

---

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ В ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ РИСКОВ

---

**Давнис Валерий Владимирович,**

доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета;  
vdavnis@mail.ru

Предлагается регрессионная модель, обеспечивающая воспроизведение процессов с динамикой случайных скачкообразных изменений. Показана возможность использования модели для получения результатов предельного и энтропийного анализа риск-эффектов.

**Ключевые слова:** риск-эффект, регрессия, энтропия, предельный анализ, логит-модель.

Формализованный подход к факторному анализу рисков, прежде всего, предусматривает возможность построения модели, отражающей природу взаимосвязи факторов с риск-эффектами, под которыми понимаются отклонения моделируемого показателя от ожидаемого уровня, происходящие в неизвестные заранее моменты времени. Как правило, риски реализуются на фоне нормально протекающих процессов, в силу чего модель должна отражать как эволюционное изменение процесса, не зависящее от рисков, так и скачкообразное, вызванное проявлением риск-эффектов. Примером для подражания при построении подобных моделей может служить предложенная Башелье в начале прошлого века модель, отражающая природу процессов фондового рынка

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (1)$$

где  $\mu$  – усредненная величина уровня доходности;  $\Delta t$  – достаточно малый отрезок времени, на котором эта модель имеет смысл;  $\sigma$  – средняя величина риска, измеренная среднеквадратическим отклонением;  $\varepsilon$  – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Первое слагаемое данного уравнения отвечает за непрерывное изменение моделируемого показателя, а второе слагаемое отражает возможность скачкообразного изменения, происходящего в моменты проявления риска. Модель предусматривает в каждом конкретном случае изменение уровня ожидаемой доходности в ту или иную сторону в зависимости от знака и

пропорционально значению случайной величины  $\varepsilon$ .

Эконометрический аналог этой модели, а точнее один из возможных вариантов эконометрического аналога, для случая, когда моделируется доходность финансового актива, можно записать в следующем виде:

$$r_{At} = a_0 + a_1 r_{It} + dx_t + \varepsilon_t, \quad (2)$$

где  $r_{At}$  – доходность финансового актива в момент времени  $t$ ;  $a_0, a_1$  – оцениваемые параметры той части модели, которая отвечает за тренд уровня доходности финансового актива;  $d$  – оцениваемый параметр стохастической составляющей модели, характеризующий средний уровень возможного отклонения фактически наблюдаемой доходности от тренда и интерпретируемый как величина риска;  $x_t$  – ненаблюдаемая дискретная переменная, принимающая случайным образом два значения: 1 или -1;  $\varepsilon_t$  – ненаблюдаемая случайная величина, характеризующая ту часть вариации моделируемой переменной, которая не объясняется, включенными в модель регрессорами.

В отличие от выражения (1), которое как нетрудно понять, имеет смысл только на бесконечно малых отрезках времени, эконометрическая модель сохраняет возможность корректного ее использования на всем промежутке времени, данные за который использовались для построения модели. Это позволяет применять ее как для анализа, так и для прогнозных расчетов.

Непрерывная составляющая этой модели представляет собой обычную регрессионную модель. В принципе тренд можно представить и с помощью других моделей экстраполяционного типа. Но вряд ли это будет иметь смысл, так как одноиндексная модель (модель описывающая зависимость доходности финансового актива от доходности индекса) является обоснованным результатом финансовой теории и довольно часто используется для содержательной интерпретации рыночной динамики, а также обоснования инвестиционных решений (модель Шарпа, CAPM).

Интерпретация параметра  $d$  как измерителя средней величины риска требует определенных пояснений. Такой подход к измерению риска, по всей вероятности, является оригинальным. В модели (2) с помощью  $d$  предусматривается измерение средней величины колебаний вокруг тренда. Это отличает данный подход от общепринятого, в котором риск оценивается по отклонениям от среднего значения. Это отличие не является принципиальным, так как можно построить модель, аналогичную модели (2), но без тренда, и тогда  $d$  будет измерителем колебаний вокруг среднего. Но есть и более существенные отличия, которые, по нашему мнению, играют существенную роль в анализе риск-эффектов.

Во-первых, измерение риска с помощью коэффициента регрессии, которым является  $d$ , имеет ряд преимуществ перед традиционным измерением с помощью  $\sigma$ . Смысл этих преимуществ в том, что одновременно с оценкой  $d$  по методу наименьших квадратов рассчитываются характеристики его статистической надежности. Это естественным образом повышает

надежность всех расчетов, в которых задействован риск. В принципе для  $\sigma$  тоже можно рассчитать характеристики надежности, но для этого требуются дополнительные расчеты, которые при решении практических задач не проводятся.

В то же время нужно помнить, что использование  $d$  в качестве измерителя риска, связано с необходимостью его оценивания. Поэтому возможны случаи, когда данные не обеспечивают построение адекватного регрессионного уравнения. В этом случае взамен дискретно-непрерывной модели можно строить дискретную модель, т.е. оценивать  $d$  по отклонениям от среднего

$$r_{At} = \bar{r}_{At} + dx_t + \varepsilon_t. \quad (3)$$

Но и эта модель не гарантирует возможность получения статистически значимой оценки измерителя риска. В подобной ситуации целесообразно использовать многоступенчатую оценку риска, которая получается, если в регрессионную модель включить несколько дискретных переменных. Например, двухступенчатая оценка риска получается, если в модель включить две дискретных переменных, т.е. оценивать модель вида

$$r_{At} = a_0 + a_1 r_{1t} + d_1 x_{1t} + d_2 x_{2t} + \varepsilon_t. \quad (4)$$

Применение многоступенчатых оценок риска приводит к усложнению анализа и интерпретации риск-эффектов, но, как правило, повышает адекватность выводов.

Во-вторых, использование величины  $d$  в качестве меры риска снимает вопрос, связанный с обсуждением ситуации, в которой риск необходимо понимать как симметричный эффект. Модель (2) позволяет изменить укоренившуюся точку зрения на риск, предоставив возможность описать механизм, в котором риск рассматривается только как потери.

Если получение оценок коэффициентов  $d$  с помощью МНК не вызывает никаких вопросов, то формирование дискретных независимых переменных требует специальных пояснений. Проблема определения этих переменных в том, что их значения являются ненаблюдаемыми величинами. Идентификация ненаблюдаемых значений возможна только на историческом периоде. Осуществляется это следующим образом.

Оценивается регрессионная часть модели (2):

$$\hat{r}_{At} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 r_{1t}, \quad (5)$$

и формируются значения дискретной переменной в соответствии со следующим правилом:

$$x_t = \begin{cases} 1, & r_{At} - \bar{r}_{At} \geq 0 \\ -1, & r_{At} - \bar{r}_{At} < 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Сформированной с помощью этого выражения переменной в модели отводится роль индикатора риск-эффектов. С ее помощью на историческом отрезке времени различают, когда (в какой момент времени) и какие скачкообразные изменения процесса наблюдались. Используя в качестве значений переменной  $x_t$  восстановленный информационный поток, можно

оценить все коэффициенты регрессионной модели (2)

$$\hat{r}_{At} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 r_{It} + \hat{d}x_t, \quad (7)$$

с помощью которой воспроизводится динамика ретроспективного периода, в которой учтены имевшие место риск-эффекты. Если модель обеспечивает достаточно высокую точность воспроизведения, то ее можно использовать для анализа и прогнозных расчетов. Причем варьирование переменной  $x_t$  обеспечивает возможность воспроизведения риск-эффектов. Однако, особый интерес вызывает не воспроизведение исторического периода, а возможность предсказания ожидаемых ситуаций упреждающего периода. Результаты анализа исторического периода, как правило, содержат в себе выводы, касающиеся упреждающего периода. Но эти выводы могут носить только вероятностный характер. Поэтому возникает необходимость в построении дополнительной модели, предусматривающей получение вероятностных оценок реальности каждой из ожидаемых ситуаций.

Вопросы вероятностного описания предпочтительности ожидаемых ситуаций принято рассматривать при моделировании рыночных процессов. Например, в биномиальной модели рынка предпочтительность вариантов определяется с помощью бернуллиевской вероятности. От периода к периоду величина этой вероятности остается неизменной и ее можно интерпретировать как частоту появления одного из событий, например, высокого уровня доходности. В этой интерпретации можно увидеть подсказку, в соответствии с которой вероятность следует оценивать как частоту появления высокой доходности на протяжении всего исторического периода. К сожалению, полученные таким образом оценки будут малоинформативными, так как принцип, на основе которого определялся уровень доходности при построении эконометрической модели, предусматривал деление отклонений по знаку на две почти равные части. Возможно, это не противоречит реальности, но без сомнения снижает прогностические возможности модели, так как равновероятность не позволяет сделать вывод о предпочтительности. Поэтому целесообразно ориентироваться на эконометрический подход, который в отличие от статистического, предусматривает поиск эмпирических зависимостей, объясняющих механизм проявления исследуемых явлений, в том числе и обусловленность предпочтения вариантов в конкретной ситуации. Чтобы в предлагаемом подходе можно было увидеть содержательный смысл, сделаем ряд естественных предположений:

1. Будем считать, что на вероятность появления риск-эффекта существенное влияние оказывают события, происходящие за рамками финансового рынка. Причем можно почти безошибочно на качественном уровне определить направление воздействия каждого из этих событий. Реальность таких событий и возможность их качественной оценки подтверждается результатами фундаментального анализа.

2. Будем также предполагать, что величина риск-эффекта зависит от

важности события, с которым он связан, т.е. величина риск-эффекта, в некотором смысле, пропорциональна важности соответствующего события. Важность этого события может оцениваться в баллах, для которых можно построить эмпирическую шкалу, предоставляющую возможность измерения фактора субъективно-аналитической природы.

Смысл эконометрического подхода заключается в построении модели специального вида, которую принято называть моделью бинарного выбора. Обычно для этих целей используется логит- или пробит-модель. На наш взгляд, логит-модель предпочтительней, так как логистическое распределение удобно при проведении всевозможных расчетов, и, кроме того, оно обладает более толстыми хвостами по сравнению с нормальным распределением, что, по мнению многих специалистов, обеспечивает более точное воспроизведение вероятностной природы фондового рынка.

Построение логит-модели как и любой регрессионной модели предполагает наличие зависимой и независимой переменных. В качестве значений зависимой переменной естественно использовать значения переменной  $x_t$ , предварительно заменив отрицательные значения на нулевые, т.е.

$$y_t = \begin{cases} 1, & x_t = 1 \\ 0, & x_t = -1 \end{cases} \quad (8)$$

Формирование независимой переменной требует разъяснения. Не существует единый фактор, который можно было бы использовать для этих целей. Как правило, каждый раз причина, из-за которой происходит отклонение моделируемого показателя от нормы, сама по себе является случайной. Возможно, некоторые из них повторяются случайным образом, но не являются регулярно действующими. Факторы риска, которые принято выделять в рамках экономического анализа, скорее обладают риск-потенциалом, а не систематическим воздействием на риск. Поэтому вопрос определения независимой переменной для модели бинарного выбора требует специального решения.

Риски финансовых активов, по преимуществу тесно связаны с общей рыночной ситуацией, представление о которой дает рыночный индекс. Поэтому предлагается в качестве независимой переменной в модели бинарного выбора использовать отклонение доходности индекса от своего тренда или средней величины. Для реализации этой идеи строится модель, описывающая динамику рыночного индекса:

$$r_{It} = c_0 + c_1 r_{It-1} + \delta_t, \quad (9)$$

которая, после оценивания, используется для определения остатков:

$$z_t = r_{It} - \hat{c}_0 + \hat{c}_1 r_{It-1}, \quad (10)$$

принимаемых за независимую переменную модели бинарного выбора:

$$P(y_t = 0 | z_t) = F(z_t) = \frac{e^{b_0 + b_1 z_t}}{1 + e^{b_0 + b_1 z_t}}. \quad (11)$$

Тогда модель (2) после двукратного взятия математического ожидания может быть записана следующим образом:

$$\hat{r}_{At} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 r_{It} + \hat{d} - 2\hat{d}F(z_t). \quad (12)$$

Полученное уравнение следует понимать как регрессионную модель с двойной зависимостью от индекса (линейной и нелинейной). В модели присутствует риск-эффект, как вероятностная составляющая этой модели. В зависимости от вероятности риск-эффект может оказывать либо позитивное, либо негативное воздействие на моделируемый показатель.

Предельный анализ этого уравнения

$$\frac{dr_{At}}{dr_{It}} = \hat{a}_1 - 2\hat{d}F(z_t)(1 - F(z_t))\hat{b}_1, \quad (13)$$

показывает, что изменение рыночного индекса на единицу, при условии, что эта единица достаточно мала, изменяет доходность актива на значение коэффициента регрессии скорректированного на величину пропорциональную риск-эффекту. Направление корректировки зависит от знака коэффициента логистической функции. При положительном  $\hat{b}_1$  вероятность негативного риска растет, и, следовательно, предельный эффект корректируется в сторону снижения, в случае отрицательного  $\hat{b}_1$  все происходит наоборот – предельный эффект корректируется в сторону увеличения.

Энтропийная оценка каждой текущей ситуации:

$$H_t = -F(z_t)\log_2 F(z_t) - (1 - F(z_t))\log_2(1 - F(z_t)), \quad (14)$$

в сочетании с предельным анализом показывает, что предельный эффект при прочих равных условиях достигает своего максимального значения в ситуации полной неопределенности (уровень энтропии максимальный).

Данный результат не противоречит логике обоснования управленческих решений и позволяет сделать вывод о том, что самое трудное, самое «дорогое» решение принимается в ситуации полной неопределенности. Дальнейшее развитие регрессионного анализа риск-эффектов должно предусматривать исследования случаев, когда адекватное описание динамики получается с использованием многоступенчатых риск-эффектов, которые упоминались в статье, а также исследования возможностей применения подобного рода моделей для обоснования риск-предикторных решений.

#### **Список источников**

1. Давнис В.В. Прогнозные модели экспертных предпочтений: монография / В.В. Давнис, В.И. Тинякова; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. – 248 с.

---

## **USAGE OF REGRESSION MODEL IN FACTOR ANALYSIS OF RISKS**

---

**Davnis Valery Vladimirovich,**

Dr. Sc. of Economy, Professor, Chief of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University; vdavnis@mail.ru

Regression model is proposed which provides playback of dynamic processes with random abrupt changes. The possibility of applying the model to obtain the results of the limit and entropy analysis of risk effects is presented.

**Keywords:** risk-effect, regression, entropy, marginal analysis, logit-model.