УДК 336.763.3

АДАПТИВНЫЙ ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ШАРПА

Бахолдин Сергей Владимирович,
аспирант кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; itmme@econ.vsu.ru

Рассматривается подход, предусматривающий построение адаптивной модели портфельного инвестирования на основе модели Шарпа. Обучающая выборка для настройки параметра адаптации формируется из данных пост упреждающего периода. В качестве критерия для настройки параметра адаптации предложено использовать отношение доходности к риску.

Ключевые слова: модель Шарпа, адаптация, обучающая выборка, пост упреждающий период, критерий настройки параметра адаптации.

В своих исследованиях У. Шарп показал, что модель портфельного инвестирования можно построить, используя только коэффициенты однофакторной регрессионной модели, отражающей взаимосвязь между доходностью активов, включаемых в портфель, и доходностью рыночного индекса. Модель эту принято называть одноиндексной и записывать следующим образом:

$$r_{ti} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{ti}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где r_{ti} – доходность i-го актива в момент времени t; r_{It} – доходность рыночного индекса в момент времени t; α_i, β_i – оцениваемые параметры регрессионной модели; ε_{ti} – ненаблюдаемая случайная величина.

Не ставя под сомнение оригинальность предложенного Шарпом подхода к формированию портфеля ценных бумаг на основе одноиндексной модели, отметим, что возможности современного регрессионного анализа использованы не в полном объеме. Правда, некоторые из этих возможностей, в частности адаптивный регрессионный анализ, в то время только зарождались. Но не решены проблемы и по более простым ситуациям. Например, что делать в случае, когда коэффициент α одноиндексной модели статистически незначим. Нужно ли это понимать, что средняя доходность соответствующего актива равна нулю, или финансовый актив, для которого не удается построить однондексную модель со статистически значимыми коэффициентами, исключается из рассмотрения.

Не приводя детали формирования модели, с помощью которой строится портфель Шарпа, выпишем финальные выражения, чтобы понять, каким образом в этих выражениях задействованы коэффициенты одноиндексной модели. В векторной форме эта модель записывается следующим образом:

$$\mathbf{w}'_{n+1}\mathbf{\Sigma}_d\mathbf{w}_{n+1} \to \min; \tag{2}$$

$$\mathbf{w}'_{n+1}\boldsymbol{\alpha} = \mu; \tag{3}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1; \tag{4}$$

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\beta} = w_{n+1}; \tag{5}$$

где $\mathbf{w}'_{n+1} = \left(w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}\right)$ – вектор весовых коэффициентов, определяющих структуру портфеля, включающего дополнительный актив, которым является сам портфель.

вместо ковариационной матрицы в этой модели используется диагональная матрица, с элементами из остаточных дисперсий активов и дисперсии рыночного портфеля (индекса) σ_m^2:

$$\mathbf{\Sigma}_d = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon,2}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_{\varepsilon,n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix};$$

где $\mathbf{w}' = \left(w_1, \ldots, w_n\right)$ – вектор с компонентами, определяющими структуру портфеля; $\boldsymbol{\alpha}' = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$ – вектор коэффициентов одноиндексной модели; $\boldsymbol{\beta}' = \left(\beta_1, \ldots, \beta_n\right)$ – вектор коэффициентов при факторной переменной одноиндексной модели.

Функцию Лагранжа рассматриваемой задачи записывается следующим образом:

$$\mathrm{L} = \mathbf{w}'_{n+1}\mathbf{\Sigma}_d\mathbf{w}_{n+1} + \lambda_1\left(\mathbf{w}'_{n+1}\boldsymbol{\alpha} - \mu\right) + \lambda_2\left(\mathbf{w}'\mathbf{i} - 1\right) + \lambda_3\left(\mathbf{w}'\boldsymbol{\beta} - w_{n+1}\right) \to \min. \tag{6}$$

По результатам дифференцирования функции Лагранжа можно записать следующую систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 2\sigma_2^2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 2\sigma_3^2 & 0 & \alpha_3 & 1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sigma_m^2 & \overline{r}_m & 0 & -1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \overline{r}_m & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Система уравнений наглядно показывает, каким образом при определении оптимальной структуры портфеля используются коэффициенты одноиндексной модели, остаточные дисперсии и характеристики рыночного индекса.

Адаптивный вариант одноиндексной модели естественно превращает все коэффициенты в изменяющиеся с течением времени величины. Причем изменения происходят таким образом, что в наибольшей степени отражают тенденции, содержащиеся в последних наблюдениях. Расчет остаточной дисперсии в этих моделях осуществляется тоже с учетом весовых коэффициентов, учитывающих старение данных. Из сказанного непосредственно следует, что модель портфельного инвестирования, построенная с использованием адаптивной регрессии, формально не отличается от модели Шарпа. Но содержательный смысл величин, из которых сформирована модель, иной. Основное отличие в том, что эти величины уже не являются усредненными значениями по всему исследуемому периоду. Они получаются как значения, оцененные по экспоненциально взвешенным данным выборочной совокупности. Процедура экспоненциального взвешивания устроена таким образом, что позволяет, со специально определенной через значение параметра скоростью, забывать тенденции прошлого, усиливая за счет этого тенденции текущего периода. Таким образом, модель портфельного инвестирования, построенная на основе адаптивной регрессии, ориентирована на доходность, которую включенные в нее активы могут принести в конце исторического периода.

В силу того, что данные упреждающего периода, как правило, в меньшей степени отличаются от последних данных исторического периода и, следовательно, вероятность потери портфелем своих оптимальных свойств минимальна и он окажется эффективным на упреждающем отрезке времени. Это тот эффект, который, по замыслу, будет обеспечивать портфель ценных бумаг, построенный на основе адаптивных одноиндексных моделей. Механизм формирования такого эффекта можно понять, если рассмотреть подробней процедуру построения адаптивной регрессии. Для удобства записи формул введем обозначения:

$\mathbf{b}_{ti} = (\alpha_i, \beta_i)'$ – вектор коэффициентов одноиндексной модели;

$\mathbf{r}_{tI} = (1, r_{tI})$ – вектор – строка наблюдений.

Введенные обозначения позволяют одноиндексную модель i-го актива записать следующим образом:

$$r_{ti} = \mathbf{r}_{tI}\mathbf{b}_{ti} + \varepsilon_{ti}. \qquad (8)$$

Если мы согласны с тем, что коэффициенты одноиндексной модели изменяются во времени, причем эти изменения происходят медленнее, чем изменение доходности активов, то их значения для момента времени t необходимо определять путем минимизации экспоненциально взвешенной суммы квадратов отклонений

$$\hat{\mathbf{b}}_{ti}(\alpha) = Arg\min\sum_{j=1}^{t}\alpha^{\,t-j}[r_{ji} - \mathbf{r}_{jI}\mathbf{b}_{ti}(\alpha)]^2. \qquad (9)$$

Минимизация выражения (9) может осуществляться либо путем решения системы уравнений, которая получается в результате дифференцирования этого выражения, либо с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов [1]. Если коэффициенты одноиндексной модели получены как результат оптимизации выражения (9), то они зависят от параметра сглаживания α, значения которого заключены между 0 и 1, и, следовательно, сама модель портфельного инвестирования зависит от этого параметра.

В случае, когда для расчета коэффициентов одноиндексной модели применялась рекуррентная процедура экспоненциально взвешенного метода наименьших квадратов, то эту модель можно рассматривать как адаптивную и записывать в виде

$$\hat{r}_{ti} = \mathbf{r}_{tI}\hat{\mathbf{b}}_{ti}(\alpha); \tag{10}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{ti}(\alpha) = \hat{\mathbf{b}}_{t-1i}(\alpha) + \frac{\mathbf{C}_{t-1}^{-1}\mathbf{r}_{tI}'}{\mathbf{r}_{tI}\mathbf{C}_{t-1}^{-1}\mathbf{r}_{tI}' + \alpha}\left[r_{ti} - \mathbf{r}_{tI}\hat{\mathbf{b}}_{t-1i}(\alpha)\right]; \tag{11}$$

$$\mathbf{C}_t^{-1} = \frac{1}{\alpha}\left[\mathbf{C}_{t-1}^{-1} - \frac{\mathbf{C}_{t-1}^{-1}\mathbf{r}_{tI}'\mathbf{r}_{tI}\mathbf{C}_{t-1}^{-1}}{\mathbf{r}_{tI}\mathbf{C}_{t-1}^{-1}\mathbf{r}_{tI}' + \alpha}\right], \tag{12}$$

где $\mathbf{C}_t^{-1}$ – матрица обратная к матрице системы нормальных уравнений экспоненциально взвешенного метода наименьших квадратов.

Зависимость модели портфельного инвестирования от параметра сглаживания α ставит вопрос о способе определения этого параметра. В принципе на этом параметре можно не заострять внимание и действовать в соответствии с логикой построения независимых моделей, когда параметр настраивается локально с целью повышения экстраполяционной точности каждой модели активов, включаемых в портфель. В этом случае модель портфельного инвестирования не наделяется собственными адаптивными свойствами. Желание наделить ее такими свойствами требует, чтобы параметр адаптации α был единственным и настраивался в соответствии с оптимизацией критерия, характеризующего эффективность портфеля ценных бумаг.

Возможность реализации такого подхода есть. Более того, у всех моделей единственный фактор – рыночный индекс. Это обстоятельство позволяет значительно сократить расчеты, связанные с построением модели портфельного инвестирования. Сокращение происходит за счет того, что адаптивная корректировка каждой модели содержит одну и ту же величину, которая без труда определяется из соотношения (11) и которая, естественно, рассчитывается один раз, но используется во всех моделях. Обратная матрица тоже рассчитывается в единственном экземпляре. В комплексе эти обстоятельства позволяют говорить о специфических условиях формирования адаптивной модели портфельного инвестирования, в которой преобладают тенденции последнего периода.

Последняя операция, завершающая построения этой модели, предусматривает корректировку остаточных дисперсий, стоящих на главной диагонали матрицы системы (7). Корректировка осуществляется после пересчета коэффициентов одноиндексных моделей в соответствии с выражением (9), определяющим экспоненциально взвешенную сумму квадратов отклонений расчетных значений от фактических.

Предлагаемый вариант модели с единственным параметром адаптации предполагает определение критерия, по которому этот параметр должен настраиваться. В качестве такого критерия целесообразно рассматривать отношение доходности к риску портфеля. По замыслу, оптимизация этого критерия осуществляется путем подбора такого значения параметра адаптации, при котором значение критерия на данных обучающей выборки достигает своего оптимального значения. Роль обучающей выборки в этой задаче закреплена за данными пост упреждающего периода.

Список источников

1. Давнис В.В. Адаптивные модели: анализ и прогноз в экономических системах [текст] / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2006. – 380 с.

2. Давнис, В.В. Прогноз и адекватный образ будущего [текст] / В.В. Давнис, В.И. Тинякова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Экономика и управление. – 2005. – № 2. – С. 183 – 190.

ADAPTIVE PORTFOLIO OF SECURITIES BASED ON SHARPE'S MODEL

Bakholdin Sergey Vladimirovich,
Post-graduate student of the Chair of Information Technologies and Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University;
itmme@econ.vsu.ru

The approach providing construction of an adaptive model of portfolio investment on the basis of the Sharpe's model is considered. Training set to adjust the parameter of adaptation is formed from the data of the post preemptive period. As a criterion for setting the parameter of adaptation it is proposed to use the ratio of return to risk.