
ОДНОШАГОВАЯ АДАПТИВНАЯ МОДЕЛЬ ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ У. ШАРПА

Бахолдин Сергей Владимирович,

аспирант кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; itmme@econ.vsu.ru

Коротких Вячеслав Владимирович,

аспирант кафедры информационных технологий и математических методов в экономике Воронежского государственного университета; v.v.korotkikh@gmail.com

В статье приведены размышления о целесообразности применения аппарата портфельного инвестирования У. Шарпа, усовершенствованного одношаговым адаптивным механизмом. Разработан вариант адаптивной модели портфеля ценных бумаг. Для раскрытия преимуществ предложенной модели проведены соответствующие расчеты.

Ключевые слова: адаптивная модель, адаптивный механизм, портфельное инвестирование, портфель У. Шарпа.

Некоторые аспекты современной теории финансов не в полной мере отвечают требованиям адекватного отображения реалий ее предметной области, в частности, рынка акций. Наше мнение заключается в том, что большинство моделей теории финансов полезно лишь для целей формирования некоторого непротиворечивого представления о предмете и отдаленного представления о факторах, оказывающих влияние на его состояние. Их использование в оригинальном виде вряд ли может оказаться целесообразным для целей обоснования стратегических и тактических решений на фондовом рынке, когда гораздо важнее получить правдоподобный прогноз рыночной динамики, нежели ее описание.

Мы склонны полагать, что в теории финансов прослеживается вполне очевидный диссонанс: моделирование де факто нестационарных процессов фондового рынка осуществляется в предположении их стационарности [4, 6]. Взять хотя бы модели портфельного инвестирования. Нестационарность представляет собой не что иное, как проявление высокого уровня неопределенности, являющейся имманентной чертой процессов фондового рынка, как и экономических процессов вообще [3].

Зачастую, рассуждая о развитии процессов фондового рынка, можно справедливо считать, что в любой момент времени каждый участник

фондового рынка затрудняется выявить правильную траекторию развития процесса и фактически находится в субъективной точке бифуркации.

Размышляя о проблемах моделирования процессов фондового рынка в условиях неопределенности, мы находим привлекательными и разумными идеи использования адаптивного подхода. В то же время мы не настаиваем на том, что адаптивный подход является единственно верным, но склонны считать, что аппарат, при разработке которого будут реализованы принципы адаптации, будет более выигрышным.

В подтверждение нашей точки зрения рассмотрим два следствия глобальной информатизации финансового сектора мировой экономики.

С одной стороны, в мире глобальных финансов и практически неограниченного доступа к развитым финансовым рынкам фондовые биржи постепенно утрачивают статус территориальных монополистов. Сегодня структура рынка биржевых услуг существенно трансформировалась и все больше напоминает структуру рынка монополистической конкуренции. В ситуации предоставления однородных услуг по организации и обслуживанию торгов биржи, конкурируя между собой за капиталы частных и институциональных инвесторов, находятся в состоянии перманентного поиска и развития конкурентных преимуществ. С другой стороны, развитие информационных технологий в отрасли существенно ускорило ритм совершения торговых операций, что не могло не сказаться на самом стиле ведения торговли. Важным критерием качества обслуживания для инвестора все чаще выступает оперативное предоставление информации о ходе торгов.

На наш взгляд, справедливо мнение о том, что разница в организации торгов на торговых площадках развитых и развивающихся рынков становится все менее различимой. В связи с этим организационная сторона функционирования бирж вряд ли может считаться их конкурентным преимуществом.

На стыке двух названных тенденций в отраслях, обусловленных глобальной информатизацией, биржи получили возможность развить определенное конкурентное преимущество. Его суть заключается в расширении спектра предоставляемых информационных услуг. Так, например, секция срочного рынка объединенной фондовой биржи ММВБ-РТС осуществляет пересчет оценок справедливой цены всех опционов ежеминутно. Основу их методики составляет известная формула Блека-Шоулса-Мертон в неизменном виде, однако для оценки ее ключевого параметра – волатильности – используются именно адаптивные алгоритмы [8].

Организаторы торгов, будучи заинтересованными в перманентном притоке капитала, редко используют модели без адаптивного механизма для описания процессов ценообразования на фондовом рынке. Эта идея, в сущности, верна и соответствует цели деятельности бирж, однако адаптация, проводимая ими, зачастую имеет своим смыслом создание дополнительного ажиотажа вокруг торгов. В связи с этим инвесторам

целесообразно проводить адаптивные расчеты, но исходя из собственных целевых установок.

Одной из целей данного размышления является разработка и тестирование класса адаптивных моделей, согласующихся с принципами портфельного инвестирования У. Шарпа.

Центральным элементом портфельной теории У. Шарпа является одноиндексная модель доходности акции, через которую идентифицируется ее взаимосвязь с доходностью рынка (рыночного индекса) [1, 2].

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{it}, \quad (1)$$

где r_{it} – доходность i -й акции в момент времени t ; r_{It} – доходности рыночного индекса в момент времени t ; α_i, β_i – оцениваемые коэффициенты одноиндексной модели доходности; ε_{it} – случайная ошибка регрессионной модели.

По нашему замыслу, осуществляя оценку коэффициентов одноиндексных моделей доходностей с использованием принципов адаптации, мы получим адаптивную модель портфельного инвестирования.

Для удобства записи формул введем обозначения:

$\mathbf{b}'_{it} = (\alpha_i \quad \beta_i)$ – вектор коэффициентов одноиндексной модели;

$\mathbf{r}_{It} = (1 \quad r_{It})$ – расширенный вектор-строка наблюдений.

Введенные обозначения позволяют одноиндексную модель i -го актива записать следующим образом:

$$r_{it} = \mathbf{r}_{It} \mathbf{b}_{it} + \varepsilon_{it}. \quad (2)$$

Предполагая, что коэффициенты одноиндексной модели изменяются во времени, определение их значений в момент времени t необходимо осуществлять путем минимизации экспоненциально взвешенной суммы квадратов отклонений фактических значений от расчетных [3]:

$$\hat{\mathbf{b}}_{it}(\rho) = \text{Argmin} \sum_{j=1}^t \rho^{t-j} [r_{ij} - \mathbf{r}_{Ij} \mathbf{b}_{it}(\rho)]^2. \quad (3)$$

Применяя для минимизации выражения (3), суть расчета коэффициентов модели, рекуррентную процедуру экспоненциально взвешенного метода наименьших квадратов [3, 5, 7], одноиндексная модель наделяется адаптивными свойствами и представляется в виде (4) – (6):

$$\hat{r}_{it} = \mathbf{r}_{It} \hat{\mathbf{b}}_{it}(\rho), \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{it}(\rho) = \hat{\mathbf{b}}_{it-1}(\rho) + \frac{\mathbf{C}_{t-1}^{-1} \mathbf{r}'_{It}}{\mathbf{r}_{It} \mathbf{C}_{t-1}^{-1} \mathbf{r}'_{It} + \rho} [r_{it} - \mathbf{r}_{It} \hat{\mathbf{b}}_{it-1}(\rho)], \quad (5)$$

$$\mathbf{C}_t^{-1} = \frac{1}{\rho} \left[\mathbf{C}_{t-1}^{-1} - \frac{\mathbf{C}_{t-1}^{-1} \mathbf{r}'_{It} \mathbf{r}_{It} \mathbf{C}_{t-1}^{-1}}{\mathbf{r}'_{It} \mathbf{C}_{t-1}^{-1} \mathbf{r}'_{It} + \rho} \right], \quad (6)$$

где \mathbf{C}_t^{-1} – матрица, обратная к матрице системы нормальных уравнений экспоненциально взвешенного метода наименьших квадратов.

Полученные коэффициенты одноиндексной модели зависят от параметра сглаживания $\rho \in [0, 1]$, в результате и модель портфельного инвестирования в целом зависит от данного параметра. Тогда матричное представление задачи формирования одношагового адаптивного портфеля n ценных бумаг в соответствии с рекомендациями У. Шарпа в момент времени t имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{w}'_{n+1t} \boldsymbol{\Sigma}_{dt}(\rho) \mathbf{w}_{n+1t} \rightarrow \min \\ \mathbf{w}'_{n+1t} \boldsymbol{\alpha}_{n+1t}(\rho) = \mu, \\ \mathbf{w}'_{nt} \mathbf{I} = 1, \\ \mathbf{w}'_{nt} \boldsymbol{\beta}_t(\rho) = w_{It}, \end{cases}, \quad (7)$$

где $\mathbf{w}'_{n+1t} = (w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{nt}, w_{It})$ – вектор структуры расширенного портфеля, последнее значение которого отражает долю рыночного индекса в портфеле в момент времени t ; $\boldsymbol{\Sigma}_{dt}(\rho)$ – диагональная матрица, на диагонали которой стоят остаточные дисперсии объектов портфельного инвестирования и дисперсия рыночного индекса в момент времени t ; $\boldsymbol{\alpha}'_{n+1t}(\rho) = (\alpha_{1t}(\rho), \alpha_{2t}(\rho), \dots, \alpha_{nt}(\rho), E(r_{It}))$ – расширенный вектор оценок свободных членов одноиндексных моделей У. Шарпа в момент времени t , последнее значение которого является математическим ожиданием доходности рыночного индекса; $\boldsymbol{\beta}'_t(\rho) = (\beta_{1t}(\rho), \beta_{2t}(\rho), \dots, \beta_{nt}(\rho))$ – вектор оценок бета-коэффициентов одноиндексных моделей У. Шарпа в момент времени t ; \mathbf{I} – единичный вектор.

Очевидно, что одношаговая адаптивная модель портфельного инвестирования У. Шарпа должна предполагать адаптивную корректировку и остаточных дисперсий. Для определения остаточной дисперсии с учетом действия одношагового адаптивного механизма предложена следующая формула:

$$\sigma^2_{ocmit+1}(\rho) = \frac{\rho df_t \sigma^2_{ocmit} + (r_{it+1} - \mathbf{r}_{It+1} \hat{\mathbf{b}}_{it+1}(\rho))^2}{df_t + 1}, \quad (8)$$

где $\sigma_{ocmit+1}^2(\rho)$ – остаточная дисперсия i -ой акции, рассчитанная с учетом действия адаптивного механизма $pot+1$ -му наблюдению; σ_{ocmit}^2 – остаточная дисперсия i -ой акции, рассчитанная на предыдущем шаге вычислений; df_t – число степеней свободы числителя уравнения остаточной дисперсии модели, оцененной на предыдущем шаге вычислений.

Очевидно, что результаты моделирования в значительной степени зависят от значения параметра ρ . Перебор его всех возможных значений осуществляется в процессе настройки на наблюдениях так называемого периода обучения. В связи с этим необходим критерий, в соответствии с которым принимается решение об окончании процедуры подбора значения ρ .

По нашему мнению, обозначенному целевому назначению критерия удовлетворяет показатель эффективности действия получаемых адаптивных портфелей. Таким показателем является модификация известного коэффициента У. Шарпа. В связи с тем, что основным назначением адаптивных моделей портфельного инвестирования является формирование портфеля, устойчивого к неопределенности упреждающего периода, оригинальный вид коэффициента У. Шарпа, характеризующий отношение ожидаемой портфельной премии за риск к стандартному отклонению его доходности (9), для нас неприемлем. Наша модификация заключается в замене вероятностной оценки премии в числителе формулы на фактическое значение доходности портфеля на упреждающем периоде, что в матричной форме с учетом ранее введенных обозначений имеет вид (10).

$$\text{Sharpe}_t = \frac{E(r_{pt} - r_f)}{\sigma_{pt}}, \quad (9)$$

$$\text{Sharpe}_t(\rho) = \mathbf{w}'_{nt} \mathbf{r}_{t+1} (\mathbf{w}'_{n+1t} \boldsymbol{\Sigma}_{dt}(\rho) \mathbf{w}_{n+1t})^{-0,5}. \quad (10)$$

Мы склонны считать, что параметр ρ имеет оптимальное значение, когда на всем периоде обучения минимум модифицированного коэффициента У. Шарпа является максимальным по сравнению с минимумами при иных ρ .

Иллюстрация всех изложенных выше мыслей предполагает проведение полноценного вычислительного эксперимента. В качестве информационного описания задачи формирования портфеля n ценных бумаг в соответствии с принципами портфельного инвестирования У. Шарпа с использованием одношагового адаптивного механизма будем использовать данные о ценовой динамике акций некоторых отечественных «голубых фишек» за период 03.01. – 03.2012 г. на объединенной фондовой бирже ОАО ММВБ-РТС.

Реализация адаптивного портфельного моделирования предполагает группировку наблюдений выборочной совокупности в соответствии с их целевым назначением в проводимых вычислениях. Первым этапом адаптивного моделирования является оценка коэффициентов начального приближения модели (7). Для этих целей мы избрали период наблюдений с 03.01.2012 по 21.02.2012 гг.

Назначение следующей группы наблюдений заключается в обучении, в ходе которого мы осуществим подбор весового коэффициента ρ , являющегося настраиваемым параметром адаптации. В нашем эксперименте данный параметр является единым для всех одноиндексных моделей, через которые определяются параметры общей задачи формирования портфеля, потому как мы адаптируем именно модель портфеля, а не каждую одноиндексную модель в отдельности. Для целей обучения отведен период в пять дней: с 22.02.2012 по 29.02.2012 гг. Очевидно, что эти данные не участвовали при построении начального приближения модели.

Завершающий этап расчетов посвящен проверке результатов адаптивного моделирования на хронологически новых данных, ранее не участвовавших в расчетах. На этом этапе будет проводиться тестирование построенного портфеля, а его фактическая доходность будет сравниваться с доходностью рыночного индекса. В рассматриваемой задаче формирования портфеля У. Шарпа с использованием одношагового механизма адаптации такой период, по нашему мнению, должен быть равен одному дню (01.03.2012 г.).

Перейдем к непосредственному рассмотрению полученных результатов.

Для построения начального приближения одноиндексных моделей для всех акций, включаемых в портфель, определяется матрица, обратная к матрице системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов:

$$C_t^{-1} = \begin{bmatrix} 0,032 & -0,008 \\ -0,008 & 0,020 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Начальное приближение одноиндексной модели для акций ОАО «Газпром» имеет следующий вид:

$$\hat{r}_{1t} = -0,024_{(0,12)} + 0,489_{(0,10)} r_{It}. \quad (12)$$

Очевидно, что исходя из значений стандартных ошибок, статистически незначимой является оценка свободного члена. Однако, предполагая дальнейшую адаптивную корректировку оценок коэффициентов модели, вся построенная модель принимается в качестве начального приближения.

Начальные приближения одноиндексных моделей доходностей остальных бумаг, включаемых в портфель, определяются по аналогии:

$$\hat{r}_{2t} = -0,188_{(0,20)} + 1,285_{(0,16)} r_{It}, \quad (13)$$

$$\hat{r}_{3t} = 0,024_{(0,15)} + 0,360_{(0,12)} r_{It}, \quad (14)$$

$$\hat{r}_{4t} = -0,211_{(0,22)} + 0,571_{(0,18)} r_{It} \quad (15)$$

Полученные оценки коэффициентов, а также значения остаточных дисперсий доходностей акций и дисперсия доходности рыночного индекса представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры задачи формирования портфеля в момент t

Акция Параметр	Газпром	Норильский никель	Лукойл	Роснефть
α_i	-0,024	-0,188	0,024	-0,211
β_i	0,489	1,285	0,360	0,571
$\sigma_{ост i}^2$	0,450	1,248	0,717	1,527
$\sigma_{рын}^2$	1,446	1,446	1,446	1,446

На основе приведенных выше данных было определено начальное приближение модели портфеля У. Шарпа. Соответствующую задачу линейного программирования (7) мы решали методом множителей Лагранжа в предположении, что $\mu = 0,5$.

В результате решения системы уравнений получаем расширенный портфель $\mathbf{w}'_{n+1t} = (0,65 \ 0,91 \ 0,59 \ -1,16 \ 1,05)$, последний член которого характеризует долю рыночного индекса. По структуре нормированного расширенного портфеля $\mathbf{w}'_{n+1t} = (0,32 \ 0,45 \ 0,29 \ -0,58 \ 0,40)$ предполагается определение риска портфеля, состоящего из рыночного и специфического риска каждого объекта портфельного инвестирования. Совокупный риск полученного портфеля находим по формуле: $\sigma_{pt} = (\mathbf{w}_{n+1t} \Sigma_{dt} \mathbf{w}_{n+1t})^{0,5} = 1,12\%$. Тестирование портфеля в рамках эксперимента с одношаговым адаптивным механизмом проводим, по наблюдениям, не участвовавшим в расчетах по формированию портфеля. Эти наблюдения должны быть зафиксированы в торговый день, следующий за учтенными в t-й модели портфельного инвестирования. Доходность портфеля составила $r_{pt} = \mathbf{w}'_{mt} \mathbf{r}_t = -1,54\%$.

Забегая вперед скажем, что на наблюдениях периода обучения было установлено, что оптимальным значением является $\rho = 0,95$ (табл. 2).

Таблица 2

Модифицированный коэффициент У. Шарпа
при различных значения параметра адаптации

Показатель	Значение параметра адаптации								
	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
$\text{Sharpe}_{t+1}(\rho)$	2,491	1,515	1,192	1,072	1,025	1,006	0,998	0,994	0,990
$\text{Sharpe}_{t+2}(\rho)$	-0,551	-1,824	-1,724	-1,389	-0,994	-0,646	-0,417	-0,286	-0,211
$\text{Sharpe}_{t+3}(\rho)$	6,178	-0,167	0,839	0,657	0,040	-0,281	-0,366	-0,374	-0,357
$\text{Sharpe}_{t+4}(\rho)$	-7,494	-3,254	1,712	2,034	0,501	0,122	0,355	0,600	0,679

Рекуррентный пересчет оценок коэффициентов модели доходности акций ОАО «Газпром» по наблюдению в $t+1$ -й день $\rho = 0,95$ примет вид:

$$\mathbf{b}_{t+1}(\rho) = \begin{pmatrix} -0,024 \\ 0,489 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0,032 & -0,008 \\ -0,008 & 0,020 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0,81 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0,81 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0,032 & -0,008 \\ -0,008 & 0,020 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0,81 \end{pmatrix} + 0,95} - 0,54 \quad (16)$$

Следом определяется матрица, обратная матрице системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов, необходима для вычисления оценок коэффициентов модели в следующий момент времени:

$$\mathbf{C}_{t+1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,032 & -0,009 \\ -0,009 & 0,021 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Аналогичные расчеты проводятся для остальных акций, включенных в состав портфеля. Не имеет смысла приводить подробное описание рекуррентных вычислений в последующие торговые дни. Их несложно восстановить по ранее приведенным формулам.

Ниже приведены окончательные результаты формирования портфельных структур на периодах обучения и упреждения с учетом отобранного нами значения весового коэффициента (табл. 3).

Таблица 3

Структуры расширенных портфелей,
вычисленных на периодах обучения и упреждения при $\rho = 0,95$

Элементы структуры	Шаг адаптации				
	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5
w_1	1,603	1,213	1,078	1,268	1,171
w_2	1,029	0,860	1,038	1,182	0,980
w_3	-0,366	0,057	-0,008	-0,355	-0,015
w_4	-1,267	-1,130	-1,108	-1,094	-1,136
w_I	1,250	0,972	1,070	1,113	1,032

Таблица 4

Характеристики адаптивных портфелей на периодах обучения и упреждения

Параметр	Шаг адаптации				
	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5
Доходность	0,985	-0,221	-0,372	0,672	0,647
Риск	0,995	1,046	1,042	0,989	0,962
Коэффициент У. Шарпа	0,990	-0,211	-0,357	0,679	0,673

Из табл. 4 следует, что на фоне снижения доходности рыночного индекса на упреждающем периоде (-0,660), адаптивный портфель продемонстрировал положительный финансовый результат (0,647). Данное обстоятельство делает закономерным вывод об эффективности портфеля У. Шарпа, включающего одношаговый адаптивный механизм.

В заключении отметим, что применение адаптивного подхода в задачах портфельного инвестирования отнюдь не ограничивается реализацией одношагового адаптивного механизма. Хотя адаптивный подход сам по себе и оставляет многие вопросы пока неразрешенными (как например, проверка адекватности построенных моделей или вычисление стандартных ошибок оценок регрессионных коэффициентов), практика показала, что адаптивные модели более предпочтительны.

Список источников

1. Sharpe, W.F. A Simplified Model for Portfolio Analysis [текст] / W.F. Sharpe // Management Science. – 1963. – Vol. 9. – №2. – Pp. 277-293.
2. Sharpe, W.F. Portfolio Theory and Capital Markets [текст] / W.F. Sharpe. – N.Y.: McGraw-Hill, 1970. – 316 p.
3. Давнис, В.В. Адаптивные модели: анализ и прогноз в экономических системах: монография [текст] / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2006. – 380 с.
4. Мельников, А.В. Математические методы финансового анализа [текст] / А.В. Мельников, Н.В. Попова, В.С. Скорнякова. – М.: Анкил, 2006 г. – 440 с.
5. Фомин, В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация [текст] / В.Н. Фомин. – М.: Наука, 1984. – 286 с.
6. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели [текст] / А.Н. Ширяев. – М.: Фазис, 1998. – 512 с.
7. Эконометрика: учеб. [текст] / Под ред. И.И. Елисейевой. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 576 с.
8. Методика расчета теоретической цены опциона и коэффициента «дельта» [электронный ресурс] / утв. приказом Председателя Правления ОАО «РТС» от 18.03.2010 № 40. – URL: <http://rts.ru>.

SINGLE-STAGE ADAPTIVE W. SHARPE PORTFOLIO MODEL

Bakholdin Sergey Vladimirovich,

Post-graduate student of the Chair of Information Technologies and
Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University;
itmme@econ.vsu.ru

Korotkikh Vyacheslav Vladimirovich,

Post-graduate student of the Chair of Information Technologies and
Mathematical Methods in Economy of Voronezh State University;
v.v.korotkikh@gmail.com

In the article reflections on the appropriateness of the unit investment portfolio W. Sharpe, an improved one-step adaptive mechanism is presented. Variant of the adaptive model portfolio is worked out. To reveal advantages of the proposed model performed the appropriate calculations.

Keywords: adaptive model, adaptive mechanism, portfolio investment, W. Sharpe's portfolio.