
ПОРТФЕЛЬНЫЙ ОБРАЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ НА ФОНДОВОМ РЫНКЕ

Борисов Алексей Николаевич,

доктор экономических наук, профессор кафедры экономики и финансов Воронежской государственной лесотехнической академии; tvi01@mail.ru

Тимченко Ольга Викторовна,

соискатель кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; pgtushnik@mail.ru

Введено понятие «портфельный образ инвестиционного решения» и рассматривается возможность построения портфельного образа на основе одноиндексной модели Шарпа. Обсуждаются результаты вычислительного эксперимента, подтвердившие эффективность предложенного подхода в практике обоснования инвестиционных решений.

Ключевые слова: модель Шарпа, портфельный образ, инвестиционное решение, модель с двойной зависимостью от индекса.

Вводимый в статье термин «портфельный образ инвестиционных решений» в некотором смысле заимствован из теории прогнозирования, в рамках которой разработан подход, предусматривающий проведение упреждающих расчетов на основе прогнозного образа. По смыслу идеи построения портфельного образа инвестиционных решений идентичны идеям, которые используются при построении прогнозного образа. Также как и в прогножном образе предполагается, что портфельный образ инвестиционных решений – это некоторое разнообразие решений с указанием вероятностного распределения их предпочтительности на упреждающем отрезке времени. Кроме того, портфель, который можно построить на основе данных упреждающего периода, если бы они были известны на момент его построения, должен находиться внутри портфельного образа.

Портфельный образ, как следует из его определения, является прогнозным портфельным образом и, следовательно, должен строиться с использованием методики построения прогнозного образа. Наиболее полно реализовать эту точку зрения можно, если в качестве базовой модели портфеля использовать портфель У. Шарпа. Чтобы понять основной смысл предлагаемого подхода, рассмотрим особенности построения модели Шарпа.

Принципиальное отличие модели, предложенной Шарпом от других моделей портфельного инвестирования в том, что ее построение существенно опирается на результаты эконометрического моделирования. Это главный аргумент, который позволяет предпочесть именно эту модель в качестве основного инструмента, используемого при построении портфельного образа инвестиционных решений. Поэтому рассмотрим подробнее особенности этой модели и оценим возможности ее применения в задаче формирования портфельного образа.

У. Шарп предложил портфель формировать на основе одноиндексной модели. С помощью этой модели идентифицируется зависимость доходности активов, включаемых в инвестиционный портфель, от доходности рыночного индекса. По сути, это однофакторная регрессионная модель, записываемая в виде:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{it}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где r_{it} – уровень доходности i -го актива в момент времени t ; r_{It} – уровень доходности рыночного индекса в момент времени t ; α_i , β_i – параметры регрессионной модели; ε_{it} – ненаблюдаемая случайная величина.

В модели (1) β представляет собой известный бета-коэффициент модели, которую в финансовой теории принято называть CAPM.

С помощью параметров линейной регрессионной модели (1) удастся выразить все величины, используемые в модели Шарпа. Формулы, по которым рассчитываются эти величины, выглядят следующим образом:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{r}_I \quad (2)$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_I^2 \quad (4)$$

где \bar{r}_i , \bar{r}_I – математические ожидания доходности i -го актива и индекса; σ_i^2 , σ_I^2 – дисперсии доходностей i -го актива и индекса; σ_{ij} – ковариация доходностей i -го и j -го активов.

Формулы выведены на основе свойств, которые постулируются для ненаблюдаемых случайных величин ε_{it} . Естественность всех предположений относительно случайных величин ε_{it} не вызывает сомнений.

Для того чтобы записать модель Шарпа, необходимо определить выражение для доходности портфеля и выражение для дисперсии портфеля. В соответствии с идеями Марковица на основе этих двух характеристик строится модель эффективного портфеля.

Ожидаемую доходность портфеля, состоящего из n ценных бумаг, вычисляют как математическое ожидание по формуле:

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i), \quad (5)$$

где w_i – вес i -й ценной бумаги, включенной в портфеле. Подставив в эту формулу выражение $E(r_i)$, определенное через одноиндексную модель, получим

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^n w_i [\alpha_i + \beta_i E(r_m)] . \quad (6)$$

В этом равенстве можно выделить слагаемые, которые не зависят от изменений, происходящих на рынке, и слагаемые, которые связаны с рыночными показателями:

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i + \left(\sum_{i=1}^n w_i \beta_i \right) E(r_m) . \quad (7)$$

Шарп предложил более компактную запись этой формулы, введя в рассмотрение $(n+1)$ -ю акцию, имеющую характеристики индекса. В этом случае второе слагаемое уравнения (7) представимо в виде:

$$\left(\sum_{i=1}^n w_i \beta_i \right) E(r_m) = w_{n+1} E(\alpha_{n+1}) , \quad (8)$$

где

$$w_{n+1} = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i , \quad (9)$$

$$E(\alpha_{n+1}) = E(r_n) . \quad (10)$$

При этом считается, что дисперсия ошибки этой условной $(n+1)$ -й акции равна дисперсии рыночной доходности: $\sigma_{\varepsilon, n+1}^2 = \sigma_m^2$. Выражение (9) представляет собой взвешенную сумму величин «беты» каждой ценной бумаги (где в качестве весов используются w_i) и называется портфельной «бетой» (β_n). С учетом выражений (8) и (9) формулу (10) можно записать так:

$$E(r_n) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i . \quad (11)$$

Изложенное позволяет ожидаемую доходность портфеля $E(r_n)$ разделить на две части:

а) суммы $w_1 \alpha_1 + w_2 \alpha_2 + \dots + w_n \alpha_n$ взвешенных параметров α_i одноиндексной модели каждой ценной бумаги, что отражает вклад в $E(r_n)$ самих ценных бумаг;

б) компоненты $w_{n+1} \alpha_i = \left(\sum_{i=1}^n w_i \beta_i \right) E(r_m)$, представляющей собой произведение портфельной «беты» и ожидаемой рыночной доходности, что отражает взаимосвязь рынка с ценными бумагами портфеля.

Дисперсия портфеля, как известно, записывается в виде:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n w_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{i,j} . \quad (12)$$

Если вместо значений σ_i^2 и $\sigma_{i,j}$ подставить выражения (2) и (3), а затем провести соответствующие вычисления и воспользоваться условием (9), то можно показать, что дисперсию портфеля можно записать в виде:

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \sigma_{\varepsilon, i}^2 . \quad (13)$$

Необходимо только помнить, что в этом выражении $w_{n+1} = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i$, т.е. $(w_{n+1})^2 = (w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2 + \dots + w_n \beta_n)^2$, а $\sigma_{\varepsilon, n+1}^2 = \sigma_m^2$. Следовательно,

дисперсию портфеля, как и доходность, можно представить состоящей из двух компонент:

а) средневзвешенных дисперсий ошибок $\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_{\varepsilon,i}^2$, где весами служат w_i , что отражает долю риска портфеля, связанного с риском самих ценных бумаг (собственный риск);

б) $\beta_n^2 \sigma_m^2$ – взвешенной величины дисперсии доходности рыночного портфеля σ_m^2 , в которой весом служит квадрат портфельной «беты», отражающей долю риска портфеля, определяемого нестабильностью рынка (рыночный риск).

Полученные выражения для ожидаемой доходности и дисперсии портфеля позволяют записать модель Шарпа в следующем виде:

$$\mathbf{w}'_{n+1} \Sigma_d \mathbf{w}_{n+1} \rightarrow \min, \quad (14)$$

$$\mathbf{w}'_{n+1} \mathbf{a} = \mu, \quad (15)$$

$$\mathbf{w}' \mathbf{i} = 1, \quad (16)$$

$$\mathbf{w}' \mathbf{\beta} = w_{n+1}, \quad (17)$$

где $\mathbf{w}'_{n+1} = (w_1, \dots, w_n, w_{n+1})$ – вектор, компоненты которого определяют структуру расширенного портфеля; $\mathbf{w}' = (w_1, \dots, w_n)$ – вектор, компоненты которого определяют структуру портфеля; $\mathbf{a}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – вектор параметров; $\mathbf{\beta}' = (b_1, \dots, b_n)$ – вектор параметров;

$$\Sigma_d = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon,1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon,2}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{\varepsilon,n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\Sigma_d} \right\} \text{ диагональная матрица, на}$$

диагонали которой стоят остаточные дисперсии активов и дисперсия рыночного портфеля (индекса) σ_m^2 .

Полученную задачу условной оптимизации удобно решать, используя множители Лагранжа. Запишем для нее функцию Лагранжа

$$L = \mathbf{w}'_{n+1} \Sigma_d \mathbf{w}_{n+1} + \lambda_1 (\mathbf{w}'_{n+1} \mathbf{a} - \mu) + \lambda_2 (\mathbf{w}' \mathbf{i} - 1) + \lambda_3 (\mathbf{w}' \mathbf{\beta} - w_{n+1}) \rightarrow \min. \quad (18)$$

Продифференцировав полученное выражение по \mathbf{w} и множителям Лагранжа, получим систему уравнений

$$L_w = 2 \Sigma_d \mathbf{w}_{n+1} + \lambda_1 \mathbf{I} \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{i} + \lambda_3 \mathbf{\beta} = 0, \quad (19)$$

$$L_{\lambda_1} = \mathbf{w}'_{n+1} \mathbf{a} - \mu = 0, \quad (20)$$

$$L_{\lambda_2} = \mathbf{w}' \mathbf{i} - 1 = 0, \quad (21)$$

$$L_{\lambda_3} = \mathbf{w}' \mathbf{\beta} - w_{n+1} = 0. \quad (22)$$

Решение системы (19) – (22) позволяет получить структуру оптимального портфеля. Для лучшего понимания структуры этой системы, запишем ее в матричном виде для случая, когда формируется портфель из трех активов

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 2\sigma_2^2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 2\sigma_3^2 & 0 & \alpha_3 & 1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sigma_m^2 & \bar{r}_m & 0 & -1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \bar{r}_m & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Матричное представление данной системы необходимо для того, чтобы уяснить перечень характеристик, необходимый для построения оптимального портфеля и для того, чтобы получить наглядное представление о решаемой системе. Среди этих характеристик обращают на себя внимание коэффициенты β . По этим коэффициентам, помня их содержательную интерпретацию, можно понять, какой портфель формируется. Если по преимуществу $\beta > 1$, то портфель считается агрессивным. В противном случае – портфель осторожный. В тех случаях, когда $\beta = 1$, портфель обеспечивает средний уровень доходности на уровне доходности индекса.

Обсуждение вопросов касающихся построения портфельного образа инвестиционных решений, прежде всего, связано с исследованием возможностей одноиндексной модели (1). Структура модели Шарпа, как было показано выше, однозначно определяется одноиндексной моделью, следовательно, разнообразие портфелей определяется необходимым разнообразием одноиндексных моделей. Причем разнообразие этих моделей не может быть произвольным. Это не тот случай, когда возможности эконометрики можно использовать в полном объеме и для каждого актива построить несколько различных моделей. Модели должны отражать только взаимосвязь доходности актива с доходностью индекса. В противном случае пропадает содержательный смысл, заложенный в построение портфеля, и построить модель Шарпа не удастся.

В силу изложенного требуемое многообразие необходимо получить с помощью такой модификации одноиндексной модели, которая сохранит в каждой модели многообразия возможность формирования инвестиционного портфеля Шарпа. Для этих целей предлагается использовать следующую модификацию одноиндексной модели:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \sum_{j=1}^m d_{ij} x_{ij} + \varepsilon_{it}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (24)$$

где d_{ij} – оцениваемый коэффициент при j -й дискретной переменной одноиндексной модели i -го актива; x_{ik} – k -я дискретная переменная в уравнении i -го актива, определяемая в соответствии с выражением:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & r_{it} - \alpha_i - \beta_i r_{It} - \sum_{j < k} d_{ij} x_{ij} \geq 0; \\ -1 & r_{it} - \alpha_i - \beta_i r_{It} - \sum_{j < k} d_{ij} x_{ij} < 0. \end{cases}$$

Модель позволяет изменить только свободный член одноиндексной модели, оставив без изменений остальные принципы формирования матрицы системы (24). Многообразие вариантов портфельного образа зависит от количества активов включаемых в портфель и от количества альтернативных вариантов, которые предусмотрены модифицированной одноиндексной моделью. Причем, каждый вариант многообразия должен иметь вероятностную оценку своей реальности. Чтобы понять технологию формирования портфельного образа инвестиционных решений упростим ситуацию рассмотрением задачи небольших размеров.

Будем предполагать, что портфель включает всего три актива и динамика каждого актива является временным ряд из альтернативных значений (низких и высоких) доходности. Портфельный образ инвестиционных решений в этом случае представляет собой многообразие из восьми вариантов. Формированию портфельного образа предшествует построение для каждого актива модели с двойной зависимостью от индекса, т.е. построение моделей вида:

$$r_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 r_{It} + d_1 x_{1t}, \quad r_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 r_{It} + d_2 x_{2t}, \quad r_{3t} = \alpha_3 + \beta_3 r_{It} + d_3 x_{3t},$$

$$P_{1t} = F_1(z_{1t}), \quad P_{2t} = F_2(z_{2t}), \quad P_{3t} = F_3(z_{3t}),$$

где $F_k(z_{kt})$ – функция распределения, позволяющая определить вероятность того, что доходность k -го актива низкая; z_{kt} – отклонение динамики индекса от тренда или среднего в случае отсутствия тренда.

Двойная зависимость реализуется через линейную и нелинейную взаимосвязь доходности актива и индекса. Причем через линейную зависимость реализуется непрерывная взаимосвязь доходности актива и доходности индекса, а через нелинейную – скачкообразное изменение доходности актива в зависимости от величины отклонения индекса от тренда или среднего значения.

Варианты прогнозного образа комбинируются из возможных ситуаций, которые могут возникнуть на фондовом рынке с изменением доходности данных активов. В случае трех активов с двумя уровнями доходности рассматриваются следующие комбинации с соответствующими вероятностями их реальности, вычисленными в предположении, что рассматриваемые случаи независимы:

$\alpha_1 + d_1$	$\alpha_1 + d_1$	$\alpha_1 + d_1$	$(1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3)$
$\alpha_1 + d_1$	$\alpha_1 + d_1$	$\alpha_1 - d_1$	$(1 - P_1)(1 - P_2)P_3$
$\alpha_1 + d_1$	$\alpha_1 - d_1$	$\alpha_1 + d_1$	$(1 - P_1)P_2(1 - P_3)$
$\alpha_1 - d_1$	$\alpha_1 + d_1$	$\alpha_1 + d_1$	$P_1(1 - P_2)(1 - P_3)$
$\alpha_1 + d_1$	$\alpha_1 - d_1$	$\alpha_1 - d_1$	$(1 - P_1)P_2P_3$
$\alpha_1 - d_1$	$\alpha_1 + d_1$	$\alpha_1 - d_1$	$P_1(1 - P_2)P_3$
$\alpha_1 - d_1$	$\alpha_1 - d_1$	$\alpha_1 + d_1$	$P_1P_2(1 - P_3)$
$\alpha_1 - d_1$	$\alpha_1 - d_1$	$\alpha_1 - d_1$	$P_1P_2P_3$.

Для каждого варианта строится портфели Шарпа, из которых состоит портфельный образ. Вероятностное описание портфельного образа

определяется на основе моделей бинарного выбора, которые строятся для каждого актива по данным исторического периода.

Какие новые возможности для обоснования инвестиционных решений получаются при использовании портфельного образа? Таких возможностей несколько. Можно, например, ориентироваться на стратегию, вероятность реальности которой наибольшая. Наибольшая не означает большая, поэтому надежность такого решения, как правило, невысокая. Вторая возможность ориентирована на использование в качестве стратегии математического ожидания портфельного образа. В эту стратегию включаются как те портфели, которые на упреждающем отрезке времени будут иметь положительную доходность, так и те, которые окажутся убыточными. Средний уровень не всегда обеспечивает выигрыш. Эта стратегия имеет смысл только для растущего рынка.

Особый интерес представляет реализация идеи, смысл которой в том, чтобы для формирования перспективной стратегии выбрать те варианты портфельного образа, которые построены для плохих ситуаций исторического периода. Тогда появляется надежда, что если ситуации упреждающего периода не хуже самых плохих ситуаций исторического периода, то на упреждающем периоде такая стратегия обеспечит положительную доходность. В некотором смысле предлагаемый подход напоминает минимаксную стратегию, применяемую в теории игр.

Приведем результаты вычислительного эксперимента для случая, когда портфель строится для трех активов. В расчетах использовались данные о котировке акций за период с 11.01.11 по 30.09.11. Тестирование вариантов портфельного образа осуществлялось с использованием пост упреждающего периода, в который были включены данные с 3.10.11 по 18.10.11.

В табл. 1 и табл. 2 приведены результаты построения модели с двойной зависимостью от индекса. Все построенные модели оказались статистически надежными, что обеспечивает высокий уровень доверия к проводимым расчетам.

Таблица 1

Коэффициенты и характеристики моделей двойной зависимости от индекса

Наименование характеристик	Акции портфеля		
	GMKN	LKOH	NOTK
α	0,1265	0,1088	0,2857
β	0,6516	0,7274	0,9193
d	1,1045	0,8613	1,3568
$S^2_{\text{ост}}$	0,5549	0,2654	0,5124
$S^2_{\text{рын}}$	3,5363	3,5363	3,5363
S^2	2,0565	2,1365	3,5012
R^2	0,7302	0,8758	0,8537

Таблица 2

Характеристики моделей бинарного выбора

GMKN	LKOH	NOTK	RTSI	α	i	β	Правая часть
1,1098	0,0000	0,0000	0,0000	1,2311	1,0000	0,6516	0
0,0000	0,5308	0,0000	0,0000	0,9701	1,0000	0,7274	0
0,0000	0,0000	1,0248	0,0000	1,6426	1,0000	0,9193	0
0,0000	0,0000	0,0000	7,0727	-0,1615	0,0000	-1,0000	0
1,2311	0,9701	1,6426	-0,1615	0,0000	0,0000	0,0000	15
1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1
0,6516	0,7274	0,9193	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0

В табл. 3 представлена сформированная система уравнений, решение которой позволяет получить структуру 1-го варианта стратегии портфельного образа. Система представляет собой результат дифференцирования функции Лагранжа, построенной для модели Шарпа.

Таблица 3

Модель первого варианта портфельного образа
(система уравнений после дифференцирования функции Лагранжа)

GMKN	LKOH	NOTK	RTSI	α	i	β	Правая часть
1,1098	0,0000	0,0000	0,0000	1,2311	1,0000	0,6516	0
0,0000	0,5308	0,0000	0,0000	0,9701	1,0000	0,7274	0
0,0000	0,0000	1,0248	0,0000	1,6426	1,0000	0,9193	0
0,0000	0,0000	0,0000	7,0727	-0,1615	0,0000	-1,0000	0
1,2311	0,9701	1,6426	-0,1615	0,0000	0,0000	0,0000	15
1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1
0,6516	0,7274	0,9193	-1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0

В табл. 4 представлены все варианты портфельного образа инвестиционного решения с соответствующими характеристиками.

Таблица 4

Портфельный образ и его характеристики

Наименования	Варианты портфельного образа							
	Вероятность	0,1467	0,1258	0,1340	0,1346	0,1149	0,1154	0,1230
GMKN	0,1663	0,3528	0,4698	-0,7518	0,8515	-0,2163	-0,3132	-0,2458
LKOH	-0,7554	0,5314	-0,7662	0,5025	-0,3937	-0,4726	0,8473	0,8013
NOTK	0,6204	-0,7653	0,4177	0,3690	-0,3432	0,8129	-0,4285	-0,5403
Доходность	-1,7802	-2,7003	-4,3431	8,1946	-7,9990	2,5552	3,9303	2,8082
Риски	0,4232	0,4709	0,4301	0,6135	0,5116	0,6678	0,3402	0,3729

Анализ характеристик позволяет сделать вывод о том, что среди вариантов портфельного образа есть такие, которые на упреждающем периоде показывают отрицательную доходность (убыток), и такие,

которые показывают положительную доходность. Естественно, инвесторов интересуют такие стратегии инвестирования, которые в будущем обеспечат доход. Идея, смысл которой заключался в том, что нужно ориентироваться на стратегии, построенные для худших ситуаций исторического периода, в данном расчете себя оправдала. Три последних стратегии показали хороший результат на упреждающем отрезке времени.

Список источников

1. Шарп, У. Инвестиции [текст] / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. – М.: ИНФРА-М, 2006. – XII, 1028 с.
2. Борисов, А.Н. Аппарат портфельного инвестирования в пространстве прогнозных оценок [текст] / А.Н. Борисов, Е.А. Ратушная // Финансы. Экономика. Стратегия. – Воронеж, 2010. – № 9. – С. 41 – 46.

PORTFOLIO IMAGE OF INVESTMENT DECISIONS ON STOCK MARKET

Borisov Aleksey Nikolayevich,

Dr. Sc. of Economy, Professor of the Chair of Economy and Finances of Voronezh Forest Academy; tvi01@mail.ru

Timchenko Olga Viktorovna,

Degree-seeking student of the Chair of Information Technologies in Economy of Voronezh State University; pgtushnik@mail.ru

Concept "portfolio image of investment decision" is introduced, possibility of construction of portfolio image on the bases of Sharpe's model. Results of computer experiment, confirmed the efficiency of this approach in practice of justification of investment decisions are discussed.

Keywords: Sharpe's model, portfolio image, investment decision, model with double dependence on index.