УДК 517.977

О МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Задорожний Владимир Григорьевич,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейных колебаний Воронежского государственного университета; zador@amm.vsu.ru

Для однопродуктовой модели Леонтьева в виде скалярного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами получена формула для математического ожидания решения и проведен анализ влияния на систему случайных факторов.

Ключевые слова: модель Леонтьева, математическое ожидание, распределение Лапласа, уравнение со случайными коэффициентами.

1. Введение. Рассмотрим однопродуктовую модель Леонтьева [1, 2]

$$X = aX + b\frac{dX}{dt} + C, \tag{1}$$

где t - время, $X(t)$ – интенсивность выпуска валовой продукции (количество валовой продукции, производимой в единицу времени), C - интенсивность потребления, a - коэффициент производственных материальных затрат, b - коэффициент приростной фондоемкости. Равенство (1) показывает, как валовая продукция распределяется на производственные затраты aX, потребление C и прирост основных производственных фондов bX'. Уравнение (1) перепишем в виде

$$X' = \varepsilon_1(t)X + \varepsilon_2(t), \tag{2}$$

где $\varepsilon_1 = \frac{1-a}{b}$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{b}C$.

Рассмотрим нашу модель на промежутке времени $[0,T]$ с начальным условием

$$X(0) = X_0 \tag{3}$$

Эта модель хорошо изучена при детерминированных функциях $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. На практике всегда присутствуют факторы, которые можно моделировать как случайные процессы. Мы рассмотрим задачу (2), (3) при условии, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ являются случайными процессами, заданными характеристическим функционалом, и независимыми со случайным начальным условием X_0. Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ представляют собой детерминированные функции, возмущенные белым шумом, то используется теория стохастических дифференциальных уравнений [4]. Мы изучаем задачу со случайными процессами Лапласа, причем процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ могут быть зависимыми.

2. Характеристики случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$**.** Характеристическим функционалом процессов называется функционал [3]

$$\psi(u,v) = M(\exp(i\int_0^T [\varepsilon_1(s)u(s) + \varepsilon_2(s)v(s)]\,ds))$$

Отметим, что при заданном характеристическом функционале моментные функции процессов находятся с помощью вариационного дифференцирования [3], например

$$\frac{\delta\psi(u,v)}{\delta u(t)}\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = iM(\varepsilon_1(t)), \quad \frac{\delta\psi(u,v)}{\delta v(t)}\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = iM(\varepsilon_2(t)) \quad (4)$$

$$\frac{\delta^2\psi(u,v)}{\delta u(t)\delta v(\tau)}\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = i^2 M(\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(\tau))$$

Пусть $a(t)$ – векторная функция с координатами a_1, a_2 и $u(t)$ векторная функция с координатами u_1, u_2. Через e_1, e_2 обозначаются единичные векторы в $\mathbb{R}^2$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ обозначим $\langle a, u\rangle$ и пусть

$$B(s_1,s_2) = \begin{pmatrix} b_{11}(s_1,s_2) & b_{12}(s_1,s_2) \\ b_{12}(s_1,s_2) & b_{22}(s_1,s_2) \end{pmatrix},$$

$$R = \\ = \int_0^T\int_0^T b_{11}(s_1,s_2)\,u_1(s_1)\,u_1(s_2)ds_1 ds_2 \int_0^T\int_0^T b_{22}(s_1,s_2)\,u_2(s_1)\,u_2(s_2)ds_1 ds_2$$

$$Z = 1 + \int_0^T\int_0^T \langle B(s_1,s_2)u(s_1), u(s_2)\rangle ds_1 ds_2 + R$$

Пусть случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ заданы характеристическим функционалом

$$\psi(u) = \frac{\exp(i\int_0^T \langle a(s), u(s)\rangle ds)}{Z}$$

Выясним значение входящих функций $a(t)$ и $B(s_1,s_2)$. Для этого воспользуемся свойством (4). Вычислим вариационную производную

$$\frac{\delta\psi(u)}{\delta u_1(t)}\Big|_{u=0} = \\ = \frac{\exp(i\int_0^T\langle a(s),u(s)\rangle ds[Zia_1(t) - 2\int_0^T\langle B(t,s_2)u(s_2),e_1\rangle ds_2 - \frac{\delta R}{\delta u_1(t)}]}{Z^2}\Big|_{u=0} \\ = ia_1(t)$$

Тогда, согласно (4), $a_1(t)$ является математическим ожиданием случайного процесса $\varepsilon_1(t)$, т.е. $a_1(t) = M(\varepsilon_1(t))$. Аналогично получаем $a_2(t) = M(\varepsilon_2(t))$.

Вычислим вторую вариационную производную

$$\frac{\delta^2\psi(u)}{\delta u_1(t)\delta u_2(\tau)}|_{u=0} = \frac{\exp\left(i\int_0^T\langle a(s),u(s)\rangle ds\right)}{Z^4}\{[Zi^2 a_1(t)a_2(\tau) -$$

$$-2ia_1(t)\int_0^T\langle B(\tau,s_2)u(s_2),e_2\rangle ds_2 - 2\langle B(t,\tau)e_2,e_1\rangle -$$

$$-2ia_2(\tau)\int_0^T\langle B(t,s_2)u(s_2),e_1\rangle ds_2 - \frac{\delta R}{\delta u_1(t)}ia_2(\tau) - \frac{\delta^2 R}{\delta u_1(t)\delta u_2(\tau)}]Z^2 -$$

$$-2Z\left(\int_0^T\langle B(\tau,s_2)u(s_2),e_2\rangle ds_2\right.$$

$$\left.+\frac{\delta R}{\delta u_2(\tau)}\right)\left[Zia_1(t) - 2ia_1(t)\int_0^T\langle B(\tau,s_2)u(s_2),e_2\rangle ds_2\right]\}|_{u=0} =$$

$$= -a_1(t)a_2(\tau) - 2b_{12}(t,\tau)$$

Отсюда следует, что

$$b_{12}(t,\tau) = \frac{1}{2}[M(\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(\tau)) - M(\varepsilon_1(t)M(\varepsilon_2(\tau))]$$

Аналогично вычисляется

$$b_{11}(t,\tau) = \frac{1}{2}[M(\varepsilon_1(t)\varepsilon_1(\tau)) - M(\varepsilon_1(t)M(\varepsilon_1(\tau))]$$

$$b_{22}(t,\tau) = \frac{1}{2}[M(\varepsilon_2(t)\varepsilon_2(\tau)) - M(\varepsilon_2(t)M(\varepsilon_2(\tau))]$$

3. Математическое ожидание решения задачи (2), (3). Если известны реализации $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$, то легко выписывается решение задачи (2), (3)

$$X(t) = X_0\exp\left(\int_0^t\varepsilon_1(s)ds\right) + \int_0^t\exp\left(\int_s^t\varepsilon_1(\tau)d\tau\right)\varepsilon_2(s)ds$$

и его математическое ожидание

$$M(X(t)) = M(X_0)M(\exp\left(\int_0^t\varepsilon_1(s)ds\right)) + \int_0^t \mathrm{M}(\exp\left(\int_s^t\varepsilon_1(\tau)d\tau\right)\varepsilon_2(s))ds$$

Введем в рассмотрение функцию $\chi(s,t,\tau)$

$$\chi(s,t,\tau) = \begin{cases} sign(\tau - s) & при\ \ s \le \tau \le t \\ 0 & иначе \end{cases}$$

Используя определение характеристического функционала и функцию $\chi(s,t,\tau)$ математическое ожидание решения представим в виде

$$M(X(t)) = M(X_0)\psi(-i\chi(0,t),0) - i\int_0^t\frac{\delta\psi(-i\chi(s,t),0)}{\delta u_2(s)}ds$$

Подставим в эту формулу выражение для нашего функционала ψ и функцию $\chi(s,t,\tau)$

$$M\big(X(t)\big) = M(X_0)\frac{\exp\left(\int_0^t a_1(s)ds\right)}{1-\int_0^t\int_0^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2} +$$

$$+\int_0^t \frac{\exp\left(\int_s^t a_1(s)ds\right)\left[\left(1-\int_s^t\int_s^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1,s_2\right)a_2(s) + 2\int_s^t b_{12}(t,s_2)ds_2\right]}{\left(1-\int_s^t\int_s^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1,s_2\right)^2} ds \quad (5)$$

4. Анализ среднего значения. Заметим, что $M\big(X(t)\big)$ не зависит от второй моментной функции b_{22} случайного процесса ε_2. Отметим частные случаи этой формулы. При $b_{11} = 0, b_{12} = 0$ получаем формулу решения детерминированной задачи (2), (3). Если $b_{12} = 0$, то случайные процессы $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$ независимы и формула также упрощается.

Первое слагаемое в (5) представляет собой математическое ожидание линейного однородного уравнения. Обычно при рассмотрении уравнений со случайными коэффициентами строят детерминированное уравнение, заменяя случайные коэффициенты их математическими ожиданиями. Выясним на линейном однородном уравнении, что же при этом теряется. Пусть $X_\partial(t)$ решение однородного уравнения, в котором случайный процесс $\varepsilon_1(t)$ заменен его математическим ожиданием $a_1(t)$, тогда

$$M\big(X(t)\big) - X_\partial(t) = M(X_0)\exp\left(\int_0^t a_1(s)ds\right)\frac{\int_0^t\int_0^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1\, ds_2}{1-\int_0^t\int_0^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1\, ds_2}$$

При малых b_{11} погрешность также мала, но при $\int_0^t\int_0^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1\, ds_2 = 0{,}5$ погрешность равна решению $X_\partial(t)$, а при $\int_0^t\int_0^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1\, ds_2 = 0{,}9$ погрешность превышает величину $X_\partial(t)$ в девять раз, она равна 9$X_\partial(t)$.

В реальных условиях среднее значение $a_1(t)$ может принимать и положительные и отрицательные значения. Если $a_1(t) > 0$, то

$$X_\partial(t) = M(X_0)\exp\left(\int_0^t a_1(s)ds\right)$$

и монотонно убывает. Но математическое ожидание решения имеет вид

$$M\big(X(t)\big) = M(X_0)\frac{\exp\left(\int_0^t a_1(s)ds\right)}{1-\int_0^t\int_0^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2}.$$

Найдем его производную

$$M'\big(X(t)\big) = M(X_0)\frac{\exp\left(\int_0^t a_1(s)ds\right)\left[a_1(t)Z + 2\int_0^t b_{11}(t,s_2)ds_2\right]}{\left(1-\int_0^t\int_0^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1\, ds_2\right)^2}$$

В рассматриваемом случае при $t = 0$ производная равна $a_1(0) < 0$ т.е. $M\big(X(t)\big)$ сначала убывает, но при выполнении равенства $b_{11}(t,s_2) > 0$,

$$a_1(t)\left(1-\int_0^t\int_0^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1\, ds_2\right) + 2\int_0^t b_{11}(t,s_2)ds_2 = 0$$

и $b_{11}(t,s_2)>0$ производная $M'(X(t))$ меняет знак и $M(X(t))$ начинает возрастать. Таким образом, случайные факторы способствуют росту $M(X(t))$.

Рассмотрим теперь линейную неоднородную задачу (2), (3). Из формулы (5) при условиях $a_1(t)>0, b_{11}(s_1,s_2)>0$, $a_2(t)>0$, $b_{12}(s_1,s_2)>0$ следует, что $M(X(t))$ возрастает, причем наличие случайных возмущений ($a_2(t)>0$, $b_{12}(s_1,s_2)>0$) благоприятствует росту $M(X(t))$. Если $a_2(t)<0$, то это влечет замедление роста $M(X(t))$, но в нашей модели (2) это естественная ситуация. Если $b_{12}(s_1,s_2)<0$, то это также влечет замедление роста $M(X(t))$.

Формула (5) показывает, что функции могут принимать значения разных знаков, но важно их «интегральное» поведение.

5. Вторая моментная функция. Другая важнейшая характеристика решения задачи (2), (3) – вторая моментная функция $M(X(t)X(\tau))$. Формулу для ее вычисления получить значительно сложнее и мы воспользуемся готовым результатом [3, стр. 220]

$$M(x(t)x(\tau))=M(x_0)\psi(-i\chi(0,\tau)-i\chi(0,t),0)+$$
$$+iM(x_0)[\int_0^t\frac{\delta}{\delta u_2(\xi)}\psi(-i\chi(\xi,t)-i\chi(0,\tau),0)d\xi+\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta}{\delta u_2(\xi)}\psi(-i\chi(\xi,\tau)-i\chi(0,t),0))d\xi]+$$
$$+\int_0^t d\xi\int_0^{\tau}\frac{\delta^2}{\delta u_2(\xi)\delta u_2(\sigma)}\psi(-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(\xi,t),0))d\sigma \qquad (6)$$

Для рассматриваемого нами случайного процесса имеем

$$\psi(-i\chi(0,\tau)-i\chi(0,t),0)=\frac{\exp(\int_0^t a_1(s)ds+\int_0^{\tau}a_1(s)ds)}{1-\int_0^t\int_0^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2-2\int_0^t\int_0^{\tau}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2-\int_0^{\tau}\int_0^{\tau}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2}$$

$$\frac{\delta}{\delta u_2(\xi)}\psi(-i\chi(\xi,t)-i\chi(0,\tau),0)=$$
$$=\frac{1}{(1-\int_{\xi}^t\int_{\xi}^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2-2\int_{\xi}^t\int_0^{\tau}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2-\int_0^{\tau}\int_0^{\tau}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2)^2}\times$$
$$\exp\left(\int_{\xi}^t a_1(s)ds+\int_0^{\tau}a_1(s)ds\right)[(1-\int_{\xi}^t\int_{\xi}^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2-2\int_0^{\tau}\int_{\xi}^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2-$$
$$-\int_0^{\tau}\int_0^{\tau}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2)ia_2(\xi)+2i\int_0^{\tau}b_{12}(s_1,s_2)ds_1ds_2+2i\int_{\xi}^t b_{12}(s_1,s_2)ds_1ds_2]$$

$$\frac{\delta}{\delta u_2(\xi)}\psi(-i\chi(\xi,\tau)-i\chi(0,t),0))=$$
$$=\frac{1}{(1-\int_{\xi}^t\int_{\xi}^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2-2\int_{\xi}^t\int_0^{\tau}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2-\int_0^{\tau}\int_0^{\tau}b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2)^2}\times$$

$$\exp\left(\int_{\xi}^{t} a_1(s)ds + \int_{0}^{\tau} a_1(s)ds\right)[(1 - \int_{\xi}^{t}\int_{\xi}^{t} b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2 - 2\int_{0}^{\tau}\int_{\xi}^{t} b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2 -$$

$$-\int_{0}^{\tau}\int_{0}^{\tau} b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2)ia_2(\xi) + 2i\int_{0}^{\tau} b_{12}(s_1,s_2)ds_1 ds_2 + 2i\int_{\xi}^{t} b_{12}(s_1,s_2)ds_1 ds_2]$$

$$\frac{\delta^2}{\delta u_2(\xi)\delta u_2(\sigma)}\psi(-i\chi(\sigma,\tau) - i\chi(\xi,t),0)) =$$

$$= \frac{\exp(\int_{\sigma}^{\tau} a_1(s)ds + \int_{\xi}^{t} a_1(s)ds)}{W}\{[(-Wa_2(\xi)a_2(\sigma) + (2\int_{\sigma}^{\tau} b_{12}(\sigma,s_2)ds_2 +$$

$$+2\int_{\xi}^{t} b_{12}(\sigma,s_2)ds_2)a_2(\xi) - 2b_{22}(\xi,\sigma) + (2\int_{\sigma}^{\tau} b_{12}(\xi,s_2)ds_2 + 2\int_{\xi}^{t} b_{12}(\xi,s_2)ds_2)a_2(\sigma)]W^2 -$$

$$-4W(\int_{\sigma}^{\tau} b_{12}(\sigma,s_2)ds_2 + \int_{\xi}^{t} b_{12}(\sigma,s_2)ds_2 - (\int_{\sigma}^{\tau}\int_{\sigma}^{\tau} b_{11}(s_1,s_2)\,ds_1 ds_2 +$$

$$+2\int_{\sigma}^{\tau}\int_{\xi}^{t} b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2 + \int_{\xi}^{t}\int_{\xi}^{t} b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2)(b_{22}(\xi,\sigma) + b_{12}(\xi,\sigma)) \quad)[Wa_2(\xi)$$

$$+ 2\int_{\sigma}^{\tau} b_{12}(\xi,s_2)ds_2 + 2\int_{\xi}^{t} b_{12}(\xi,s_2)ds_2)]\}$$

Здесь

$$W = 1 - \int_{\xi}^{t}\int_{\xi}^{t} b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2 - 2\int_{\sigma}^{\tau}\int_{\xi}^{t} b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2 - \int_{\sigma}^{\tau}\int_{\sigma}^{\tau} b_{11}(s_1,s_2)ds_1 ds_2$$

Полагая в формуле (6) $\tau = t$ и вычитая квадрат математического ожидания $M(X(t))$ получим выражение для дисперсионной функции решения задачи (2), (3).

Несмотря на громоздкость полученных выражений, при современных вычислительных средствах они вполне пригодны для вычислений. Следует иметь в виду, что изучаемая задача является по своей природе сложной – моментные функции зависят от всевозможных реализаций случайных процессов и не следует ожидать простых формул.

Заключение. Наличие случайных факторов в экономике является скорее закономерным, а не исключением. Полученные формулы для математического ожидания $M(X(t))$ можно использовать для оценки погрешности, совершаемой при переходе к детерминированной модели, получаемой заменой случайных коэффициентов их средними значениями. Наличие формулы для $M(X(t))$, позволяет определить условия, при которых случайные факторы способствуют росту $M(X(t))$, хотя, на первый взгляд, это кажется маловероятным. Проведенный анализ можно распространить и на уравнения с другими распределениями для случайных коэффициентов.

Список источников

1. Leontyev V.V. Input-output economies / V.V. Leontyev. – N.J., 1966.

2. Основы теории оптимального управления [текст] / под ред. В.Ф. Кротова. – М.: Высш. шк., 1990. – 429 с.

3. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа [текст] / В.Г. Задорожний. – М. –Ижевск: РХД, 2006. – 316 с.

4. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения [текст] / Б. Оксендаль. – М.: Мир, 2003. – 406 с.

ABOUT LEONTYEV'S MODEL WITH RANDOM COEFFICIENTS

Zadorozhniy Vladimir Grigoryevich,
Dr. Sc. of Physics and Mathematics, Professor, Chief of the Chair of Nonlinear Oscillations of Voronezh State University;
zador@amm.vsu.ru

For a single Leontiev's model in the form of scalar differential equations of first order with random coefficients formula of mathematical expectation of the decision is obtained and the influence on the system of random factors is analyzed.
Keywords: Leontyev's model, mathematical expectation, Laplace distribution, equation with random coefficients.