УДК 517.977

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ ПРИ СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ФАКТОРАХ

Задорожний Владимир Григорьевич,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейных колебаний Воронежского государственного университета; zador@amm.vsu.ru
Якубенко Илья Павлович,
аспирант Воронежского государственного университета; yakubenko@gmail.com

Рассматривается линейная управляемая система, коэффициент которой является случайным процессом. Даются математические модели управления и находятся условия оптимальности первых двух моментных функций оптимального управления, обеспечивающего минимум квадратичного функционала качества управления.
Ключевые слова:

1. Введение. Обычно требуется производить продукцию (например, электроэнергию) в заданных объемах $\varphi(t)$, где t - время. Пусть процесс производства описывается дифференциальным уравнением $\frac{dy}{dt} = f(t,x,v)$, где $y(t)$ объем производства в момент времени t, $v(t)$ - управление. При этом выполняется равенство $\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(t,\varphi(t),0)$. Пусть $x(t) = y(t) - \varphi(t)$ - отклонение от требуемого объема $\varphi(t)$, тогда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} = f(t,y,v) - f(t,\varphi,0).$$

Если ограничиться линейными слагаемыми, то приходим к уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f(t,y,0)}{\partial y}\Big|_{y=\varphi} x + \frac{\partial f(t,\varphi,v)}{\partial u}\Big|_{v=0} v.$$

Последнее слагаемое можно считать управлением $u(t)$ и уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)x + u(t), \tag{1}$$

где $\varepsilon(t) = \frac{\partial f(t,y,0)}{\partial y}\Big|_{e=\varphi}$.

Обычно ненулевое управление $u(t)$ связано с расходами, поэтому управления желательно выбирать близкими к нулю.

Мы приходим к **основной нечетко поставленной задаче:** *На заданном промежутке времени* $[t_0,T]$ *нужно найти малое управление* $u(t)$, *при котором решение* $x(t)$ *уравнения (1) будет малым на всем промежутке* $[t_0,T]$.

Для решения этой задачи можно использовать различные математические модели.

1. Будем считать, что задано начальное условие

$$x(t_0)=x_0\,. \tag{2}$$

и известна непрерывная функция $\varepsilon(t)$. Тогда выберем непрерывные функции $A(t)\ge 0, B(t)>0$, число $c\ge 0$ и определим критерий качества управления

$$I(x,u)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A(t)x^2(t)+B(t)u^2(t)]dt+\frac{c}{2}x^2(T)\,. \tag{3}$$

Теперь можно сформулировать математическую задачу:

1. Найти кусочно-непрерывную на отрезке $[t_0,T]$ *функцию* $u(t)$, *при которой функционал (3) принимает минимальное значение и при этом выполняются условия (1), (2).*

Эта задача хорошо изучена (см., например, [1]). Задача усложняется, если $\varepsilon(t)$ является случайным процессом. Здесь возможны два существенно разных варианта.

Первый – в момент выбора управления $u(t)$ известна реализация $\varepsilon(t)$. При этом можно, решая детерминированную задачу 1, управление выбирать в зависимости от реализации $\varepsilon(t)$ и затем найти соответствующую траекторию $x(t)$ и найти математическое ожидание для функционала (3). Такой подход рассматривается чаще всего, но при этом, вдобавок, уравнение (1) записывают в форме стохастического дифференциального уравнения [1].

Второй – в момент выбора управления $u(t)$ реализация $\varepsilon(t)$ не известна. Тогда предыдущий подход реализовать не удается. В этом случае математическую задачу можно поставить так.

2.Считать, что $u(t)$ *выбирается случайным образом независимо от реализаций* $\varepsilon(t)$, $x(t)$ *является решением уравнения (1), но математическое ожидание* $Mu(t)$ *требуется найти такое, при котором функционал*

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(t)M^2(x(t))+B_1(t)M^2(u(t))]dt+\frac{c_1}{2}M^2(x(T))$$

принимает наименьшее значение.

Отметим, что, решая эту задачу, мы найдем всего лишь математическое ожидание $M(u(t))$ для управления $u(t)$, а остальные моментные функции управления не будут определены. Вторую моментную функцию управления $M(u(t)u(\tau))$ можно найти как решение такой задачи.

3. Считать, что $M(u(t))$ *является решением задачи 2. Требуется найти* $M(u(t)u(\tau))$*, которое доставляет минимум функционалу* $I_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)M^2(x(s_1)x(s_2)) + B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1ds_2 + \frac{c_2}{2}M^2(x^2(T)).$

Приведем еще одну задачу, объединяющую задачи 2 и 3.

4. Считать, что управление $u(t)$ *не зависит от* $\varepsilon(t)$*, но* $M(u(t))$ *и* $M(u(t)u(\tau))$ *требуется выбрать так, чтобы функционал*

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(t)M^2(x(t)) + B_1(t)M^2(u(t))]dt + \frac{c_1}{2}M^2(x(T)) \quad +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)M^2(x(s_1)x(s_2)) + B_2(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1ds_2 + \frac{c_2}{2}M^2(x^2(T))$$

имел наименьшее значение.

Разумеется, можно поставить и другие математические задачи, которые уточняют **основную нечетко поставленную задачу**. Возникает вопрос: Какая из них лучше? Ответ состоит в следующем. Если есть много задач, то можно задать дополнительные требования, которые и определят лучшую, но все сформулированные задачи представляют практический интерес. Отметим также, что если известны реализации $\varepsilon(t)$, то еще неясно, следует ли выбирать управление $u(t)$, являющееся решением детерминированной задачи (1) для каждой реализации $\varepsilon(t)$.

2. Решение задачи 2. Пусть случайный процесс $\varepsilon(t)$ задан характеристическим функционалом [2]

$$\varphi_\varepsilon(v) = M(\exp(i\int_{t_0}^{T}\varepsilon(s)v(s)ds)),$$

управление $u(t)$ выбирается случайным образом и не зависит от $\varepsilon(t)$.

Используя известную формулу решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения, выпишем решение задачи (1), (2) для реализации $\varepsilon(t)$

$$x(t) = x_0\exp(\int_{t_0}^{t}\varepsilon(s)ds) + \int_{t_0}^{t}\exp(\int_{s}^{t}\varepsilon(\tau)d\tau)u(s)ds.$$

При условии, что x_0 не зависит от $\varepsilon(t)$ и $u(t)$, находим

$$M(x(t)) = M(x_0)M(\exp(\int_{t_0}^{t}\varepsilon(s)ds)) + \int_{t_0}^{t}M(\exp(\int_{s}^{t}\varepsilon(\tau)d\tau))M(u(s))ds. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение функцию $\chi(s,t,\tau)$, определенную следующим образом: $\chi(s,t,\tau) = sign(\tau - s)$ если τ принадлежит отрезку с концами s и t и равна нулю в противном случае. Нетрудно проверить, что (4) можно записать с помощью характеристического функционала φ_ε

$$M(x(t)) = M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t)) + \int_{t_0}^{t}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))M(u(s))ds. \quad (5)$$

Подставим (5) в выражение для функционала I_1, получим

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}[A_1(t)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t))+\int_{t_0}^{t}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))M(u(s))ds]^2+B_1(t)M^2(u(t))]dt+$$

$$+\frac{c_1}{2}[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))+\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds]^2$$

Таким образом, $M(u(t))$ следует выбрать так, чтобы оно доставляло минимум полученному функционалу.

В точке минимума вариационная производная функционала обращается в нуль. Выпишем это условие

$$\frac{\delta I_1(M(u))}{\delta M(u(\tau))}=$$

$$\int_{t_0}^{T}A_1(t)[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t))+\int_{t_0}^{t}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))M(u(s))ds]\begin{bmatrix}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t)) & npu\ t_0\le\tau\le t\\ 0\ npu\ t<\tau\le T\end{bmatrix}dt+$$

$$+B(\tau)M(u(\tau))+c_1[M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))+\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))M(u(s))ds]\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T))=0 \quad (6)$$

Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{t_0}^{T}A_1(t)\int_{t_0}^{t}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))M(u(s))ds\begin{bmatrix}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t))\ npu\ t_0\le\tau\le t\\ 0\ npu\ t<\tau\le T\end{bmatrix}dt=$$

$$=\int_{t_0}^{T}ds\int_{s}^{T}A_1(t)\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))M(u(s))\begin{bmatrix}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t))\ npu\ t_0\le\tau\le t\\ 0\ npu\ t<\tau\le T\end{bmatrix}dt=$$

$$=\int_{t_0}^{T}ds\int_{s}^{T}A_1(t)\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))\begin{bmatrix}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t))\ npu\ t_0\le\tau\le t\\ 0\ npu\ t<\tau\le T\end{bmatrix}M(u(s))dt.$$

Из (6) получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода [3] для нахождения $M(u(t))$

$$B(\tau)M(u(\tau))=-\int_{\tau}A_1(t)M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,t))\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t))dt-$$

$$-c_1M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T))-c_1\int_{t_0}^{T}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,T))\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T))M(u(s))ds-$$

$$-\int_{t_0}^{T}(\int_{s}^{T}A_1(t)\varphi_\varepsilon(-i\chi(s,t))\begin{bmatrix}\varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t))\ npu\ t_0\le\tau\le t\\ 0\ npu\ t<\tau\le T\end{bmatrix}dt)M(u(s))ds \quad . (7)$$

Таким образом, для нахождения $M(u(t))$ нужно решить детерминированное уравнение Фредгольма (7).

Отметим, что, если моментные функции более высокого порядка управления $u(t)$ не представляют интереса (это может быть крайне редко), то управление $u(t)$ может выбираться детерминированным – равным решению уравнения (7). Обычно требуется знать хотя бы вторую моментную функцию управления. Ее можно найти, решая задачу 3.

3. Задача 3. Считаем, что заданные непрерывные функции $A_2(s_1,s_2)\ge 0, B_2(s_1,s_2)>0$ симметричны по переменным s_1,s_2, и управление $u(t)$ выбирается независимо от ε, тогда [2, стр. 222] вторая моментная функция решения задачи (1), (2) имеет вид

$$M(x(t)x(s)) = M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s) - i\chi(t_0,t)) +$$

$$+ M(x_0)[\int_{t_0}^{t} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,t) - i\chi(t_0,s))M(u(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s) - i\chi(t_0,t))M(u(\tau))d\tau] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{t_0}^{s} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s) - i\chi(\xi,t))M(u(\tau)u(\xi))d\tau\,. \quad (8)$$

Выпишем функционал I_2

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)(M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s_1) - i\chi(t_0,s_2)) +$$

$$+ M(x_0)[\int_{t_0}^{s_1} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_1) - i\chi(t_0,s_2))M(u(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{s_2} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_2) - i\chi(t_0,s_1))M(u(\tau))d\tau] +$$

$$+ \int_{t_0}^{s_1} d\xi \int_{t_0}^{s_2} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_2) - i\chi(\xi,s_1))M(u(\tau)u(\xi))d\tau)^2 + B(s_1,s_2)M^2(u(s_1)u(s_2))]ds_1ds_2 +$$

$$+ \frac{c_2}{2}[M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-2i\chi(t_0,T)) + 2M(x_0)\int_{t_0}^{T} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T) - i\chi(t_0,T))M(u(\tau))d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} d\xi \int_{t_0}^{T} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T) - i\chi(\xi,T))M(u(\tau)u(\xi))d\tau]^2\,.$$

Вторая моментная функция управления $M(u(t)u(s))$ может быть найдена из условия равенства нулю вариационной производной

$$\frac{\delta I_2}{\delta M(u(t)u(s))} = \int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}[A_2(s_1,s_2)(M(x_0)\varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0,s_1) - i\chi(t_0,s_2)) +$$

$$+ M(x_0)[\int_{t_0}^{s_1} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_1) - i\chi(t_0,s_2))M(u(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{s_2} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s_2) - i\chi(t_0,s_1))M(u(\tau))d\tau] +$$

$$+ \int_{t_0}^{s_1} d\xi \int_{t_0}^{s_2} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,s) - i\chi(\xi,t))M(u(\tau)u(\xi))d\tau) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \varphi_\varepsilon(-i\chi(t,s_1) - i\chi(s,s_2))\ \textit{при}\ t_0 \le t \le s_1, t_0 \le s \le s_2 \\ 0 \quad \textit{в противном случае} \end{Bmatrix}]ds_1ds_2 +$$

$$+ B(t,s)M(u(t)u(s)) +$$

$$+ c_2[M(x_0^2)\varphi_\varepsilon(-2i\chi(t_0,T)) + 2M(x_0)\int_{t_0}^{T} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T) - i\chi(t_0,T))M(u(\tau))d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} d\xi \int_{t_0}^{T} \varphi_\varepsilon(-i\chi(\tau,T) - i\chi(\xi,T))M(u(\tau)u(\xi))d\tau]\varphi_\varepsilon(-i\chi(t,T) - i\chi(s,T)) = 0\,. \quad (9)$$

4. Заключение. В экономических задачах случайные факторы являются неизбежностью и порой могут играть решающую роль. В управляемой системе управление также оказывается случайным процессом. Для практической деятельности важнейшими характеристиками управления являются первые моментные функции. Предложенный метод позволяет свести задачу нахождения этих функций к задаче нахождения решений детерминированных интегральных уравнений Фредгольма второго рода (7) и (9). Такие уравнения достаточно хорошо изучены.

Возникает естественный вопрос: как же нужно выбирать управление? Можно в качестве управления, например, взять гауссовский случайный процесс с найденными математическим ожиданием и ковариационной функциями. Можно взять и другой процесс, например, равномерно распределенный с этими же математическим ожиданием и ковариационной функцией. При этом $M(u(t))$ и $M(x(t)x(s))$ не изменятся, будут меняться только моментные функции более высокого порядка.

Отметим также, что моментные функции $M(u(t))$ и $M(x(t)x(s))$ можно вычислить по формулам (5) и (8). Полученные результаты носят общий характер – требуется знать лишь характеристический функционал процесса ε, поэтому легко рассмотреть различные частные случаи, например, нормально распределенный процесс, равномерно распределенный процесс, процесс Лапласа, дискретно распределенный процесс и другие.

Список источников

1. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления/ В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р.Носов. – М.: Высшая школа, 1998. – 574 с.

2. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа/ В.Г. Задорожний. – М. – Ижевск: РХД, 2006. – 316 с.

3. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, - 1968. – 496 с.

MODELS OF MANAGEMENT OF PRODUCTION IN RANDOMLY CHANGING FACTORS

Zadorozhniy Vladimir Grigoryevich,
Dr. Sc. of Physics and Mathematics, Professor, Chief of the Chair of Nonlinear Oscillations of Voronezh State University;
zador@amm.vsu.ru
Yakubenko Ilya Pavlovich,
Post-graduate student of Voronezh State University;
yakubenko@gmail.com

A linear control system is considered, its coefficient is a random process. Mathematical model of management are provided and optimal conditions are the first two moment functions of optimal control, providing a minimum of a quadratic functional of quality of management.