
ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ ОПЦИОНОВ НА ПОЛНОМ И НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ

Федосеев Александр Михайлович,

аспирант кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; amf_@bk.ru

Коротких Вячеслав Владимирович,

магистрант экономического факультета Воронежского государственного университета; v.v.korotkikh@gmail.com

В статье приведен анализ неэффективности классической биномиальной модели на неполном рынке, также рассматривается частный случай решения задачи оценки стоимости опциона в условиях неполного рынка через представление неполного рынка как вероятностную систему частных полных рынков. В заключение предлагается модель мультитрендового (B, S) – рынка.

Ключевые слова: неполные рынки, биномиальная модель ценообразования опционов, риск-трендовая оценка, мультитрендовый (B, S) – рынок.

Минувший кризис, спровоцированный схлопыванием очередного финансового пузыря, едва ли можно назвать уникальным. Этапы его развития были абсолютно аналогичны тем, которые он прошел бы в любой момент обозримой экономической истории. Однако скорость, с которой этот пузырь надували, действительно поражает. Возможность такого стремительного развития, безусловно, предоставил рынок производных финансовых инструментов. Если изначально он задумывался как институт, позволяющий управлять рисками, то сегодня основным его предназначением стала спекулятивная маргинальная торговля, превратившая производные инструменты в один из существенных факторов риска. Значимую роль в этом играют опционы.

Казалось бы, существует корректный инструментарий опционного ценообразования, да и сами опционные контракты кажутся интуитивно понятными. Однако так обстоят дела только на первый взгляд.

Теоретическая цена, рассчитываемая биржей по классическим моделям, хоть и носит название «справедливой», но таковой, к сожалению, не является. «Справедливость» является ни столько понятной математической характеристикой, сколько чисто лингвистической или даже маркетинговой

компонентой, вводящей инвестора в заблуждение. Но на практике она явно не оправдывает надежд, возлагаемых на нее инвесторами. Затруднительно критиковать цену названную «справедливой», но мы попробуем.

Прежде чем перейти к рассмотрению сущности «справедливой» цены, рассмотрим формальное описание типа рынка, для которого предполагается оценка стоимости опциона. В центре внимания находится биномиальный (B, S) – рынок, на котором существуют только два типа активов. Во-первых, это безрисковый актив $B = (B_t)_{t \geq 0}$, характеризующий возможность безрискового заимствования или кредитования по ставке r_f , реализуемого путем покупки государственных облигаций. Рассматриваемый актив имеет детерминированную динамику и без каких-либо сложностей может быть определен в любой момент времени. Во-вторых, рисковый актив $S = (S_t)_{t \geq 0}$, как правило, представленный акциями, облигациями, реальным товарами, валютой и пр. Цена рискового актива определяется как случайная величина, и поэтому для любого упреждающего момента времени можно корректно говорить только о прогнозных ее оценках.

В биномиальной модели (B, S) – рынка предполагается, что в каждый момент времени стоимость рискового актива может принимать только одно из двух значений, изменяясь пропорционально величине $u = 1 + r_u$ или $d = 1 + r_d$, соответствующей средним темпам прироста или падения – r_u или r_d :

$$S_{t+1} = \begin{cases} uS_t \\ dS_t \end{cases} \quad (1)$$

Основные ограничения, в рамках которых строятся модели, связаны с понятием полного рынка, введенным К. Эрроу в работе по общему равновесию и являющимся следствием биномиальной модели (B, S) – рынка. Эти ограничения становятся очевидными лишь при тщательном рассмотрении основных этапов построения биномиальной модели опционного ценообразования.

Если рынок является полным, то должна существовать возможность сформировать портфель ценных бумаг, гарантирующий заранее определенный доход в будущем, каким бы оно ни было. Помимо этого должны существовать и срочные контракты, эквивалентные по выплатам любому сформированному на полном рынке портфелю.

Здесь следует отдельно отметить такое важное свойство полного рынка как динамическая полнота. Рассуждая о простой полноте рынка, мы имеем в виду возможность немедленно сформировать портфель в соответствии с нашими ожиданиями. Динамическая полнота характеризует возможность инвестировать в соответствии с самофинансируемой торговой стратегией, эквивалентной по денежным потокам отмеченному выше портфелю. Самофинансируемая стратегия предполагает, что все операции кроме первичного формирования портфеля должны быть нейтральными по отношению к денежным потокам, т.е. запрещаются как изъятие средств

с торгового депозита, так и внесение дополнительных средств. Таким образом, полнота рынка позволяет единожды сформировать портфель, а динамическая полнота не исключает возможность последующих операций с портфелем. Динамическая полнота рынка предполагает, что в ситуации неопределенности получить гарантированный доход возможно путем частой ревизии и реструктуризации портфеля небольшого числа ценных бумаг.

Формально рынок является полным, если каждой стратегии, используемой на кассовом рынке, можно поставить в соответствие стратегию для торговли на срочном рынке, эквивалентную по выплатам в любой момент времени. Для случая полного рынка все денежные потоки от одной торговой стратегии могут быть воспроизведены через простую опционную стратегию.

Введем следующие обозначения для иллюстрации опционного ценообразования на полном рынке с учетом сформулированных выше суждений: $c_u(c_d)$ – стоимость опциона в случае роста (снижения) цены акции, $R_f = 1 + r_f$ – темп прироста банковского депозита по безрисковой ставке r_f .

Пусть $nS + B$ – портфель из n акций (S) и средств на депозите (B), способный генерировать денежные потоки, эквивалентные денежным потокам от опциона, цена которого c_0 является искомой в рассматриваемой задаче. Тогда для начального момента времени справедливо равенство:

$$nS + B = c_0. \quad (2)$$

Динамическая полнота рынка способствует сохранению данного равенства в любой будущий момент времени. Проиллюстрируем на простейшем примере. Пусть период жизни опциона представлен целым и неделимым. Тогда, согласно концепции полноты рынка, стоимость портфеля, повторяющего выплаты по опциону, находится из следующей системы:

$$\begin{cases} nSu + R_f B = c_u \\ nSd + R_f B = c_d \end{cases}. \quad (3)$$

Решение системы дает структуру искомого портфеля в общем виде, а также искомую цену опциона в начальный момент времени:

$$n = \frac{c_u - c_d}{(u - d)S}; \quad (4)$$

$$B = \frac{dc_u - uc_d}{(u - d)R_f}; \quad (5)$$

$$c_0 = \frac{c_u - c_d}{u - d} - \frac{dc_u - uc_d}{(u - d)R_f} = \left[\left(\frac{R_f - d}{u - d} \right) c_u + \left(\frac{u - R_f}{u - d} \right) c_d \right] / R_f. \quad (6)$$

Определенная таким образом стоимость опциона есть взвешенная по вероятности дисконтированная сумма выплат по опциону в конце периода.

Вероятности, выступающие весовыми коэффициентами, являются риск-нейтральными, потому как при их расчете предполагается, что ожидаемая доходность рискованных активов равна или близка к безрисковой ставке:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = r_f \quad (7)$$

Из получившегося равенства ожидаемой доходности рискового актива и безрисковой ставки следует тождественность рискового актива безрисковому. А раз все активы, представленные на полном рынке, безрисковые или близкие к ним, то очевидно, что полному рынку свойственно отсутствие риска и одинаковое видение будущего инвесторами. Все это обеспечивает единственность полученной оценки стоимости опциона.

Докажем, что концепция полного рынка является ограниченной и соответствует представлениям об идеальной модели развитой финансовой системы, включающей широкий спектр производных инструментов. Для этого рассмотрим правдоподобие ее предположений. Во-первых, соответствие количества активов всевозможным ожиданиям инвесторов. Несмотря на перманентные инновации на рынке ценных бумаг и рынке страховых услуг, реальные рынки остаются неполными, так как число исходов гораздо больше возможностей, предоставляемых имеющимися инструментами. Идея соответствия возможностей, предоставляемых рынком, числу его исходов остается нереализуемой. Например, если экономика лишается института гарантирующего исполнение контрактов, скажем биржи, то маловероятно, что инвесторы будут осуществлять операции купли-продажи таких контрактов.

Во-вторых, единственность риск-нейтральной оценки, обеспечиваемая за счет одинакового представления о будущем у инвесторов и как следствие практическим совпадением ожидаемой доходности рисковых активов с безрисковой ставкой.

В связи с этим становится очевидным, что понятие полного рынка тесно связано с рыночной информационной эффективностью. Единственность полученной оценки стоимости опциона возможна только при однородности инвесторов, имеющих одинаковый доступ к информации и одинаково ее интерпретирующих при принятии решений. Только тогда участники рынка в совокупности поступают рационально, придерживаясь однородных целевых установок и стратегий поведения. Однако такое умозаключение опровергается через известный феномен асимметрии информации, порождающей неоднородность, как инвесторов, так и их ожиданий, а также несколько иного вероятностного распределения доходностей рисковых активов. Некоторые инвесторы показывают доходность рисковых активов на рынке существенно выше рыночной, чего концепция полноты рынка естественно не допускает. Следовательно, в реальном мире не существует единственной оценки стоимости опциона, одинаково трактуемой как покупателем, так и продавцом.

В-третьих, кажущаяся рациональность методики оценивания обеспечивается стремлением описать и учесть все возможные варианты будущего. Однако фактические вероятности, а значит и варианты будущего, имеют совершенно другое распределение в силу объективного

существования риска и неопределенности. Причем эти вероятности перманентно изменяются по мере поступления новой информации, чего в случае полного рынка не происходит, к тому же все параметры в модели не изменяются во времени.

Очевидно, реальность финансовых рынков такова, что они не являются полными, но идея рыночной полноты настолько прочно укоренилась, что институты-организаторы торгов прикладывают все усилия для искусственного воссоздания условий, напоминающих условия полного рынка. В частности, для этого инвесторам предоставляется возможность формирования портфеля из опционных контрактов call и put со всевозможными страйками. Несмотря на это, реальность представляет более сложный и интересный предмет для исследований, нежели идеализированный полный рынок. Поэтому неполный рынок является первым шагом от идеального биномиального (B, S) – рынка в сторону объективной рыночной реальности, позволяющим отражать более сложное вероятностное устройство цен рискованных активов.

В настоящее время активно ведутся исследования по оценке стоимости опциона в условиях неполных рынков, но результаты носят скорее теоретический характер, не затрагивая аспекты, связанные с расчетами для практического использования. Ситуация с неполными рынками сходна той, которая связана с критикой теории эффективного рынка, где инвесторы однородно воспринимают информацию и действуют рационально.

Собственно все свойства полного рынка, как и их следствия, подробнейшим образом рассмотренные выше, вытекают из базиса всей теории, коим является формализация идеи биномиального (B, S) – рынка.

В работе В.В. Давниса и С.Ю. Богдановой [2] предложен частный случай решения проблемы оценки стоимости опциона на неполном рынке. В основе подхода идея модификации (B, S) – рынка. Касательно инфраструктуры и финансовых инструментов – это тот же рынок, что и у классиков. Неполный рынок представлен в виде системы частных полных рынков, каждый из которых реализует возможности полного рынка, но лишь с некоторой вероятностью. Исследование направлено на разработку моделей, обеспечивающих расчет стоимости опционов с учетом действующих на рынке трендов, которые не принимаются во внимание в классических формулах оценки опционов.

В работе предложено решение для случая четырех скачкообразных изменений цены базисного актива, эконометрическая модель динамики которого характеризуется в модели (8). Модель позволяет отразить четыре ситуации в зависимости от знаков при дихотомических переменных. Возникновение той или иной ситуации зависит от состояния рынка, аппроксимируемого аналогичной моделью (9) для рыночного индекса с тем же числом скачков. Решение задачи оценивания стоимости опционов на неполных рынках предполагает расчет прогнозных оценок со своими вероятностями по всем вариантам, предусмотренным мультиномиальной моделью (10) – (11).

Используя полученное вероятностное описание четырех ситуаций, определим математическое ожидание скачкообразного изменения доходности. С учетом равенства трендовой составляющей для всех ситуаций математическое ожидание скачкообразного изменения r_k в k -й ситуации имеет вид (12).

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + d_1 x_{1t} + d_2 x_{2t} + \delta_t; \quad (8)$$

$$r_{I_t} = \alpha_{I_0} + \alpha_{I_1} r_{I_t-1} + d_{I_1} x_{I_1 t} + d_{I_2} x_{I_2 t} + \delta_{I_t}; \quad (9)$$

$$P(y_t = j | z_t) = \frac{e^{z_t \hat{b}_j}}{1 + \sum_{j=0}^k e^{z_t \hat{b}_j}}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1; \quad (10)$$

$$P(y_t = k | z_t) = \frac{1}{1 + \sum_{j=0}^k e^{z_t \hat{b}_j}}; \quad (11)$$

$$r_k = \hat{d}_1 + \hat{d}_2 - 2P_0^k (\hat{d}_1 + \hat{d}_2) - 2P_1^k \hat{d}_1 - 2P_2^k \hat{d}_2, \quad k = \overline{0, 3}, \quad (12)$$

где r_t, r_{I_t} – доходности базисного актива и рыночного индекса в момент времени t ; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{I_0}, \alpha_{I_1}$ – оцениваемые параметры непрерывной составляющей модели; $d_1, d_2, d_{I_1}, d_{I_2}$ – оцениваемые параметры дискретной составляющей; $x_{1t}, x_{2t}, x_{I_1 t}, x_{I_2 t}$ – ненаблюдаемые дискретные переменные, принимающие два значения: 1 или -1; δ_t, δ_{I_t} – ненаблюдаемая случайная величина; $y_t = \overline{0, 3}$ – зависимая переменная, характеризующая номер одного из рассматриваемых случаев; $z_t = \{-d_{I_1} - d_{I_2}; -d_{I_1} + d_{I_2}; +d_{I_1} - d_{I_2}; d_{I_1} + d_{I_2}\}$ – вектор независимых переменных регрессионной модели; \hat{b}_j – матрица оцениваемых параметров мультиномиальной модели; P_0^k, P_1^k, P_2^k – вероятности из мультиномиальной модели.

Рассчитанные по модели (12) доходности рискованного актива $r_k = \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$ разделяются на две непересекающиеся группы, одна из которых содержит значения меньше трендовой ставки r_r , а другая – больше ее. В результате имеется возможность сформировать сочетания между всеми доходностями из разных групп, каждое которых порождает локальный вероятностный полный рынок. В основе так называемой мультиномиальной модели неполного рынка лежит попытка воссоздать неполный рынок как систему частных полных рынков. Риск-трендовые цены, при расчете которых и происходит формальный учет текущего рыночного тренда, на каждом частном рынке будут обладать всеми свойствами риск-нейтральной цены полного рынка, но лишь с определенной вероятностью (13), а сама риск-трендовая оценка стоимости опциона будет складываться из взвешенной по вероятности суммы полученных локальных оценок.

$$P_{nm} = P\left(r = \begin{cases} r_n \\ r_m \end{cases}\right) = \frac{P_n P_m}{(P_n + P_{n+1})(P_m + P_{m+1})}, \quad n, m = \overline{0, 2}; n \neq m, \quad (13)$$

где P_{nm} – вероятность для сочетания доходностей r_n и r_m ; P_n, P_m –

вероятности случаев для доходностей r_n и r_m соответственно.

Успешность подхода В.В. Давниса и С.Ю. Богдановой, кажется, не вызывает сомнений. Ориентируясь на результаты этих расчетов, инвесторы получают возможность повысить обоснованность принимаемых решений.

По нашему мнению, логическим продолжением в исследовании специфики неполных рынков является развитие и формализация идеи (B, S) – рынка с мультитрендом. Идея множества трендов, описывающих упреждающий период, являются адекватным его воспроизведением средствами эконометрического моделирования. Вероятностные характеристики играют роль некоего фильтра, способного отсеять маловероятные варианты будущего, сделав оценку цены опциона менее громоздкой, нежели в классической модели биномиального (B, S) – рынка. Но, несмотря на адекватность мультитрендового (B, S) – рынка, оценка стоимости опциона на порождаемом им неполном рынке требует определенной модификации классических методов.

Список источников

1. Arrow, K. The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing [текст] / K. Arrow // Review of Economic Studies. – 1964. – V. 31. – P. 91 – 96.

2. Давнис, В.В. Моделирование риск-трендовых оценок стоимости опционов [текст] / В.В. Давнис, С.Ю. Богданова // Современная экономика: проблемы и решения. – Воронеж, 2010. – №1 (1). – С. 119 –129.

3. Мельников, А.В. Математические методы финансового анализа [текст] / А.В. Мельников, Н.В. Попова, В.С. Скорнякова. – М.: Анкил, 2006. – 440 с.

4. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики [текст] / А.Н. Ширяев. – М.: Фазис, 1998. – 512 с.

FEATURES VALUATION OF OPTIONS ON COMPLETE AND INCOMPLETE MARKETS

Korotkikh Vyacheslav Vladimirovich,

Candidate for a Master's Degree of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University; v.v.korotkikh@gmail.com

Fedoseev Aleksandr Mikhaylovich,

Post graduate student of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University; amf_@bk.ru

The article provides an analysis of the ineffectiveness of the classical binomial model of an incomplete market, is also considered a special case of solving the problem of option valuation of part of the market through the presentation of an incomplete market system as the probability of complete private markets. In conclusion, we propose a model multitrend market.

Keywords: incomplete markets, the binomial option pricing model, risk assessment trend, multitrend market.