УДК 519.81

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Матвеев Михаил Григорьевич,
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры программирования информационных технологий Воронежского государственного университета; mgmatveev@yandex.ru

Для задач нечеткого линейного программирования с нечеткими параметрами целевой функции и ограничений предлагается метод решения, основанный на дефаззификации целевой функции. Метод позволяет получать четкие оптимальные решения при нечетком критерии и четких ограничениях и решение в виде нечетких чисел при нечетких параметрах целевой функции и ограничений.

Ключевые слова: задача нечеткого линейного программирования, нечеткие числа, α -уровни нечеткого числа, управление рисками, интервальные ограничения.

1. Введение

Задачи нечеткого математического программирования (ЗНМП) во многих приложениях рассматриваются как удобное и адекватное описание выбора в условиях неполной определенности. Математический аппарат решения задач нечеткого математического программирования (НМП) достаточно разнообразен и соответствует вариантам трактовки понятия оптимальности в различных условиях нечеткости. Обзор некоторых вариантов описания нечеткости, понятия оптимальности в условиях нечеткости и методов решения соответствующих ЗНМП приведен в работах [1, 2]. Так при нечеткой целевой зависимости и нечетких отношениях при формулировке ограничений используется принцип Беллмана-Заде, в соответствии с которым решением ЗНМП является нечеткое множество – пересечение нечетких множеств целевой функции и ограничений. Если источником нечеткости являются параметры целевой функции или параметры ограничений, то исходная задачи НМП может рассматриваться как задача многокритериальной оптимизации с применением соответствующего математического аппарата, в том числе методов нечеткой логики [3,4]. Часто решение задач с нечеткими параметрами сводится к задачам интервального программирования с соответствующими методами решения [1].

В то же время разнообразие постановок задач и стремление учесть как можно больше особенностей моделируемых объектов вызывает необходимость постоянного расширения арсенала методов и моделей НМП.

Будем рассматривать линейные модели принятия оптимальных решений в двух ситуациях:

- целевая функция содержит нечеткие параметры, а ограничения представлены обычными неравенствами;
- и целевая функция и ограничения содержат нечеткие параметры.

2. Метод решения ЗНЛП при нечетких параметрах целевой функции

В рамках первой ситуации предлагается интерпретация понятия оптимальности применительно к линейному критерию с нечетко заданными параметрами и вытекающий из такой интерпретации метод решения задачи нечеткого линейного программирования (НЛП) [5].

Рассмотрим следующую постановку задачи НЛП: требуется достичь максимального значения целевой функции $\widetilde{q} = \sum\limits_i \widetilde{p}_i x_i$ при наличии линейных ограничений $\sum\limits_i h_{ij} x_i \le d_j, \quad \forall j$. Коэффициенты целевой функции представляют собой нечеткие числа $\tilde{p}_i$ носителями $[p_i^L; p_i^R]$, здесь и далее индексы *L* и *R* означают левую и правую границы носителя нечеткого числа. Нечеткие коэффициенты задаются экспертным путем. Параметры ограничений задаются как обычные числа, $x \in X \subseteq R_+^n$.

Требование максимизации исходной нечеткой целевой функции будем интерпретировать как максимизацию взвешенной суммы значений этой функции по α-уровням:

$$q(x) = \sum_k [q_k^L(\alpha_k, x) + q_k^R(\alpha_k, x)]\alpha_k \xrightarrow[x]{} \max, \quad (1)$$

где $q^*(\alpha_k) = \sum\limits_i p_i^*(\alpha_k) x_i, \qquad * \in \{L, R\}$.

Содержательный смысл максимизации нечеткой целевой функции $\widetilde{q}$ интерпретируется как максимизация ожидаемого (четкого) значения целевой функции вычисленного с точностью до постоянного множителя $2\sum\limits_k \alpha_k$.

Рассмотрим эту интерпретацию более подробно на примере треугольных нечетких чисел, задаваемых тройкой ($m-l; m; m+r$), где *m*- мода нечеткого числа; *l* и *r* – левый и правый параметры нечеткости. Проводя аналогию с вероятностными моделями принятия решений в условиях риска, будем рассматривать параметры нечеткости как параметры, характеризующие риск принятия решения. Левый параметр, *l* – характеризует риск возможных потерь, правый параметр, *r* – возможность получения выгоды. Подставим параметры нечеткого числа в выражение (1), имея в виду, что $q_k^L(\alpha_k, x) = m - l(\alpha_k, x)$ и $q_k^R(\alpha_k, x) = m - r(\alpha_k, x)$, получим:

$$q(x) = \sum_k [2m(x) + r(\alpha_k, x) - l(\alpha_k, x)]\alpha_k \xrightarrow[x]{} \max. \quad (2)$$

Выражение (2) наглядно показывает, что для достижения максимального значения $q(x)$ надо выбирать такие значения *x*, которые обеспечат максимальные значения моды и правого параметра нечеткости и минимальное значение левого параметра нечеткости. Таким образом, функция (1), в отличие от аналогичной задачи стохастического программирования может обеспечить достижение сразу трех целей:

- достижение максимума моды;
- максимизация возможности получения выгоды;
- минимизация риска потерь выгоды;

и с этой точки зрения представляет собой аддитивную свертку трех соответствующих критериев.

Выражение (2) можно видоизменить, удалив параметр $r(\alpha_k, x)$, что соответствует пессимистической стратегии, при которой максимизируется мода и минимизируется риск потерь. Стратегии крайнего оптимизма будет соответствовать удаление из выражения (2) параметра $l(\alpha_k, x)$. Промежуточные стратегии зависят от экспертного определения нечетких параметров функции цели $\widetilde{a}_i$, но ими можно управлять, применяя решающее правило Гурвица в виде:

$$q(x) = \sum_k [2m(x) + \gamma r(\alpha_k, x) - (1-\gamma) l(\alpha_k, x)]\alpha_k \xrightarrow[x]{} \max, \quad (3)$$

где $\gamma \in [0, 1]$. При γ = 0, критерий (3) будет соответствовать стратегии пессимизма, при γ = 1 критерий (3) будет отражать крайний оптимизм.

Следует обратить внимание на структуру функций процесса принятия решений. Нечеткие параметры $\widetilde{p}_i$ целевой функции задают эксперты в рассматриваемой предметной области, ориентируясь только на особенности этой области и не зная целей лица, принимающего решения (ЛПР). Коэффициент γ является инструментом ЛПР, который настраивает его на свои цели в условиях заданной экспертом модели.

Предлагаемый подход рассмотрим на примере задачи выбора оптимального инвестиционного портфеля. Эта задача может выходить за рамки вероятностной парадигмы и тогда эффективным инструментом ее решения может служить нечеткое (возможностное) программирование. Исходные данные при этом составляют экспертные оценки возможности достижения экономических показателей.

Будем рассматривать задачу начального распределения инвестиционных средств между несколькими предприятиями с целью получения прибыли в течение ряда последующих лет. Распределение прибыли по времени можно представить линейной моделью $\widetilde{y} = \widetilde{A}x,\ \widetilde{A} = \left\| \widetilde{a}_{ij} \right\|$, где $\widetilde{a}_{ij}$ - экспертные оценки прибыли с единицы инвестиционных вложений в *i*-е предприятие в *j*-м году, задаваемые в виде треугольных нечетких чисел; x_i - четкий размер инвестиций в *i*-е предприятие (*i*=1,…,*n*).

Максимум прибыли будем интерпретировать как максимум ее ожидаемого значения за весь инвестиционный период (*j*=1,…,*m*), рассчитываемый по критерию

$$q(x) = \sum_k [q_k^L(\alpha_k, x) + q_k^R(\alpha_k, x)]\alpha_k \xrightarrow[x]{} \max,$$

где $q^*(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^*(\alpha_k) x_i, \qquad * \in \{L, R\}$,

с четкими ограничениями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = d,\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0,$$

где *d* – значение инвестиционных средств, которые инвестор планирует вложить в предприятия.

Рассмотрим решение этой задачи при *n*=2; *m*=2. Очевидно, что принятые ограничения определяют решение в одном из двух видах - ($x_1 = 0; x_2 = d$) или ($x_1 = d; x_2 = 0$), что удобно с точки зрения анализа работы предлагаемого метода. Примем *d* = 10, а значения α зададим на уровнях: 0,2; 0,4; 0,6;, 0,8; 1,0. Параметры a_{ij}, зададим треугольными нечеткими числами в формате ($m - l; m; m + r$): $\widetilde{a}_{11}$= (-1; 3; 5), $\widetilde{a}_{12}$= (-2; 4; 6), $\widetilde{a}_{21}$= (2; 3; 4), $\widetilde{a}_{22}$= (0; 3; 6). Отрицательные значения у левой границы нечеткого числа означают возможность получения убытков с единицы вложенных средств. Как видно, первое предприятие на второй год может увеличить прибыльность инвестиций, при том, что второе предприятие оставляет ее на уровне первого года.

Однако риски потери прибыли у первого предприятия выше, чем у второго. Этим объясняется получение оптимального решения в виде: x_1 = 0; x_2 = 10. Все инвестиции получит второе предприятие.

Достаточно снизить риски первого предприятия, например, до значений $\widetilde{a}_{11}$ = (1; 3; 5), $\widetilde{a}_{12}$ = (1; 4; 6), как оптимальное решение изменится - x_1 = 10; x_2 = 0. Все инвестиции достанутся первому предприятию. Ожидаемое (возможное) значение прибыли за два года составляет 69 единиц.

Если целевая функция содержит коэффициент Гурвица γ, то ЛПР может изменить исходное решение (x_1 = 0; x_2 = 10) даже при высоких рисках первого предприятия, например, задав γ = 1.

Таким образом, если введенная интерпретация максимума прибыли адекватно целям инвестора, то предложенный метод решения задачи НЛП может быть эффективно применен для выбора инвестиционного портфеля с возможностью регулирования отношение инвестора к риску.

3. Решение ЗНЛП при нечетких параметрах целевой функции и ограничений

Пусть теперь нечеткие параметры присутствуют не только в целевой функции, но и в ограничениях:

$$\widetilde{q} = \sum_i \widetilde{p}_i x_i \xrightarrow[x]{} \max, \tag{4}$$

$$\sum_i \widetilde{h}_{ij} x_i \succ \widetilde{d}_j, \quad \forall j. \tag{5}$$

Здесь знак $\succ$ читается как «не хуже», то есть надо выбрать такой вектор x, который одновременно с условием (4) обеспечит левую часть выражения (5) «не хуже», чем правая часть. Такая интерпретация нечетких ограничений заключается в том, что точно описанное множество ограничений (допустимых альтернатив) оказывается лишь приближением реальности в том смысле, что в реальной задаче альтернативы вне множества точных ограничений могут быть не недопустимыми, а лишь в той или иной степени менее желательными для ЛПР, чем альтернативы внутри этого множества. Отношение «$\widetilde{A}$ не хуже $\widetilde{B}$» можно определить как «$\widetilde{A}$ содержится в $\widetilde{B}$», то есть $\forall x \in X \quad \mu_{\widetilde{A}}(x) \le \mu_{\widetilde{B}}(x)$. Другими словами выражение «$\widetilde{A}$ содержится в $\widetilde{B}$» можно рассматривать как $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$. В принятой интерпретации точно описанное множество ограничений (допустимых альтернатив) оказывается лишь приближением реальности в том смысле, что в реальной задаче альтернативы вне множества точных ограничений могут быть не недопустимыми, а лишь в той или иной степени менее желательными для ЛПР, чем альтернативы внутри этого множества. Как правило, левую часть (5) задает эксперт в рассматриваемой предметной области, а правую часть формулирует ЛПР. В такой интерпретации корректная запись неравенства (5) будет иметь вид

$$\sum_i \widetilde{h}_{ij} x_i \subseteq \widetilde{d}_j, \quad \forall j. \tag{6}$$

Предлагается следующая методика решения задачи (4-5). Критерий (4) записывается в виде четкой функции цели вида (1). Затем, в соответствии с методом, описанным в работе [6], вводятся дискретные α-уровни, критерий и ограничения (6) рассматриваются применительно к каждому уровню α_k ($k \in K$ - число α-уровней). На уровне α_k максимизируется соответствующее слагаемое критерия (1):

$$q_k(x) = q_k^L(\alpha_k, x) + q_k^R(\alpha_k, x) \xrightarrow[x]{} \max. \tag{7}$$

Ограничения (6) записываются в виде системы интервальных ограничений на каждом α_k-уровне:

$$\sum_i [h_{ij}^L(\alpha_k);\ h_{ij}^R(\alpha_k)] x_i \subseteq [d_j^L(\alpha_k), d_j^R(\alpha_k)], \quad \forall j. \tag{8}$$

Приведение системы (8) к системе обычных линейных неравенств осуществляется записью отдельных неравенств с соответствующим отношением для левой и правой границ интервалов:

$$\begin{gathered} \sum_i h_{ij}^L(\alpha_k) x_i \ge d_j^L(\alpha_k), \\ \sum_i h_{ij}^R(\alpha_k) x_i \le d_j^R(\alpha_k). \end{gathered} \tag{9}$$

Таким образом, на каждом α-уровне формируется обычная ЗЛП, решению которой приписывается соответствующее значение степени принадлежности, т.е. α-уровня. Окончательно формируется дискретное нечеткое множество решений исходной задачи. Решение в виде нечеткого множества само по себе достаточно информативно. Однако традиционный практический подход может потребовать четкого решения в виде обычного вектора *x*. В этом случае четкое решение можно получить, применяя один из известных методов дефаззификации, например, решение с максимальной функцией принадлежности или решение взвешенное по методу «центра тяжести».

Рассмотрим применение приведенной методики на следующем примере, в некотором смысле двойственном примеру, приведенному в разделе 2.

Задача распределения инвестиционных средств между двумя предприятиями может рассматриваться в иной формулировке. Пусть инвесторов так же интересуют ближайшие два года и экспертные оценки прибыли $\widetilde{a}_{ij}$ с единицы инвестиционных средств в *i*-е предприятие имеют вид треугольных нечетких чисел: $\widetilde{a}_{11}$ = (1; 3; 5), $\widetilde{a}_{12}$ = (1; 4; 6), $\widetilde{a}_{21}$ = (2; 3; 4), $\widetilde{a}_{22}$ = (0; 3; 6). Эти значения соответствуют второму варианту исходных данных задачи второго раздела. Меняется цель инвесторов – необходимо минимизировать суммарные инвестиции в оба предприятия, обозначив при этом нечеткие ограничения $\widetilde{d}_j$ на ежегодную прибыль. Критерий оптимальности при этом принимает четкий вид:

$$x_1 + x_2 \xrightarrow[x]{} \min, \tag{10}$$

что не мешает применять рассматриваемую методику, так как на каждом α-уровне его выражение просто останется без изменений. Ограничения примут вид

$$\begin{gathered} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{21}x_2 \subseteq \widetilde{d}_1, \\ \widetilde{a}_{12}x_1 + \widetilde{a}_{22}x_2 \subseteq \widetilde{d}_2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Пусть ЛПР обозначил свои ограничения на прибыль первого и второго года в виде треугольных нечетких чисел $\widetilde{d}_1$ = (2; 30; 60) и $\widetilde{d}_2$ = (2; 30; 60). Зададим следующие α - уровни: 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0. Оптимальные решения x^* по α-уровням показаны в табл. 1. Следует обратить внимание, что все ограничения согласно принятой интерпретации строго выполняются.

Четкие ожидаемые оптимальные решения можно получить, используя методы дефаззификации:

$$x_i = \frac{\sum_{k=1}^{5} x^*{}_{ik}\alpha_k}{\sum_{k=1}^{5}\alpha_k}, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Таблица 1

Характеристики оптимальных решений по α - уровням

α_k	$a^L{}_{11}x_1 + a^L{}_{21}x_2 \geq d^L{}_1$, $a^L{}_{12}x_1 + a^L{}_{22}x_2 \geq d^L{}_2$,	$a^R{}_{11}x_1 + a^R{}_{21}x_2 \leq d^R{}_1$, $a^R{}_{12}x_1 + a^R{}_{22}x_2 \leq d^R{}_2$,	$x^*{}_1$ опт	$x^*{}_2$ опт	$x_1^* + x_2^*$
0,2	7,6 =7,6 7,6 =7,6	23,0 < 54,0 28,5 < 54,0	4,5	0,6	5,1
0,4	13,2 = 13,2 13,2 = 13,2	27,4 < 48,0 34,5 < 48,0	5,1	1,7	6,8

Окончание табл. 1

α_k	$a^L{}_{11}x_1 + a^L{}_{21}x_2 \ge d^L{}_1,$ $a^L{}_{12}x_1 + a^L{}_{22}x_2 \ge d^L{}_2,$	$a^R{}_{11}x_1 + a^R{}_{21}x_2 \le d^R{}_1,$ $a^R{}_{12}x_1 + a^R{}_{22}x_2 \le d^R{}_2,$	$x^*{}_1$ опт	$x^*{}_2$ опт	$x_1^* + x_2^*$
0,6	18,8 = 18,8 18,8 = 18,8	28,8 < 42,0 36,0 < 42,0	4,5	3,4	7,9
0,8	24,4 = 24,4 24,4 = 24,4	29,2 < 36,0 34,5 < 36,0	3,0	6,0	9,0
1,0	30 = 30 30 = 30	30 = 30 30 = 30	0	10,0	10,0

На основании данных табл. 1 по формуле (12) получаем четкое решение: x_1 = 2,7; x_2 = 5,9. При полученных четких значениях инвестиций в первое и второе предприятие совокупный доход за два года будет представлен нечетким числом

$$\tilde{q} = (\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{12})x_1 + (\tilde{a}_{21} + \tilde{a}_{22})x_2 = \tilde{b}_1 x_1 + \tilde{b}_1 x_1 =$$

$$= (2;\ 7;\ 11)2{,}7 + (2;\ 6;\ 10)5{,}9.$$

α -уровневое представление вычисленного значения $\tilde{q}$ показано во второй и третьей колонке табл. 2.

Альтернативный подход к подсчету нечеткой прибыли состоит в ее вычислении на каждом α - уровне табл. 1. Соответствующие значении показаны в четвертой и пятой колонке табл. 2.

Таблица 2

Прибыль в виде нечеткого числа

	Прибыль при четком решении		Прибыль при решениях из таб. 1		Ограничения на прибыль	
α_k	q_k^L	q_k^R	q_k^L	q_k^R	d_k^L	d_k^R
0,2	24,5	81,3	15,2	51,5	15,2	108,0
0,4	31,8	74,4	26,4	61,9	26,4	96,0
0,6	39,2	67,6	37,6	64,8	37,6	84,0
0,8	46,6	60,8	48,8	63,7	48,8	72,0
1,0	54,0	54,0	60,0	60	60,0	60,0

Полученная прибыль при четком решении не в полной мере согласуется с ограничениями (11), в отличие от решения на основании таблицы 1. Как видно из таблицы 2, нарушение ограничений имеет место при α_k равном 0,8 и 1,0: 46,6 < 48,8 и 54,0 < 60,0. Это объясняется заменой полученного в табл. 1 оптимального нечеткого решения его дефаззифицированным четким аналогом.

Приведенный пример показывает, что предложенная методика решения ЗНЛП позволяет получить оптимальное решение как в фаззифицированном, так и дефаззифицированном виде, хотя в последнем случае может возникать нарушение заданных нечетких ограничений. Если эти нарушения допустимы с точки зрения ЛПР и предложенная интерпретация оптимума критерия адекватна целям инвестора, то методика может применяться при решении задач нечеткого линейного программирования.

Список источников

1. Мелькумова, Е.М. О решении некоторых задач нечеткого математического программирования [текст] / Е.М. Мелькумова / Вестник Воронежского государственного университета. Серия: «Системный анализ и информационные технологии». – 2009. – №2. – С. 19 – 24.

2. Нечеткие гибридные системы. Теория и практика [текст] / И.З. Батыршин, А.О. Недосекин и др. // Под ред. Н.Г. Ярушкиной. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 208 с.

3. Klir, G. Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications [текст] / G. Klir, B. Yuan. – N.Y: Prentice Hall: UpperSaddleRiver, 1995. – 574 p.

4. Семенов, Б.А. Многокритериальная оптимизация на основе нечеткой логики [текст] / Б.А. Семенов, Т.М. Леденева// Системы управления и информационные технологии. – М.: Воронеж: Науч. кн., 2009. – №1(35). – С. 43 – 47.

5. Матвеев, М.Г. Метод решения задачи нечеткого математического программирования [текст] / М.Г. Матвеев // Материалы XI международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии». Воронеж: ВГУ, 2011. том 2. – С. 24 – 26.

6. Яхъяева, Г.Э. Нечеткие множества и нейронные сети [текст] / Г.Э.Яхъяева. - ИНТУИТ.ru БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 320 с.

SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH FUZZY PARAMETERS

Matveyev Mikhail Grigoryevich,
Dr. Sc. of Technical Science, Professor of the Chair of Programming and Information Technologies of Voronezh State University;
mgmatveev@yandex.ru

For problems of indistinct linear programming with indistinct parameters of criterion function and restrictions the method of solution based on defuzzification of criterion function is offered. The method allows receiving accurate optimum solutions at indistinct criterion both accurate restrictions and solution in the form of indistinct numbers at indistinct parameters of criterion function and restrictions.
Keywords: problem of indistinct linear programming, indistinct numbers, α -levels of indistinct number, risks management, interval restrictions.