УДК 336.763.3

ПОРТФЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ С СИММЕТРИЧНОЙ ОЦЕНКОЙ РИСКА

Борисов Алексей Николаевич,
доктор экономических наук, профессор кафедры экономики и финансов Воронежской государственной лесотехнической академии; tvi01@mail.ru;
Тимченко Ольга Викторовна,
соискатель кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; pgtushnik@mail.ru

Обсуждается новый, симметричный, измеритель риска портфельных инвестиций, который может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, которые в режиме поступреждающего тестирования демонстрировали статистически устойчивую предпочтительность модели портфельного инвестирования с симметричной оценкой риска по сравнению с другими моделями.
Ключевые слова: портфель ценных бумаг, модель Марковица, модель Шарпа, матрица взаимодействия, оценка риска.

Марковиц своей моделью, в которой риск портфеля выражался через ковариационную матрицу [1], по сути, ввел в рассмотрение интегрированный показатель риска. А его пара «риск-доходность», объяснившая природу взаимосвязи этих характеристик портфеля, практически исключила альтернативные подходы к содержательной интерпретации данного явления. Но вопросы остались. В основном, они касались адекватности, с которой модель воспроизводила реальные ситуации. Чтобы сомнений было меньше, ввели ограничивающие условия, на основе которых было сформировано понятие эффективного рынка.

В рамках гипотез эффективного рынка корректность модели Марковица не вызывала сомнений. Но все же инструментом практических решений она так и не стала. Различного рода модификации так и не смогли превратить модель упущенных возможностей в модель упреждающей действительности. Однако идеи, положенные в основу поиска более эффективных вариантов модели Марковица, на наш взгляд, продолжают оставаться актуальными.

Особый интерес в этом плане представляет собой одноиндексная модель Шарпа [2].

На формальном уровне с помощью одноиндексной модели Шарпа устанавливается взаимосвязь между доходностью активов, включаемых в портфель, и доходностью рыночного индекса:

$$r_{ti} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{ti}, \; i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где r_{ti} – доходность *i*-го актива в момент времени *t*; r_{It} – доходность рыночного индекса в момент времени *t*; α_i, β_i – оцениваемые параметры регрессионной модели; ε_{ti} – ненаблюдаемая случайная величина.

Известно, что У. Шарп предложил свою модель для того, чтобы сократить объемы вычислений, необходимых для построения модели Марковица. Но эта цель достигалась применением других принципов формирования уравнений модели. Основное отличие модели Шарпа от других в том, что в ней существенную роль играют результаты эконометрического моделирования. В то же время, на наш взгляд, возможности эконометрического моделирования использованы не до конца. Парная регрессия, на основе которой строится модель Шарпа, являясь чрезмерно упрощенным эконометрическим инструментом, оставила место для получения других модифицированных решений.

Так, вместо парной регрессии (1) в [3] для формирования условий, которым должен удовлетворять оптимальный портфель, предлагается использовать дискретно-непрерывную модель вида:

$$r_{ti} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + d_i x_{ti} + \varepsilon_{ti}, \; i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где x_{ti} – дискретная независимая переменная, формируемая специальным образом; d_i – коэффициент при дискретной переменной.

Идея предлагаемой модификации становится очевидной после рассмотрения выражения (2). Непрерывные изменения идентифицируются авторегрессионной моделью, а связь с индексом – дискретной зависимостью. Эта модификация, хотя и кажется на первый взгляд простой, однако вносит в модель радикальные изменения. Такие изменения касаются как построения регрессионного уравнения, так и формирования модели портфельного инвестирования.

Оценка коэффициентов модели (2) осуществляется обычным образом с помощью МНК после введения переменной, определяемой соотношением:

$$x_{ti} = \begin{cases} +1, & e_{ti} \ge 0; \\ -1, & e_{ti} < 0, \end{cases} \quad t = \overline{1,T}, \; i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $e_{ti} = r_{ti} - \hat{a}_{0i} - \hat{a}_{1i} r_{t-1i}$; r_{it} – доходность *i*-го актива в момент времени *t*; a_{0i}, a_{1i}, d_i – коэффициенты уравнения регрессии, описывающего динамику *i*-го актива.

Идентификацией коэффициентов построение модели (2) не завершается. Необходим механизм, обеспечивающий практическое использование этой модели для получения упреждающих оценок доходности активов. Основой построения такого механизма может служить вероятностное описание ожидаемой ситуации, которое удобно делать, например, с помощью логит-модели:

$$P_i = P(s_{ti} = 0 \mid z_{It}) = \frac{e^{b_0 + b_1 z_{It}}}{1 + e^{b_0 + b_1 z_{It}}}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

В данном случае средняя доходность упреждающего периода представима в виде прогнозной оценки с учетом усредненной величины риск-эффекта, т.е.:

$$\hat{\bar{r}}_{t+\tau i} = \hat{a}_{0i} + \hat{a}_{1i}\bar{r}_{ti} + \hat{d}_i - 2\hat{d}_i\hat{P}_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где $\hat{\bar{r}}_{t+\tau i}$ – прогнозная оценка среднего уровня доходности i-го актива; $\bar{r}_{ti}$ – средняя величина доходности, вычисленная за период, равный по величине и предшествующий упреждающему; $\hat{z}_{It+\tau}$ – экспертная оценка активности финансового рынка на упреждающем периоде длиной τ; $\hat{P}_i$ – вероятность того, что доходность i -го актива будет на низком уровне, рассчитанная с помощью логит-модели.

Усредненные характеристики доходности и риска, необходимые для построения портфеля, определяются с помощью уравнения (5). Если через $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$ обозначить вектор, характеризующий структуру портфеля, то ожидаемая доходность портфеля на упреждающем отрезке времени может быть представлена выражением:

$$\begin{aligned} r_{t+\tau m} &= w_1 r_{t+\tau 1} + w_2 r_{t+\tau 2} + \cdots + w_n r_{t+\tau n} = \\ &= w_1(\hat{a}_{01} + \hat{a}_{11}\bar{r}_{t1}) + w_2(\hat{a}_{02} + \hat{a}_{12}\bar{r}_{t2}) + \cdots + w_n(\hat{a}_{0n} + \hat{a}_{1n}\bar{r}_{tn}) + \\ &+ w_1(\hat{d}_1 - 2\hat{d}_1\hat{P}_1) + w_2(\hat{d}_2 - 2\hat{d}_2\hat{P}_2) + \cdots + w_n(\hat{d}_n - 2\hat{d}_n\hat{P}_n). \end{aligned} \tag{6}$$

В выражении (6) доходность портфеля разделена на две составляющие: доходность, гарантируемая ее трендовыми изменениями и доходность (положительная/отрицательная) за счет ожидаемых риск-эффектов. По сути, речь идет о новом, симметричном, измерителе риска, который может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Риск-эффект, порождаемый возможными ситуациями при владении портфелем из двух ценных бумаг, в матричной форме записывается следующим образом:

$$IA_p = (w_1, \quad w_2) \times \begin{pmatrix} IA(r_1 r_1) & IA(r_1 r_2) \\ IA(r_2 r_1) & IA(r_2 r_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $IA(r_1\ r_2) = d_1 + d_2 - 2d_2P_2 - 2d_1P_1 - 2(d_1 + d_2)P_0$,
$IA(r_k\ r_k) = 2d_k - 4d_kP_k, \quad (k = 1,2).$

Структура матрицы (7) позволяет сделать обобщение на портфель, в который включено более двух активов. Как нетрудно понять, принципиальное различие между матрицей взаимодействия и ковариационной матрицей становится понятным при определении их элементов (табл. 1).

Таблица 1

Взаимодействие двух активов

Варианты изменения доходности		Варианты взаимодействия	Варианты ковариации
Актив 1	Актив 2		
d_1	d_2	$d_1 + d_2$	$d_1 \cdot d_2$
	$-d_2$	$d_1 - d_2$	$d_1 \cdot (-d_2)$
$-d_1$	d_2	$-d_1 + d_2$	$(-d_1) \cdot d_2$
	$-d_2$	$-d_1 - d_2$	$-d_1 \cdot (-d_2)$
Общее число вариантов:		4	2

Если вариантам, имевшим место в прошлом, присвоить номера:

$$-d_1 - d_2 \Leftrightarrow 0, \qquad -d_1 + d_2 \Leftrightarrow 1,$$
$$d_1 - d_2 \Leftrightarrow 2, \qquad d_1 + d_2 \Leftrightarrow 3,$$

то по данным исторического периода можно для каждой пары активов оценить мультиномиальные модели:

$$P(\mathrm{x_i} = \mathrm{j}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{z_i b_j}}}{1 + \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{J}-1} \mathrm{e}^{z_i \mathrm{b_j}}}, \quad \mathrm{j} = 0,\ 1,\ 2\,; \tag{8}$$

$$P(\mathrm{x_i} = 3) = \frac{1}{1 + \sum_{\mathrm{j}=0}^{\mathrm{J}-1} \mathrm{e}^{z_i \mathrm{b_j}}} = 1 - P_0 - P_1 - P_2\ , \tag{9}$$

с помощью которых можно рассчитать вероятности, необходимые для определения элементов матрицы взаимодействия.

Сразу заметим, что вычислительные эксперименты показали, что модель с матрицей взаимодействия в режиме поступреждающего тестирования демонстрировала статистически устойчивую предпочтительность по сравнению с другими моделями. Фрагмент исходных данных (табл. 2) и основные результаты вычислительных экспериментов приведены ниже.

Таблица 2

Динамика стоимости акций и индекса РТС

Дата	Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть	Индекс РТС
01.04.2009	1305,30	127,82	21,02	2068,10	20,80	148,84	685,51
02.04.2009	1300,00	139,86	22,23	2223,40	21,01	164,64	733,93
03.04.2009	1401,20	141,13	21,85	2371,90	22,84	172,19	746,03
06.04.2009	1403,20	136,98	21,87	2322,00	24,00	167,05	748,62
07.04.2009	1409,90	132,03	21,56	2272,40	22,69	162,55	740,47
08.04.2009	1485,60	136,04	22,37	2370,30	24,05	169,59	760,58

Окончание табл. 2

Дата	Лукойл	Газпром	СургутНГ	НГМК	Сбербанк	Роснефть	Индекс РТС
09.04.2009	1641,60	146,93	22,37	2651,60	27,00	185,78	810,90
10.04.2009	1654,90	147,55	23,50	2733,00	28,00	181,42	817,41
13.04.2009	1631,10	144,95	22,40	2791,40	30,00	181,94	814,67
14.04.2009	1524,00	141,65	23,44	2678,90	27,41	174,13	807,61
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
04.12.2009	1726,00	168,59	26,85	4200,00	74,68	252,15	1427,13
07.12.2009	1692,70	166,03	26,67	4135,20	73,71	247,12	1389,64
08.12.2009	1638,20	167,04	26,63	4178,70	72,54	242,91	1353,23
09.12.2009	1608,40	167,04	26,43	4130,30	73,46	239,37	1348,92
10.12.2009	1607,10	166,14	26,63	4126,30	74,25	242,28	1351,98
11.12.2009	1602,00	166,43	26,32	4051,40	75,02	239,59	1366,36
14.12.2009	1622,10	166,91	26,30	4115,90	76,13	243,72	1381,91
15.12.2009	1648,50	172,06	26,60	4178,40	77,19	245,08	1396,32
16.12.2009	1712,80	181,41	27,82	4295,30	82,18	261,70	1449,02
17.12.2009	1652,80	177,03	27,55	4211,80	81,09	254,42	1400,91
Данные поступреждающего периода							
18.12.2009	1662,30	181,78	27,48	4175,90	81,13	256,19	1410,22
21.12.2009	1669,30	183,85	26,99	4222,20	81,20	254,41	1425,45
22.12.2009	1671,50	182,93	26,48	4182,60	81,37	253,42	1417,22
23.12.2009	1673,40	184,64	26,29	4210,60	80,81	252,71	1434,60
24.12.2009	1662,00	180,77	26,11	4130,90	81,01	248,34	1443,61
25.12.2009	1672,50	182,27	26,32	4160,90	80,91	251,23	1450,25
28.12.2009	1693,40	181,74	26,34	4202,00	80,33	256,78	1451,60
29.12.2009	1710,70	183,83	26,95	4278,70	81,08	253,59	1445,17
30.12.2009	1692,50	182,67	26,76	4275,00	82,03	250,00	1426,93
31.12.2009	1689,90	183,34	26,82	4245,70	82,52	254,66	1444,61

Матрица взаимодействия, которая была получена после дифференцирования соответствующей функции Лагранжа и рассчитана при экспертной оценке 56 баллов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1{,}9944 & 3{,}1160 & 1{,}4262 & 2{,}3193 & 1{,}8820 & 2{,}1345 & 1{,}5896 & 1 \\ 3{,}0024 & 4{,}0214 & 1{,}4262 & 3{,}5050 & 2{,}9529 & 2{,}1345 & 3{,}3243 & 1 \\ 1{,}4285 & 2{,}2443 & 0{,}8293 & 1{,}6077 & 1{,}2254 & 1{,}5384 & 1{,}1179 & 1 \\ 2{,}3051 & 3{,}5321 & 1{,}4644 & -5{,}8982 & 2{,}3364 & 2{,}4622 & -2{,}5193 & 1 \\ 1{,}9839 & 3{,}1360 & 1{,}1186 & 2{,}3787 & 1{,}8655 & 1{,}9843 & 3{,}6749 & 1 \\ 2{,}1279 & 3{,}3015 & 1{,}4673 & 2{,}4614 & 2{,}0680 & 2{,}3390 & 3{,}3733 & 1 \\ 1{,}5896 & 3{,}3243 & 1{,}1179 & -2{,}5193 & 3{,}6749 & 3{,}3733 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

С помощью этой матрицы записывается система линейных уравнений, решение которой позволяет получить структуру оптимального портфеля с риск-упреждающей оценкой доходности. Решение так сформированной системы позволяет получить портфель с риск-упреждающей оценкой доходности, которая равна $\hat{\sigma}_{IA} = 2{,}7272$. Риск-упреждающая оценка доходности оказалась ниже среднего значения риск-эффектов финансовых активов, включенных в портфель, $\hat{\bar{d}} = 2{,}7695$.

Структура построенного портфеля с риск-упреждающей оценкой доходности приведены в табл. 3. В этой же таблице для сравнения приведены другие портфели. Можно отметить, что предлагаемый портфель имеет самый высокий уровень доходности на поступреждающем периоде, а самый низкий (отрицательный) уровень доходности – портфель Марковица (табл. 4). Интересно отметить, что портфель Шарпа не имеет коротких продаж. Скорее всего, это объясняется тем, что в условиях портфеля Шарпа не учитывается взаимосвязь активов между собой.

Таблица 3

Структура построенных портфелей

Компании	Портфель Марковица	Модифицированный портфель Шарпа	Портфель Шарпа	Портфель с риск-упреждающей оценкой доходности
Лукойл	0,1389	0,9698	0,0650	5,5094
Газпром	-0,2001	0,8062	0,0194	0,0169
СургутНГ	0,3722	-0,6977	0,3156	-4,4531
НГМК	0,1562	-0,4167	0,1320	0,2712
Сбербанк	0,3878	0,1301	0,2816	-4,9412
Роснефть	0,1450	0,2083	0,1864	4,5967

Таблица 4

Доходность портфелей на поступреждающем периоде

Дата	Портфель Марковица	Модифицированный портфель Шарпа	Портфель Шарпа	Портфель с риск-упреждающей оценкой доходности
18.12.2009	-0,5689	3,4121	0,0369	7,1151
21.12.2009	-0,7205	1,9626	-0,4664	6,8806
22.12.2009	-0,7067	1,3798	-0,7349	6,0544
23.12.2009	-0,6413	0,9376	-0,3585	6,1316
24.12.2009	-0,3791	-1,4146	-0,8024	-10,4420
25.12.2009	0,4482	0,6576	0,5830	6,1549
28.12.2009	0,4595	0,8743	0,4423	20,4724
29.12.2009	1,2437	-0,6013	1,0943	-14,5282
30.12.2009	-0,0482	-1,1549	-0,2492	-15,0532
31.12.2009	0,3850	0,7393	0,4943	3,5756
	Средняя доходность			
	-0,0528	0,6792	0,0039	1,6361

Таким образом, тестирование на данных поступреждающего периода (табл. 4) показало, что минимизация риск-эффектов, предусматриваемая предлагаемой методикой, позволяет строить портфели, фактическая доходность которых на упреждающих отрезках времени может превышать ожидаемую доходность. Этот факт объясняется тем обстоятельством, что портфель с риск-упреждающей оценкой доходности является портфелем, комбинирующим наихудшие варианты упреждающего периода. Наступившая реальность, как правило, обеспечивает более высокую доходность портфеля, чем наихудшие из ожидаемых вариантов.

Список источников

1. Markowitz H.M. Portfolio Selection / H.M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – №1. – P. 77-91.

2. Sharpe W.F. A Simplified Model for Portfolio Analysis / W.F. Sharpe // Management Science. – 1963. – Vol. 9, №2. – Pp. 277-293.

3. Ратушная Е.А. Модели портфельного инвестирования с риск-упреждающей оценкой доходности / Автореферат дис. … канд. экон. наук: 08.00.13. – Воронеж, 2010. – С. 24.

PORTFOLIO SOLUTIONS WITH SYMMETRICAL RISK ESTIMATION

Borisov Aleksey Nikolaevich,
Dr. Sc. of Economy, Professor of the Chair of Economy and Finances of Voronezh State Forest Academy; tvi01@mail.ru;
Timchenko Olga Viktorovna,
Postagraduate student of The Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy; pgtushnik@mail.ru

New, symmetrical, measuring portfolio risk, which can take both positive and negative values, is discussed. The results of computational experiments, which showed a test mode statistically robust preference of model portfolio investment with symmetrical risk assessment when compared with other models.
Keywords: portfolio model of Markowitz, Sharpe model, the interaction matrix, risk assessment