
ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА В УСЛОВИЯХ ГИСТЕРЕЗИСНОГО ПОВЕДЕНИЯ ЦЕНЫ

Лебедев Георгий Николаевич,

доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заместитель заведующего кафедрой системы автоматического и интеллектуального управления Московского авиационного института (национального исследовательского университета);
kaf301@mai.ru

Матвеев Михаил Григорьевич,

доктор технических наук, профессор кафедры программирования и информационных технологий факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета;
mgmatveev@yandex.ru

Мишин Максим Юрьевич,

аспирант Воронежского государственного архитектурно-строительного университета; m.on1ooker@gmail.com

Семёнов Михаил Евгеньевич,

доктор физико-математических наук, профессор Военного авиационного инженерного университета (г. Воронеж);
mkl150@mail.ru

Рассматривается модель производства на однопродуктовых рынках в условиях гистерезисного ценообразования. Приводится методика построения оптимальной с точки зрения достижения максимальной прибыли на конечном временном интервале, производственной стратегии.

Ключевые слова: гистерезис, оптимальная производственная стратегия, принцип максимума.

Введение

Гистерезисные эффекты проявляются в экономике на различных уровнях. В середине прошлого века экономисты отождествляли гистерезис на микроуровне с устойчивостью потребительских привычек [1].

На макроуровне гистерезисный эффект наблюдается в ситуации роста безработицы под влиянием некоторых стимулирующих факторов. После исчезновения этих факторов уровень безработицы достаточно продолжительное время находится на достаточно высоком уровне.

Качественно такая же ситуация возникает в условиях массивированной денежной эмиссии: темпы роста цен достаточно долго остаются высокими и после прекращения эмиссии [2]. Яркий пример гистерезиса приводится в [8] на примере десерта Ehrmann одноимённой компании. В начале восьмидесятых доля Ehrmann на немецком рынке была менее 8%. Для сравнения: доля Danone на этом рынке составляла 40%, а доли трёх основных конкурентов Elite, Chambourcy и Dr. Oetker колебались от 12 до 15%. Все конкуренты предлагали потребителям стандартный ассортимент продукции, в стандартной 125-граммовой упаковке, по одинаковым ценам. Проводимые ими рекламные компании также не сильно различались, поэтому для потребителей производимые ими товары были взаимозаменяемыми. Осенью 1982 г. Компания Ehrmann ввела 200-граммовую упаковку, которая из расчёта на 1 грамм продукта была на 30-40% дешевле. Конкуренты не стали реагировать на эти действия и заняли выжидательную позицию. В итоге, за следующие 8 месяцев доля Ehrmann возросла с 8 до 20%, а доля Danone упала с 40 до 30%. К середине 1983г. Gervais Danone отреагировала на новацию Ehrmann и ввела 200-граммовую упаковку по аналогичной цене, что позволило, за счёт резкого падения долей трёх основных конкурентов, восстановить позицию. Тем не менее, Ehrmann по-прежнему удерживал завоёванную ей долю рынка в 20%. Этот и ряд других примеров показывают, что гистерезисные эффекты играют важную роль в экономике и, также как и в других предметных областях, носители гистерезисных явлений нельзя рассматривать изолированно, так как они являются частью сложной системы.

Однако, к настоящему времени, практически отсутствует модельное и, как следствие, количественное описание гистерезисных эффектов в экономике. В настоящей работе предлагается динамическая модель производственной деятельности, учитывающая гистерезисные явления.

Гистерезисная модель ценообразования

Традиционно, для описания ценообразования использовались либо паутинообразная модель [3] в системах с дискретным временем, либо в моделях с непрерывным временем, уравнение вида:

$$\dot{p} = \gamma(S(p) - D(p)), \quad (1)$$

где p – цена, $S(p)$ и $D(p)$ – функции спроса и предложения. Единственное стационарное решение уравнения (1) абсолютно устойчиво и быстро достигается при традиционных представлениях о функциях спроса и предложения. Это соответствует практически постоянной цене в то время, как наблюдаемое изменение цен на потребительских рынках не всегда соответствует этой модели. В настоящей работе модель ценообразования предлагается подчинить следующей системе:

$$\dot{p} = f(u, p), \quad (2)$$

$$\dot{u} = \gamma(S(p) - D(p)), \quad (3)$$

где линия уровня функции $f(u, p) = 0$ имеет S-образную форму (см. рис. 1).

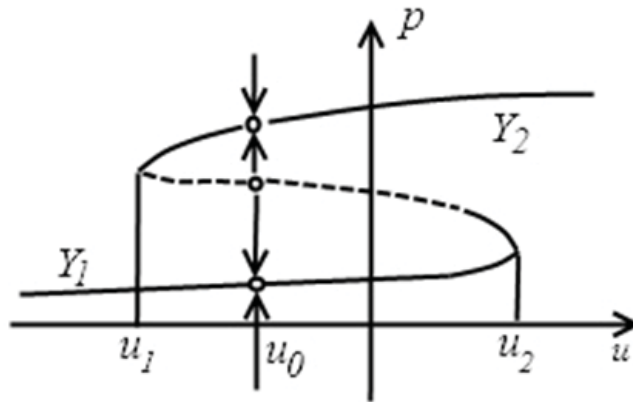


Рис. 1. Линия уровня $f(p,u)=0$

Если рассматривать уравнение (2) изолированно, считая $u(t)$ управляющим параметром, то его динамика допускает следующее качественное описание.

Как видно приведенного графика, эта кривая имеет одну точку пересечения с прямой $u = u_0$ при $u_0 < u_2$ и $u_0 > u_1$, и три точки пересечения при $u_1 < u_0 < u_2$.

Пусть в верхней части плоскости, отсеченной кривой, $f(p,u) > 0$, а в нижней $f(p,u) < 0$. При $u(t) = u(t_0)$, дифференциальное уравнение (2) описывает движение точки по вертикальной прямой, отображенное стрелками на рис. 2. Точки пересечения с кривой являются состояниями равновесия. Пунктирная линия – неустойчивые положения равновесия, сплошные линии Y_1 и Y_2 (графики некоторых функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$) – асимптотически устойчивые положения равновесия.

Приведенные условия позволяют качественно описать решение дифференциального уравнения (2) при медленно меняющемся управлении $u(t), (t \geq t_0)$. После малого промежутка времени (при котором $u(t)$ меняется незначительно) точка $(u(t), p(t))$ будет находиться в столь малой окрестности одной из кривых $y_1(t)$ или $y_2(t)$, что ее можно считать принадлежащей либо $y_1(t)$, либо $y_2(t)$ (т.е. $p(t) = y_1(u(t))$ или $p(t) = y_2(u(t))$). Для определенности допустим, что $u(t_1) < u_2$, $p(t) \approx y_1(u(t))$ и в дальнейшем выполнено условие $u(t) < u_2$ на интервале (t_1, t_2) , тогда точка $(u(t), p(t))$ не выйдет из достаточно малой окрестности кривой $y_1(t)$, т.е. можно считать выполненным равенство $p(t) = y_1(u(t))$. Если же $u(t_1) = u_2$ и $u(t)$ растет при $t > t_1$, то за короткий промежуток времени точка $(u(t), p(t))$ окажется в малой окрестности кривой $y_2(t)$, так что можно будет считать справедливым равенство $p(t) = y_2(u(t))$.

Продолжая подобные рассуждения, получим описание решения $p(t)$, совпадающее с описанием неидеального реле с пороговыми значениями u_2 и u_1 , если $y_1(t)$ является полупрямой $x = 0, (u < u_2)$, а $y_2(t)$ совпадает с полупрямой $x = 1, (u > u_1)$.

Динамика изменения цен в рамках системы (2), (3) описывается следующим образом. Обозначим через p_2 левый корень уравнения $f(u_2, p) = 0$, и через p_1 правый корень уравнения $f(u_1, p) = 0$. Тогда, если решение p^* уравнения $S(p) = D(p)$ удовлетворяет условию $p^* \notin [p_1; p_2]$, то система (2)-(3) имеет единственное устойчивое решение, т.е. цена практически не меняется. Если же $p^* \in [p_1; p_2]$, то система имеет устойчивый цикл, соответствующий циклическому изменению цен в окрестностях неустойчивого положения равновесия. Очевидно, что амплитуда циклического изменения цен зависит от выбора функции $f(u, p)$. В настоящей работе этот вопрос не рассматривается, однако, отметим, что идентификация параметров этой функции возможна стандартными эконометрическими методами.

Производственная модель

В работах [4 – 6] производственная модель формировалась либо в терминах производственных функций, либо аппроксимировалась линейными звеном с передаточными функциями 1-2 порядка. В настоящей статье производственную модель сформулируем следующим образом: обозначим через U темп производства, z – количество товаров у производителя. Тогда динамику изменения количества товара у производителя подчиним уравнению:

$$\dot{z} = U - NQ \frac{S(p)}{p} \quad (4)$$

где N – количество потребителей; $S(p)$ – доход потребителей; $Q\left(\frac{S}{p}\right)$ –

функция спроса, конкретный вид которой будет определён ниже. Пусть V – количество товаров у потребителей, k – коэффициент склонности к потреблению. Тогда динамика изменения этого параметра определяется уравнением:

$$\dot{V} = NQ \frac{S(p)}{p} - kV . \quad (5)$$

Функцию спроса можно определить различным образом. Так, в работе [4] предложена простейшая модель вида

$$Q\left(\frac{S(p)}{p}\right) = q - a \frac{p}{S(p)}, \quad (6)$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = S(p)q/a$ потребители отказываются от приобретения товара. Параметр a – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (6) является пороговой (то есть, $Q(S(p)/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Функцию предложения $D(p, z)$ определим соотношением

$$D(p, z) = z \frac{p}{p_{cr}}. \quad (7)$$

Обозначим через p_0 себестоимость производства единицы товара, и через k – коэффициент затрат на хранение, тогда прибыль производителя

на конечном временном интервале $[0; T]$ будет определяться соотношением

$$J(T) = \int_0^T \left(NpQ \left(\frac{S(p)}{p} \right) - Up_0 - k_1z \right) dt. \quad (8)$$

Естественно предположить, что максимальный темп производства ограничен: $0 \leq U \leq U_0$, где U_0 , – максимальный темп производства, ограниченный технологическими возможностями. Поставленная задача свелась к задаче оптимального управления: требуется найти такой темп производства, при котором функционал (8) достигает максимального значения, а объект описывается дифференциальными уравнениями (2)-(5) и алгебраическими соотношениями (6),(7). Эта задача может быть решена стандартными методами теории оптимального управления. Функция Гамильтона имеет вид

$$H = NpQ \left(\frac{S(p)}{p} \right) - Up_0 - k_1z + \lambda_1 f(p, u) + \lambda_2 (S(p) - D(p)) + \\ + \lambda_3 \left(U - NQ \left(\frac{S(p)}{p} \right) \right) + \lambda_4 \left(NQ \left(\frac{S(p)}{p} \right) - kV \right). \quad (9)$$

Оптимальный темп производства, в силу принципа максимума Л.С. Понтрягина будет определяться соотношением:

$$U^* = \arg \max_U H.$$

В силу линейности функции Гамильтона по U оптимальный темп производства будет равен

$$U^* = \begin{cases} U_0, & \text{если } \lambda_3 \geq p_0, \\ 0, & \text{если } \lambda_3 < p_0, \end{cases} \quad (10)$$

то есть, в рассматриваемой задаче оптимальный темп производства является релейной функцией. Сопряженные переменные удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial p} = -N \left(q - \tilde{k} \frac{s(p)}{p} \right) z - N \frac{\tilde{k}zs(p)}{p} - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial p} - \lambda_2 \gamma \left(-\frac{\tilde{k}zs(p)}{p^2} - \frac{z}{p_{\max}} \right) - \lambda_3 N \frac{\tilde{k}zs(p)}{p^2} + \lambda_4 N \frac{\tilde{k}zs(p)}{p^2}, \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial u}, \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial z} = -N \left(q - \tilde{k} \frac{s(p)}{p} \right) p + \tilde{k} - \lambda_2 \gamma \left(\left(q - \tilde{k} \frac{s(p)}{p} \right) + \frac{p}{p_{\max}} \right) + \lambda_3 N \left(q - \tilde{k} \frac{s(p)}{p} \right) - \lambda_4 N \left(q - \tilde{k} \frac{s(p)}{p} \right), \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial V} = k\lambda_4. \quad (11)$$

Так как рассматриваемая задача является задачей со свободными концами, то на сопряженные переменные накладываются граничные условия:

$$\lambda_i(T) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (12)$$

Система уравнений (2)-(7),(10),(11) является замкнутой. Результаты ее численного анализа при следующих значениях параметров: $\gamma = 2$, $k = 0,5$, $k_1 = 0,6$, $S = 5$, $q = 10$, $N = 10$, $U_0 = 3$, $T = 20$, нулевых начальных условий для фазовых переменных и функции $f(p, u) = u - 1 - (p - 3)^3 + p$, показаны на рис. 2 – рис. 4.

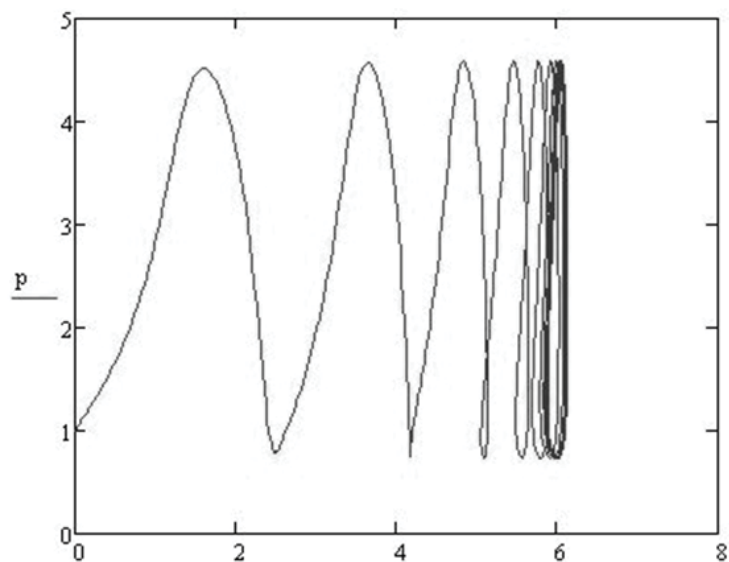


Рис. 2. Проекция фазового пространства на плоскость

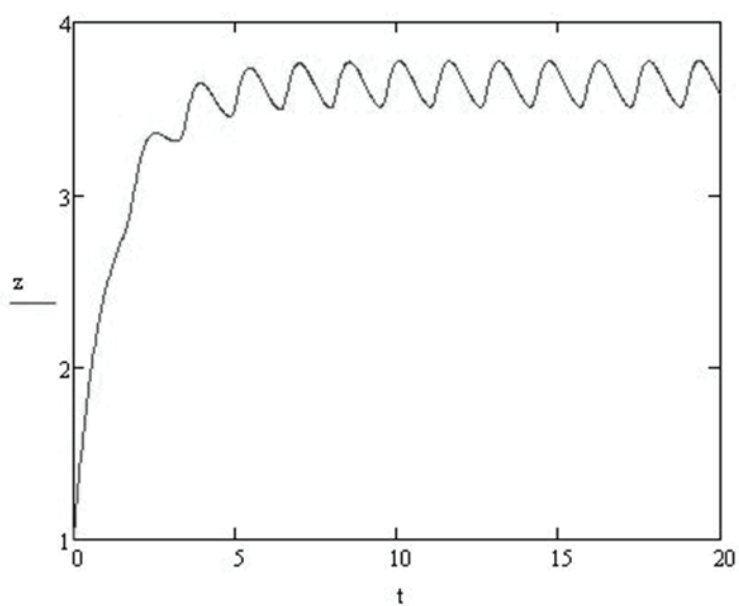


Рис. 3. Зависимость от времени количества товара у производителя

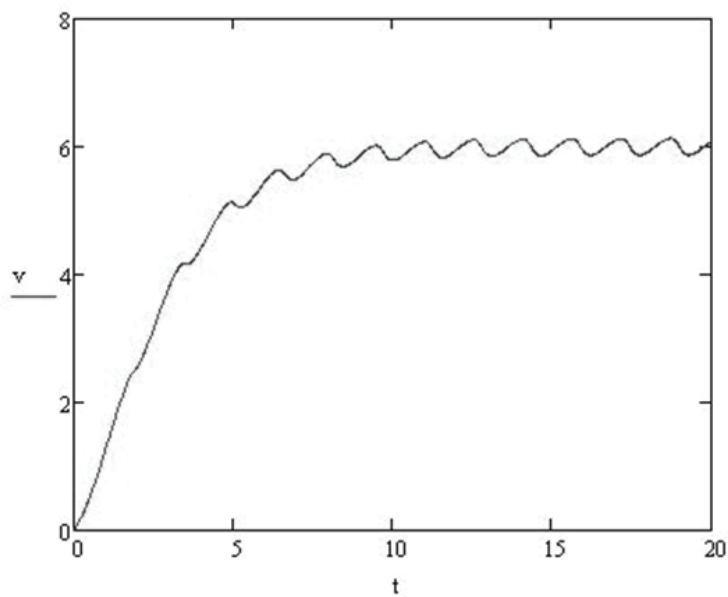


Рис. 4. Зависимость от времени количества товара у потребителей

Заключение

Как видно из графиков, в установившемся режиме фазовые переменные совершают слабые колебания в окрестности неустойчивого положения равновесия, обусловленные, в первую очередь, гистерезисным поведением цены. Темп производства включается на максимальную мощность почти на всем временном промежутке и обращается в ноль на 1% времени. Эти результаты, вытекающие из предложенных модельных представлений, находятся в соответствии со здравым смыслом и наблюдаемой динамикой производственных процессов.

Список источников

1. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов [текст] / В.В. Лебедев. – М.: Изограф, 1997.
2. Михайлова Е.А. Гистерезис в маркетинге: миф или реальность? [текст] / Е.А. Михайлова // Маркетинг в России за рубежом. – 2000. – №2.
3. Ламбен Жан-Жак. Менеджмент, ориентированный на рынок. Стратегический и операционный маркетинг [текст] / Жан-Жак Ламбен. – СПб.: Питер, 2007. – 800 с.
4. Чернавский Д.С. Ценообразование при максимальной прибыли [текст] / Д.С. Чернавский, А.В. Щербаков, Н.И. Старков, Б.А. Сулаков // Экономические и математические методы. – 1998. – Т. 34, вып. 2. – С. 44 – 55.
5. Чернавский Д.С. О социально-экономической структуре общества [текст] / Д.С. Чернавский, Б.А. Сулаков, О.Д. Чернавская, Г.Г. Пирогов, Н.И. Старков // Законодательство и экономика. – 1995. – Вып. 7/8. – С. 8 – 14.
6. Чернавский Д.С. Динамика экономической структуры общества [текст] / Д.С. Чернавский, Г.Г. Пирогов, О.Д. Чернавская, А.В. Щербаков, Б.А. Сулаков // Прикладная нелинейная динамика. – 1996. – Т. 4, №3. – С. 67 – 75.
7. Cook Steven A note on business cycle non-linearity in U.S. Consumption [текст] / Steven Cook; Journal of Applied Economics, vol. VI, №2, November 2003 — 247-253.
8. Gary Hamel. Opinion Strategy Innovation and the Quest for Value [текст] / Gary Hamel ; Sloan Management Review, winter 1998 – pp. 7-14.
9. Hermann Simon. Hysteresis in Marketing – A New Phenomenon? [текст] / Hermann Simon; Sloan Management Review, spring 1997 – pp. 39-48.
10. Mehta Anita. How the rich get richer? [текст] / Anita Mehta, A.S. Majumbar, J.M. Luck; 18 Apr 2005.
11. Stanley F. Stasch Characteristics of competing marketing strategies when defending market leadership [текст] / Stanley F. Stasch, JohnWald; Journal of strategic marketing, №5, 1997 – pp. 23 – 49.

DYNAMIC MODEL OF OPTIMAL MANUFACTURING IN CONDITION BEHAVIOR OF PRICE

Lebedev Georgy Nikolaevich,

Dr. Sc. of Technical Science, Professor, Honored science worker of Russian Federation, Member of the Academy of Navigation and Motion Control, Chief of the Chair of Automatic and Intelligent Control of Moscow Aviation Institute; kaf301@mai.ru

Matveev Michail Grigorevich,

Dr. Sc. of Technical Science, Professor of the Chair of Programming and Information technologies of Voronezh State University; mgmatveev@yandex.ru

Mishin Maxim Yurievich,

Second year Post-graduate student Voronezh State Architecture and Civil Engineering University; m.on1ooker@gmail.com

Semenov Michail Evgenevich,

Dr. Sc. of Physics and Mathematics, Professor of Voronezh Military Aviation Engineering University; mkl150@mail.ru

A model for single-product production to markets in the hysteretic pricing is discussed. The methods for the optimum in terms of maximizing profit over a finite time interval, the production strategy is considered.

Keywords: hysteresis, optimal production strategy, maximum principle.