УДК 336.763.1

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ

Федосеев Александр Михайлович,
аспирант кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; amf_@bk.ru
Коротких Вячеслав Владимирович,
магистр кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; v.v.korotkikh@gmail.com

В статье проведен анализ развития математического аппарата, используемого при решении вопросов ценообразования опционов. Главный результат работы заключается в обобщении новейших исследований в сфере оценки стоимости опционов, основанных на применении эконометрических методов, обуславливающем не только корректность при формальном описании реальности финансового рынка, но и его адекватность.
Ключевые слова: опцион, модель Блека – Шоулса – Мертона, биномиальная модель, риск-нейтральная оценка стоимости, эконометрическая модель B,S-рынка, риск-трендовая оценка стоимости, модель распределенной волатильности, риск-предикторная оценка.

На сегодняшний день модель Блека – Шоулса – Мертона, отмеченная нобелевской премией, и модель Кокса – Росса – Рубинштейна стали своего рода классическими в вопросах опционного ценообразования.

Модели стали логическим завершением целого комплекса исследований, начало которым положил еще Л. Башелье, предположивший, что динамика базисного актива может быть формально описана через арифметическое броуновское движение. Л. Башелье заключил, что при нулевой процентной ставке стоимость опциона call на бездивидентную акцию имеет вид:

$$C(S,T)=S\Phi\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right)-X\Phi\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\sigma\sqrt{T}\phi\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad (1)$$

где S – курс акции; X – цена исполнения опциона; σ – среднеквадратическое отклонение непосредственно курса акции; T – срок исполнения опциона; $\Phi(\cdot)$ – функция стандартного нормального распределения; $\phi(\cdot)$ – плотность стандартного нормального распределения.

Несмотря на очевидный новаторский характер идеи Л. Башелье, она имела определенные проблемы, касающиеся ее корректности, например, допущение о нормальном распределении моделируемой случайной величины. Эти проблемы не были решены ни К. Спренклом в 1961 г., ни Боннесом в 1964 г., ни П. Самуэльсоном в 1967 г. Только в 1973 г. Ф. Блек, М. Шоулси, Р. Мертон предложили миру первую математически корректную модель оценки стоимости опционов. Единственным параметром, подлежащим оценке, оставалась волатильность цены базиса σ . Согласно Ф. Блэку, М. Шоулсу и Р. Мертону, стоимость опциона покупателя $C(S,T)$ с ценой исполнения Хопределяется по формуле:

$$C(S,T) = S\Phi(d_1) - X\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi(d_2)\ , \qquad (2)$$

где $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{X}\right) + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$; $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$; r – безрисковая ставка.

Традиционно выделяют ряд преимуществ модели Блэка – Шоулса – Мертона по сравнению с ее предшественниками. Во-первых, это высокая степень соответствия реальностям финансового рынка, достигаемая путем учета реально наблюдаемых параметров (цены базового актива, волатильности базисного актива, безрисковой процентной ставки, срок исполнения опциона, цены исполнения). Во-вторых, стоимость опциона определяется единственной для всех сторон сделки. В-третьих, расчеты по модели относительно просты, хотя и требуют лишь оценки волатильности базисного актива.

Сегодня модель Блэка – Шоулса – Мертона носит как аналитический характер, раскрывая связи и зависимости факторов стоимости опционов, так и вычислительный, определяя стоимость опционов. Модель неоднократно подвергалась эмпирической проверке, расширялась область ее применения,в том числе и за счет адаптации задачам смежных дисциплин.

В 1979 г. Дж. Кокс, С. Росс и М. Рубинштейн сформулировали свое видение проблемы, результатом которого стала биномиальная модель. Если модель Блэка – Шоулса – Мертона основывается на математическом постулате стохастической аппроксимации, то модель Кокса – Росса – Рубинштейна исходит из постулата биномиального распределения, т.е. распределения суммы случайных величин, каждая из которых принимает одно из двух значений с противоположными вероятностями.

В основе построения модели лежит упрощенное описание рыночного механизма: за каждый достаточно короткий промежуток времени цена базиса может перейти из исходного состояния в одно из двух возможных состояний.

Все процессы протекают на рынке двух активов (B,S-рынок).Цена рискового актива определена как случайная величина, что позволяет говорить о ее эконометрическом моделировании. Банковский депозит, реализующий возможность безрискового заимствования и кредитования по ставке r, имеет детерминированную динамику. Экзогенные параметры постоянны на всем периоде жизни опциона. Для опциона покупателя модель имеет вид:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^T} \frac{T!}{i!(T-i)!} p^i (1-p)^{T-i} C_T^{(i)} \ ; \quad (3)$$

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d}, \quad (4)$$

где p – псевдовероятность роста цены базиса; r – безрисковая ставка; u, d – мультипликативное движение цены актива при направлении вверх и вниз соответственно; $C_T^{(i)}$–цена базиса в момент исполнения, если она росла i раз.

Стоимость опциона, получаемая в случае применения одной из двух выше рассмотренных моделей считается риск-нейтральной, но чаще о ней говорят как о справедливой. Именно термин «справедливая», отражая основную идею моделей, сделал их практически неуязвимыми к критике. Лишь в ряде редких случаев инвесторы смогли бы выступить с аргументированной критикой справедливой цены, несмотря на то, что никто по справедливой цене не продает опционы и не покупает.

Инвесторы в своей практической деятельности не ориентируются на риск-нейтральную оценку, хотя ее и называют справедливой ценой. Риск-нейтральное оценивание предполагает, что в модели (B,S)-рынка вероятностное распределение скачкообразного изменения цены базисного актива таково, что математическое ожидание цены совпадает с траекторией, соответствующей росту цены по безрисковой ставке $E(S_t \mid S_{t-1}) = rS_{t-1}$.

Цель риск-нейтральной оценки определение биржей теоретической цены, разделяющей спрос и предложение на опционы. Так, например, на бирже РТС используется классическая формула Блека – Шоулса – Мертона (2). Но оценкой волатильности,согласно формуле с семью дополнительными настраиваемыми параметрами (x,s,a,b,c,d,e), можно манипулировать:

$$\sigma = f(x,s,a,b,c,d,e) = a + b\left(1 - e^{-cy^2}\right) + d\,\frac{arctg\left(ey\right)}{e}, \quad (5)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{T}} \ln\left(\frac{X}{S}\right), \quad (6)$$

$$y = x - s \ . \quad (7)$$

В связи с такого рода модификацией целесообразно говорит скорее о равновесной цене, нежели риск-нейтральной.

Корректность и внутренняя непротиворечивость моделей достигается исключительно в рамках строгих предположений, ограничивающих область их применения. К самим моделям, конечно, апеллировать нет смысла, математически они корректны. Однако невозможно полностью согласиться с мыслью, будто строгие предположения классиков всегда точно отражают реальную действительность финансового рынка, но не грубо аппроксимируют ее. Основные ограничения, в рамках которых строятся эти модели, связаны с понятием полного рынка.Полнота рынка, суть широкий спектр производных инструментов, соответствует идеальной модели развитой финансовой системы. Их разнообразие обеспечивает реальность запланированных финансовых потоков. Реальность же такова, что рынок не является полным.Инструменты либо отсутствуют, либо недостаточны для охвата всех факторов неопределенности. В этой связи разработка моделей, которые могут корректно применяться в условиях неполных рынков, является актуальным исследованием и востребована современной теорией хеджирования.

Грамотное обоснование инвестиционных решений напрямую зависит от адекватности моделирования рыночной динамики.На наш взгляд,аналогом риск-нейтральных оценок в реальной действительности финансового рынкавполне могут стать прогнозные оценки, получаемые с помощью многовариантного описания упреждающей динамики базисного актива. К тому же полученные оценки тестируются на адекватность с помощью статистических методов, что, несомненно, повышает доверие инвесторов к ним, а такжеполученные оценки будут однозначно интерпретироваться всеми участниками рынка.

В настоящее время комплексные исследования кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета, проводимых под научным руководством профессора В.В. Давниса и профессора В.И. Тиняковой, внесли существенный вклад в развитие теории опционного ценообразования.

В частности, в исследовании П.В. Суркова разработан аппарат эконометрического моделирования динамики цен на биномиальном рынке, обеспечивающий высокий уровень адекватности принимаемых решений по риск-нейтральной оценке стоимости опционов. Функционирование рыночного механизмаформально описывается с помощью эконометрической модели двухуровневого процесса эволюции цен:

$$S_t = a_0 + a_1 S_{t-1} + d\, x_t + \delta_t, \tag{8}$$

где S_t – стоимость актива в t-й момент времени; δ_t – случайная составляющая, характеризующая ту часть вариации моделируемого показателя, которая не объясняется в рамках данной модели; a_0, a_1, d – параметры модели;

$$x_t = \begin{cases} 1, & \textit{в случае высокого уровня цены} \\ -1, & \textit{в случае низкого уровня цены} \end{cases}.$$

Модель строится по финансовым временным рядам с искусственно созданной памятью, что позволят обеспечить высокий уровень адекватности. Сама же модель содержит адаптивный механизм, что повышает экстраполяционную точность процессов, отражающих скачки в динамике доходности финансовых активов.

Предлагаемый эконометрический вариант CRR-модели с логистическим распределением вероятностей имеет вид:

$$S_t = a_0 + a_1 S_{t-1} + d\,x_t + \delta_t; \qquad (9)$$

$$x_t = \begin{cases} 1, \\ -1; \end{cases} \quad \mathrm{P}(x_t = 1 \mid z_t) = \frac{\mathrm{e}^{b_0 + b_1 z_t}}{1 + \mathrm{e}^{b_0 + b_1 z_t}}, \qquad (10)$$

где z_t – обобщенная субъективно-аналитическая оценка.

В качестве альтернативы CRR-модели в работе предложена методика определения прогнозной стоимости опциона на основе мультитрендовых прогнозных расчетов и вероятностной оценки их реальности. Ее основное назначение – получение дополнительной информации о возможных ситуациях, с которыми инвестор может столкнуться в будущем. Реализация подхода ориентирована на использование прогнозных оценок, получаемых через комбинированную модель, формальная запись которой имеет вид:

$$\mathrm{P}(S_{t+1} = \hat{S}^k_{t+1}) = \mathrm{P}^k_{t+1}; \qquad (11)$$

$$\hat{S}^k_{t+1} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 S_t + \hat{a}_2 S_{t-1} + \cdots + \hat{a}_m S_{t-m+1} + \mathrm{f}^k \hat{\mathrm{d}}; \qquad (12)$$

$$\mathrm{P}^k_{t+1} = \frac{\exp(\mathbf{z}_{t+1}\hat{\mathbf{b}}^k)}{1 + \sum_{k=0}^{K} \exp(\mathbf{z}_{t+1}\hat{\mathbf{b}}^k)}, \qquad (13)$$

где $\hat{S}^k_{t+1}$ – k-й вариант прогнозной оценки стоимости актива; S_t – запаздывающие значения зависимой переменной; $\hat{a}_j$ – оценка j-го коэффициента регрессии; P^k – вероятность реальности k-го варианта прогнозной оценки стоимости актива; f^k – вектор значений, которые в k-м варианте приняли фиктивные переменные; $\hat{\mathbf{d}}$ – вектор коэффициентов при фиктивных переменных; $\hat{\mathbf{b}}^k$ – оценка вектора параметров логит-модели множественного выбора k-го варианта; $\mathbf{z}_{t+1}$ – вектор значений экспертно-аналитической оценки.

Тогда оценка стоимости опциона – математическое ожидание:

$$C_0 = \sum_{i=1}^{N} \hat{p}_i (\hat{S}_i - X), \qquad (14)$$

некоторые слагаемые которого в процессе расчетов в соответствии с правилом определения опционной премии, обращаются в ноль.

В диссертационной работе С.Ю. Богдановой, выполненной под руководством профессора В.В. Давниса, предложен новаторский подход к моделированию оценок стоимости опционов в условиях неполных рынков, основанный на использовании прогнозных оценок доходности базового актива.

Методика ориентирована на получение «риск-трендовой оценки» как альтернативе «риск-нейтральной», что позволяет инвестору повысить обоснованность принимаемых решений по выбору необходимого опциона.

Если в классических расчетах справедливой цены безрисковую ставку r заменить на риск-трендовую r_{tr}, в соответствии с которой происходит изменение тренда, то очевидно, что математическое ожидание вершин этого дерева на любом уровне будет совпадать с трендом:

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j p_{tr}^j (1-p_{tr})^{n-j} S_0 u^j d^{n-j} = r_{tr} S_{t-1}\ . \qquad (15)$$

Это значит, что в целом все дерево ориентировано вдоль тренда с ростом по риск-трендовой ставке. Риск-трендовая цена призвана удовлетворить потребность инвестора в инструменте, с которым он смог бы обосновать свои инвестиционные решения в ситуации, когда на срочном рынке торгуются опционы с разными ценами исполнения, что существенно осложняет выбор.

Распространение методики риск-трендового оценивания опционов на неполные рынки реализовано через эконометрический вариант мультиномиальной модели (B,S)-рынка. Модель обеспечивает как расчет риск-трендовых оценок на неполном рынке, так и получение взвешенной и наиболее вероятной риск-трендовой оценки.

Принципиальное различие междуриск-нейтральной и риск-трендовой оценками состоит в том, что риск-нейтральная цена представляет собой стоимость портфеля, по которому определяется стоимость хеджа в мире нейтральном к риску, а риск-трендовая цена – это стоимость портфеля, по которому определяется стоимость хеджа в изменяющемся мире.

Хронологически наиболее поздней работой в рамках рассматриваемого цикла является работа Г.Б. Суюновой и В.И. Тиняковой, в которой выполнены теоретические и прикладные исследования в области моделирования риск-предикторных оценок стоимости опционов с учетом распределенной волатильности при описании множества возможных вариантов стоимости базисных активов на упреждающем отрезке времени.

Распределенная волатильность позволяет реализовать вероятностный механизм взаимосвязи доходности финансового инструмента с активностью рынка. В простейшем случае модель, с помощью которой можно прогнозировать величину распределенной волатильности, имеет вид:

$$r_t = \mathrm{M}(r_t \mid r_{t-1}) + \sigma_t^p, \qquad (16)$$

$$d = \mathrm{M}[(r_t - \mathrm{M}(r_t \mid r_{t-1})) \cdot sign\,(r_t - \mathrm{M}(r_t \mid r_{t-1}))], \qquad (17)$$

$$\sigma_t^p = d - 2d\Lambda(\mathbf{z}_t\mathbf{b}), \qquad (18)$$

$$\Lambda(\mathbf{z}_t\mathbf{b}) = \frac{e^{b_0+b_1 z_t}}{1+e^{b_0+b_1 z_t}}, \qquad (19)$$

$$z_t = r_{It} - \mathrm{M}(r_{It} \mid r_{It-1})\ , \qquad (20)$$

где r_t – доходность базисной акции в момент t; $\mathrm{M}(r_t \mid r_{t-1})$ – условное математическое ожидание доходности; d – средняя величина абсолютного отклонения доходности от условного математического ожидания; σ_t^p – распределенная волатильность доходности базовой акции в момент t; z_t – отклонение значений индекса в момент t от условного математического ожидания; r_{It} – доходность индекса в момент t; $\mathrm{M}(r_{It} \mid r_{It-1})$ – условное математическое ожидание доходности индекса; $\Lambda(\mathbf{z}_t\mathbf{b})$ – логистическая функция распределения.

Модель позволяет оценить распределенную волатильность, когда случайная величина, принимает два значения в зависимости от активности рынка. С помощью распределенной волатильности удается получить оценку возможных потерь в каждой конкретной ситуации. Это делает распределенную волатильность особенно привлекательной для практического использования.

В добавок к этому существенным преимуществом модели является тот факт, что распределенная волатильность позволяет оценить уровень неопределенности через величину энтропии, в отличие от дисперсии и VaR, воспроизводящих средние и максимально возможные потери соответственно:

$$H_t = -\mathrm{F}(\mathbf{z}_t\hat{\mathbf{b}})\log_2 \mathrm{F}(\mathbf{z}_t\hat{\mathbf{b}}) - (1-\mathrm{F}(\mathbf{z}_t\hat{\mathbf{b}}))\log_2(1-\mathrm{F}(\mathbf{z}_t\hat{\mathbf{b}})) \,. \qquad (12)$$

Абсолютная величина распределенной волатильности и уровень неопределенности обратно пропорциональны: меньшему значению распределенной волатильности, соответствует больший уровень неопределенности.

Риск-предикторная оценка стоимости опциона, интерпретируемая как математическое ожидание прогнозных оценок внутренней стоимости опциона, более правдоподобна, чем риск-нейтральная, и поэтому является предпочтительным инструментом для инвесторов при обосновании решений. Несмотря на отличие аппарата ее формирования от используемого в модели Кокса – Росса – Рубинштейна, она обеспечивает получение ориентиров на текущую рыночную стоимость опционов, которая, в конечном счете, позволяет понять выгодность финансовой операции с опционами.

Методика риск-предикторного оценивания стоимости опционов с учетом распределенной волатильности реализуется в единстве трех составляющих: экстраполяционной (многовариантное описание динамики финансового актива на упреждающем периоде), экспертно-аналитической (формирование шкал оценки уровня активности рынка и предпочтительного варианта ожидаемой стоимости базового актива), имитационной (воссоздание многообразия возможных ситуаций упреждающего периода). Привлекательность этого подхода в том, что он не требует выполнения предположений классической теории оценки опционов, следовательно, он является более гибок в плане его прикладного использования.

Эконометрический подход в отличие от строго математического конечно обеспечивает построение моделей, при спецификации которых максимально учитываются предположения соответствующей теории, а при идентификации их параметров достигается адекватность. Нельзя однако однозначно заявить, будто в рассматриваемом контексте корректность куда более важнее адекватности, как и утверждать обратное. К тому же сделать подобного рода выводы не есть самоцель исследования. Истина заключается лишь в том, что определенная систематизация и развитие результатов комплекса научных исследований, проводимых под руководством профессоров В.В. Давниса и В.И. Тиняковой, позволяет получить эконометрический аппарат, способный стать достойным конкурентом классическому инструментарию опционного ценообразования.

Список источников

1. Cox, J. Option Pricing: A Simplified Approach [текст] / J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein // Journal of Financial Economics. – 1979. – № 7. p. 229 – 263.

2. Black, F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [текст] / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – № 81 (3). – p. 637 – 654.

3. Merton, R. Theory of Rational Option Pricing [текст] / R. Merton // Bell Journal of Economics and Management Science. – 1973. – № 4 (1).– p. 141–183.

4. Богданова, С.Ю. Моделирование риск-нейтральных и риск-трендовых оценок стоимости опционов: автореф. дис. … канд. экон. наук [текст] / С.Ю. Богданова. – Воронеж, 2010. – 24 с.

5. Сурков, П.В. Эконометрическое моделирование эволюции цен в задачах оценки опционов: автореф. дис. … канд. экон. наук [текст] / П.В. Сурков. – Воронеж, 2008. – 24 с.

6. Суюнова, Г.Б. Моделирование риск-предикторных оценок стоимости опционов с учетом распределенной волатильности: автореф. дис. … канд. экон. наук [текст] / Г.Б. Суюнова. – Воронеж, 2010. – 24 с.

7. Халл, Дж. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты [текст] / Дж. Халл. – М.: Вильямс, 2007. – 1056 с.

MODERN APPROACHES TO APPRAISAL OF OPTIONS

Fedoseev Aleksandr Mikhaylovich,
Postgraduate student of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University; amf_@bk.ru
Korotkikh Vyacheslav Vladimirovich,
Candidate for a Master's Degree of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University; v.v.korotkikh@gmail.com

Development of mathematical mechanism used to solve the problems of price formation of option is analyzed in the article. Main result of the work is synthesis of the newest research in assessing the value of options based on the application of econometric methods, causing not only the correctness of the formal description of the reality of the financial market, but its adequacy.
Keywords: option, Black – Scholes – Merton model, binomial model, risk-neutral estimation of price, econometric model of B,S-market, risk-trend estimation of price, model of distributed volatility, risk-predictor estimation.