае задачи Тобина положительной определенности матрицы ковариации V достаточно для разрешимости соответствующей вариационной задачи и не требуется никаких дополнительных ограничений.

Для вариационной задачи (11) - (13) аналогично классической задаче Тобина (см.[4]) сохраняется свойство линейной зависимости (при любом $t \in [0,T]$) эффективности портфеля максимальной эффективности от риска:

$$x_0^{*} m_0 + (M, X^*) = m_0 + d r_p, \tag{16}$$

где через d обозначен знаменатель дроби в формуле (15).

Продемонстрируем теперь полезность понятия β- коэффициента для рассматриваемой модели. Как известно ([5], §8.3) Бета – вклад i-той ценной бумаги в оптимальный портфель определяется формулой

$$\beta_i^* = \frac{cov(R_i, R_p^*)}{(\sigma_p^*)^2}.$$

Здесь R_i – эффективность i-той ценной бумаги, $R_p^* = r_0 x_0^* + \sum_{i=1}^{n} R_i x_i^*$ – эффективность оптимального портфеля и $\sigma_p^* = (VX^*, X^*)$ – риск оптимального портфеля.

Согласно определению имеем (см. [5])

$$\beta^* = \frac{VX^*}{(\sigma_p^*)^2}, \tag{17}$$

где β^* - вектор с компонентами $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_n^*$. Из этой формулы в случае задачи минимизации риска при заданной эффективности, делается вывод, что премия за риск конкретной ценной бумаги, включенной в оптимальный портфель пропорциональна премии за риск портфеля в целом.

В нашем случае, т.е. в случае задачи оптимизации эффективности (либо интегральной эффективности) портфеля при заданном риске из формулы (17) и формулы (15) следует, что премия за риск конкретной ценной бумаги, включенной в оптимальный портфель пропорциональна риску оптимального портфеля.

Действительно, в нашем случае согласно (12) $(\sigma_p^*)^2 = r_p^2$, а в силу (15) $VX^* = \frac{r_p}{d}(M - m_0 I)$. Тогда на основании (16) $\beta^* = \frac{1}{d r_p}(M - m_0 I)$. Следовательно, $m_i - m_0 = \beta_i^* d r_p \quad (i = 1, \ldots, n)$. Стоящая слева в этой формуле величина называется премией за риск ценной бумаги.

Кроме того, согласно (16)

$$m_i - m_0 = \beta_i^* \left[x_0^* m_0 + (M, X^*) - m_0\right].$$

Таким образом, справедлив тот же вывод, что и в случае задачи минимизации риска при заданной эффективности.

Сформулированное выше утверждение, как нам кажется, ранее не встречалось, даже для соответствующих классических задач.

Рассмотрим случай оптимизации (11) при выполнении интегрального ограничения (10) вместо (12). Тогда функция Лагранжа задачи (11), (10), (13) имеет вид

$$L = x_0(t)m_0 + (M(t), X(t)) + \lambda_1(t)[1 - x_0(t) - (X(t), I)] + \lambda_2(t)[z'(t) - (V(t)X(t)X(t)],$$

где $z(t) = \int_0^t (V(s)X(s), X(s))ds$.

Необходимые условия экстремума этой задачи в векторно-матричной форме, аналогично предыдущему, содержат соотношения (13) и (10) в виде

$$\int_0^T (V(t)X(t), X(t))dt = r_p^2. \quad (18)$$

А также уравнение Эйлера в виде (7), соотношение $m_0 = \lambda_1$ и равенство $\frac{d}{dt}L_{z'} = 0$, которое означает независимость λ_2 от t.

Таким образом, как и в случае задачи (11)-(13) X выражается формулой (14). После подстановки этого X в (18) с учетом независимости λ_2 от t получим

$$\frac{1}{\lambda_2^2}\int_0^T (M - m_0 I, V^{-1}(M - m_0 I))dt = r_p^2.$$

Обозначая интеграл, стоящий в левой части этого неравенства, через d_c^2, получим оптимальное распределение долей рискового капитала задачи (11), (10), (13) в виде

$$X^* = \frac{r_p}{d_c} V^{-1}(M - m_0 I).$$

В заключении отметим, что мы остановились в основном на рассмотрении задачи максимизации интегральной эффективности портфеля ценных бумаг при ограничении риска. Аналогичные результаты справедливы и в задаче минимизации интегрального риска портфеля при заданной эффективности.

Список источников

1. Markowitz, H.M. Portfolio Selection [текст] / H.M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – №1. – p. 77 – 91.

2. Tobin, J. The Theory of Portfolio Selection [текст] / J. Tobin // Theory of Interest Rates. – London: MacMillan, 1965. – p. 3 – 51.

3. Merton Robert, C. Continuous – Time Finance [текст] / C. Merton Robert. – Oxford, U.K., 1990.

4. Малыхин, В.И. Финансовая математика [текст] / В.И. Малыхин. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999.

5. Колемаев, В.А. Математическая экономика [текст] / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

6. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [текст] / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969.

ABOUT THE VARIATION APPROACH TO MODELS OF THE PORTFOLIO INVESTMENT

Khatskevich Vladimir Lvovich,
Ph. D. of Technical Science, Professor of the Chsir of Higher Mathematics of All-russian Correspondence Financial and Economical Institute (Voronezh filial branch); okp.voronezh@vsfei.ru
Khatskevich Maksim Vladimirovich,
Candidate for a Master's Degree of Economic Faculty of Voronezh State University; okp.voronezh@vsfei.ru

We consider permanent dynamic analog models of Markowitz and Tobin about optimizing portfolio of assets for a period of time, using an integral criterion for the effectiveness of the portfolio. Special attention was paid on the objective of maximizing portfolio returns with limited risk. Owing to the nature of the problem, used a variational approach allows us to obtain results in many respects similar to the classical stationary case, in particular, write down the formula for the solutions explicitly. Some results are new even for classical problems of Markowitz and Tobin.
Keywords: portfolio of assets, Markowitz'es model, Tobin's model, variational approach.