УДК 519.65+519.644.2

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СГЛАЖИВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ МИНИМИЗАЦИИ НЕВЯЗКИ В ФОРМУЛЕ ЭЙЛЕРА-МАКЛОРЕНА*

Агранович Юрий Яковлевич,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры автоматизированных и вычислительных систем Воронежского государственного технического университета; agyrya@yandex.ru
Концевая Наталья Валерьевна,
кандидат экономических наук, доцент кафедры экономико-математических методов и моделей Всероссийского заочного финансово-экономического института; kontsevaya07@list.ru

В данной работе решена задача минимизации невязки в формуле Эйлера-Маклорена. Решение используется для определения параметров окна скользящего суммирования в сглаживании временных рядов. Приведены результаты численных экспериментов.
Ключевые слова: сглаживание, скользящее усреднение, оптимизация интервала, кубическая кривая.

Возрастание числа эмитентов ценных бумаг и заключаемых контрактов в последнее десятилетие приводит к неожиданным изменениям в движении цен, вызываемых, в том числе, разными интересами участников рынка, различной степенью реакции на изменение цен, различной интерпретацией получаемой информации и т.д. Все это приводит к необходимости построения моделей, описывающих динамику и стохастику состояний финансовых рынков. Поскольку временные ряды, описывающие динамику рыночных показателей, являются крайне зашумленными, применение методов моделирования и прогнозирования нецелесообразно без предварительной очистки исходных данных. Специфика исследования динамики показателей финансовых рынков, заключающаяся в ограниченном объеме исходной информации, ограничивает круг математических методов и моделей, пригодных для их анализа, и подавляющее число математических

* Авторы благодарны фонду РФФИ за финансовую поддержку настоящих исследований, работа поддержана грантом РФФИ № 11-06-00217

методов не дают возможности воспользоваться их результатами для задач прогнозирования динамики рынка и обоснованных инвестиционных решений. Но, несмотря на это, данная работа направлена на разработку методов статистической обработки временных рядов, в частности, речь пойдет о сглаживании рыночных показателей.

Удаляемые из временных рядов финансовых показателей «лишние», случайные колебания должны быть достаточными для того, чтобы сглаженные значения позволили в дальнейшем эффективно использовать более сложные математические методы обработки.

Сравнительная простота в использовании методов сглаживания определяет основные недостатки их качественного применения. Результаты усреднения зависят в первую очередь от размера интервала усреднения и, во-вторых, собственно, от самого метода. Авторами был разработан метод для определения весовых коэффициентов при усреднении [1, 2], учитывающий параметр, который может варьироваться в зависимости от того, какие члены ряда желательно учитывать с большим весом, что позволяет улучшить качественное распознавание существующих закономерностей временного ряда и способствует устойчивости процедуры обработки ряда [1, с. 71 – 76]. В этой статье решаются вопросы оптимизации самого интервала усреднения.

Идея сглаживания возникла в сое время в предположении о гладкости тренда на ограниченном интервале при отсутствии возможности представить временной ряд простой кривой на всем участке наблюдений. Предполагая тренд гладким, подразумевается возможность описания его полиномом достаточно низкой степени. Поскольку основная цель сглаживания – минимизация отклонения сглаженных значений от наблюдаемых, то традиционные методы сглаживания предполагают двустороннее скользящее усреднение в центре интервала с фиксированной шириной окна.

Основной вопрос, возникающий при скользящем усреднении рыночных наблюдений – это проблема выбора размера интервала сглаживания, подходы к решению которой, в основном, эмпирические. В данной работе ставится задача определения оптимального интервала усреднения, базирующаяся на основе теоремы Эйлера-Маклорена. Такой подход позволит, как будет показано в дальнейшем, проводить скользящее усреднение при изменяющемся окне усреднения, исключая субъективные моменты в выборе размера интервала.

Воспользуемся формулой суммирования, связывающей частные суммы ряда с интегралом и производными его общего члена:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k!}(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)),$$

где B_{2k} – числа Бернулли.

Данная формула широко используется для приближённого вычисления определённых интегралов, для исследования сходимости рядов и для вычисления сумм и является предметом многочисленных исследований, включая совсем недавние, например, статья Ю.В. Матиясевича [3].

Рассмотрим следующую задачу: будем искать такой интервал интегрирования, когда невязка обращается в нуль, т.е. чтобы сумма значений функции в целых точках была равна интегралу от функции на рассматриваемом интервале. Иными словами, в формуле Эйлера-Маклорена мы будем считать величиной невязки сумму с числами Бернулли.

Можно показать, что для четных степеней полинома остаток, вообще говоря, отличен от нуля и задача не имеет решения, а для полинома третьей степени центр отрезка интегрирования совпадает со средним арифметическим от корней исходного многочлена. Задача для многочлена пятой степени сложнее. Далее мы покажем, что размер интервала интегрирования и его центр также зависят от средних арифметических корней и симметрических многочленов от них.

Пусть задан многочлен 5-й степени:

$$P_5(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+l\ , \tag{1}$$

тогда

$$P_5^{(II)}(x)=5\cdot 4ax^3+4\cdot 3bx^2+3\cdot 2cx+2d\ ,\ P_5^{(I)}(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e\ ,$$

$$P_5^{(III)}(x)=5\cdot 4\cdot 3ax^2+4\cdot 3\cdot 2bx+3\cdot 2c\ .$$

Понятно, что $P_5^{(V)}(x)=const.$, поэтому в ряд с числами Бернулли не попадает. В пределах $z\le x\le y$ имеем:

$$\begin{gathered}\frac{B_2}{2!}\left[5a(y^4-z^4)+4b(y^3-z^3)+3c(y^2-z^2)+2d(y-z)\right]+\\+\frac{B_4}{4!}\left[5\cdot 4\cdot 3a(y^2-z^2)+4\cdot 3\cdot 2b(y-z)\right]=0,\end{gathered} \tag{2}$$

Факторизуем (2) по $(y-z)$:

$$\begin{gathered}\frac{B_2}{2!}\left[5a(y+z)(y^2+z^2)+4b(y^2+yz+z^2)+3c(y+z)+2d\right]+\\+\frac{B_4}{4!}\left[5\cdot 4\cdot 3a(y+z)+4\cdot 3\cdot 2b\right]=0.\end{gathered} \tag{3}$$

Пусть $\frac{y+z}{2}=v$. Таким образом, – центр отрезка интегрирования. Тогда:

$$y^2+z^2=(y+z)^2-2yz=4v^2-2yz\ .$$

Полагая далее $\frac{y-z}{2}=u$, получим следующие тождества:

$$uv=\frac{y^2-z^2}{y}\ ;\qquad u+v=y\ ;\qquad v-u=z\ .$$

Таким образом,

$$2yz=2\left(v^2-u^2\right), \tag{4}$$

$$y^2+z^2=4v^2-2v^2+2u^2=2v^2+2u^2=2(v^2+u^2)\ . \tag{5}$$

Уравнение (3) в новых переменных $(\mathrm{u,v})$ принимает вид:

$$\frac{B_2}{2!}\left[\begin{array}{l}5a\cdot 2v\cdot 2(u^2+v^2)+4b(2(v^2+u^2)++\\ v^2-u^2)+3c\cdot 2v+2d\end{array}\right]+\frac{B_4}{4!}\left[5\cdot 4\cdot 3av+4\cdot 3\cdot 2b\right]=0. \quad (6)$$

$$B_2\left[10av(u^2+v^2)+2b(u^2+3v^2)+3cv+d\right]+B_4\left[5av+b\right]=0\ , \quad (7)$$

т.к. $\frac{B_4}{B_2}=-\frac{1/30}{1/6}=-\frac{1}{5}$, то (7) можно преобразовать:

$$2\left[5av+b\right]u^2=-\left[10av^3+6bv^2+(3c-a)v+b/5+d\right]. \quad (8)$$

Здесь v – абсцисса центра отрезка интегрирования, а u – половина длины этого отрезка.

Соотношение (8) определяет кубическую кривую с вертикальной асимптотой в точке равной среднему арифметическому корней исходного многочлена:

$$v=-\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{5}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}\ .$$

Соотношение (8) можно представить в виде:

$$2(v-\overline{x})u^2=-\left[2v^3-6\overline{x}v^2+(\frac{3}{5}\cdot\frac{c}{a}-\frac{1}{5})v+\frac{1}{5}\overline{x}+\frac{d}{5a}\right],$$

где $\frac{c}{a}=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$ – сумма попарных произведений корней исходного многочлена.

$$3\frac{c}{10}\cdot\frac{1}{10}=3\overline{\overline{x}}\ ,$$

где $3\overline{\overline{x}}$ – среднее арифметическое попарных произведений корней многочлена.

$$\frac{d}{a}=-\left[\begin{array}{l}x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+x_2x_3x_4+x_2x_3x_5+\\ +x_3x_4x_5+x_1x_3x_4+x_1x_3x_5+x_2x_4x_5+x_1x_4x_5\end{array}\right],$$

Расчетная формула для кубической кривой в терминах средних арифметических:

$$(v-\overline{x})u^2=-\left[v^3-3\overline{x}v^2+(3\overline{\overline{x}}-\frac{1}{10})v+\frac{\overline{x}}{10}-\widehat{x}\right]\ .$$

Здесь $\overline{x}$ – среднее арифметическое корней; $\overline{\overline{x}}$ – среднее арифметическое попарных произведений корней; $\widehat{x}$ – среднее арифметическое произведений по три.

Таким образом, мы неожиданно обнаруживаем, что средние от корней кубической параболы совпадают со средними от корней исходного многочлена. Можно показать, что это свойство присуще не только многочленам пятой степени, но также любым многочленам нечетных степеней, начиная с третьей. Более того, заметим также, что все значения симметрических многочленов от корней кубической параболы аффинно выражаются через симметрические многочлены от корней исходного многочлена. При этом величина неоднородности определяется отношением чисел Бернулли.

В качестве исходной базы были выбраны следующие исторические данные: дневные котировки (цены открытия) валютного курса USD/JPY за 200 дней на разных временных интервалах (источник котировок EuroClub http://www.fxeuroclub.ru). Исследование предлагаемого метода скользящего усреднения включало следующие этапы:

• Для исходных данных рассчитываются аппроксимирующий полином пятой степени, параметры которого определяются МНК.

• Используя коэффициенты полученного полинома, определяются параметры кубической кривой, отображающей связь между центром интервала усреднения и размером интервала.

• В дальнейшем, используя полученную кубическую кривую, можно выбирать как номограмму оптимальные центр интервала и собственно ширину интервала сглаживания.

• Используя переменную ширину окна усреднения, производится процедура выравнивания временного ряда.

Данная задача была реализована в пакете MATLAB. На первом рисунке представлены результаты моделирования исходного временного ряда полиномом 5-й степени.

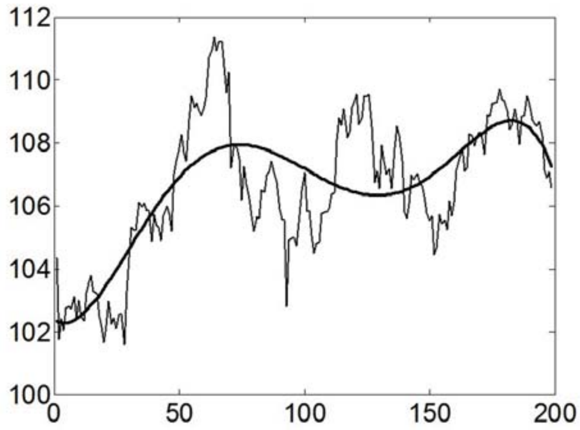

Рис. 1. Аппроксимация исходного ряда полиномом пятой степени

На рис. 2 представлена кубическая кривая, определяющая размер окна сглаживания в зависимости от центра интервала. На горизонтальной оси – номер наблюдения (порядковый номер дня), по вертикальной оси изображен размер половины ширины интервала усреднения.

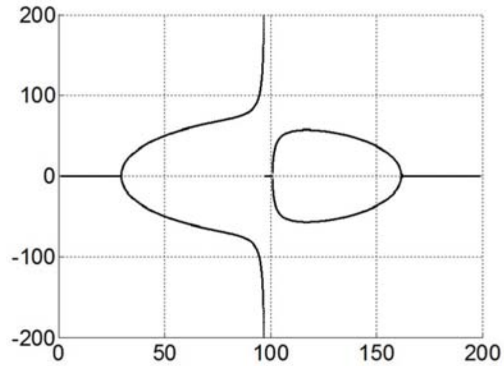

Рис. 2. Ширина интервала сглаживания в зависимости от центра интервала

На заключительном этапе исследования проведено сглаживание исходного ряда с изменяющимся окном усреднения. На рис. 3 представлены исходный временной ряд и сглаженный с помощью предлагаемого метода.

Рис. 3. Исходный ряд и результаты сглаживания

Метод скользящего усреднения с изменяющимся окном сглаживания позволяет с большей степени абстрагироваться от значительных изменений в середине ряда за счет увеличения размера окна сглаживания и максимально точно отобразить динамику крайних уровней. Вместе с тем, полученный сглаженный ряд отображает общее направление динамики процесса и может быть использован как для повторения предлагаемой процедуры, так и для возможного моделирования динамики. Например, аппроксимация полученного ряда с помощью полинома пятой степени становится более существенной (коэффициент детерминации увеличивается с 0,57 до 0,88).

Интересным представляется поведение кубической кривой, которое требует дальнейших исследований. В случае применения данного метода к отрезкам временных рядов с выраженной трендовой динамикой идея сглаживания не изменяется – наибольший интервал усреднения располагается ближе к центру усреднения, резко уменьшаясь к краям. На рис.4 представлен соответствующий период наблюдений исследуемой валютной пары.

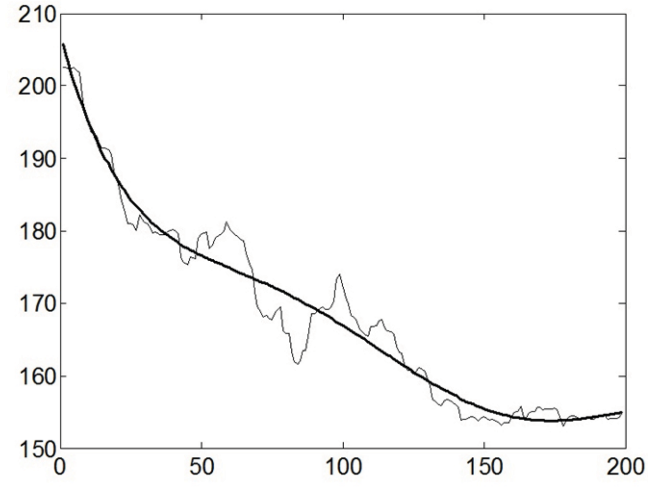

Рис. 4. Аппроксимация исходного ряда полиномом пятой степени

На рис. 5. приведена соответствующая кубическая кривая.

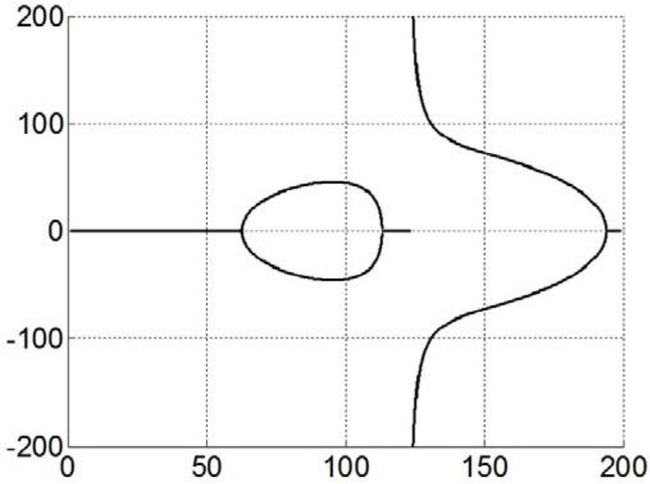

Рис. 5. Ширина интервала сглаживания в зависимости от центра интервала

Таким образом, оптимизация интервала сглаживания, предложенная в данной работе, обеспечивает устойчивую очистку ряда от значительных колебаний в середине интервала наблюдения, не уменьшая информационную пользу от наблюдений на концах ряда. Тем самым, создается возможность для качественного использования последующих методов обработки временных рядов.

Заключение

Цель данной работы заключалась в обосновании важности оптимизации интервала сглаживания при обработке временных рядов, поскольку итоговый показатель может быть использован в качестве критерия оценки наличия детерминации во временных рядах. При выявлении, в результате сглаживания, объективных закономерностей, информация о них может быть использована во многих областях: при обосновании управленческих решений, при планировании на микро и макроэкономических уровнях, при оценке ожидаемой доходности инвестиций и пр.

Список источников

1. Агранович, Ю.Я. Метод многоугольных чисел в процедуре сглаживания временных рядов и приложения к исследованию финансовых рынков [текст] / Ю.Я. Агранович, Н.В. Концевая, В.Л. Хацкевич // Экономика и математические методы. – 2010. – т. 46. – вып. 3. – С. 71 – 81.

2. Агранович, Ю.Я. Сглаживание временных рядов показателей финансовых рынков на основе многоугольных чисел [текст] / Ю.Я. Агранович, Н.В. Концевая, В.Л. Хацкевич // Прикладная эконометрика. – 2010. – № 3 (19). – С. 3 – 8.

3. Матиясевич, Ю.В. Альтернативы формуле Эйлера-Маклорена для вычисления бесконечных сумм [текст] / Ю.В. Матиясевич // Матем. заметки. – 2010. – №4. – С. 543 – 548.

METHOD FOR DETERMINING THE PARAMETERS OF SMOOTHING TIME SERIES BASED ON MINIMIZNG THE DISCREPANCY IN THE EULER-MACLAURIN FORMULA

Agranovich Yury Yakovlevich,
Dr. Sc. of Physics and Mathematics, Professor of the Chair of automation and computer systems of Voronezh State Technical University; agyrya@yandex.ru
Kontsevaya Natalya Valeryevna,
Ph.D. of Economy, associate professorof the Chair of Economic and Mathematical Methods and Models of the All-Russian Correspondence Financial and Economic Institute; kontsevaya07@list.ru

In article the minimization problem of the residual for Euler-MacLaurin formula are solved. This solution to use for find of parameters window sliding summation in the smoothing of time series. Results of numerical experiments are discussion.
Keywords: the smoothing of time series, sliding averaging, interval optimization, cubic curve.