УДК 336.763.3

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ ЦЕННЫХ БУМАГ МИНИМАЛЬНОГО РИСКА И МАКСИМАЛЬНОЙ ДОХОДНОСТИ

Хацкевич Владимир Львович,
доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики Всероссийского заочного финансово-экономического института (филиал в г. Воронеже); okp.voronezh@vsfsei.ru

Исследована взаимосвязь характеристик классических моделей Марковица – Тобина минимизации риска портфеля ценных бумаг при заданной доходности и максимизации средней доходности портфеля при заданном уровне риска. Установлены формулы, выражающие зависимость параметров оптимального портфеля от предварительно выбранной доли безрисковых бумаг.
Ключевые слова: портфель ценных бумаг, риск, доходность, безрисковые бумаги, инфестор.

В работе рассмотрены некоторые положения теории портфельного инвестирования, которые не нашли отражения в известной литературе (см., напр., [1, 2, 6, 7]), хотя заслуживают, на наш взгляд, упоминания даже в учебных изданиях на эту тему. Ниже будем делать ссылки на доступную литературу [3, 4, 7].

Результаты данной работы частично анонсированы в материалах Интернет-конференции «Финансовые рынки» в 2011 году [5].

§1. **Взаимосвязь классических моделей Марковица и Тобина минимизации риска портфеля ценных бумаг при заданной доходности и максимизации доходности портфеля при заданном уровне риска**

Пусть на рынке имеется n видов ценных бумаг, из которых инвестор может сформировать портфель. Эти бумаги предположим характеризуются доходностями $R_1, R_2,...,R_n$, которые являются случайными величинами с известными математическими ожиданиями (средними доходностями) m_i $(i=1,...,n)$ и известной ковариационной матрицей $V_{ij}=\operatorname{cov}(R_i,R_j)$ $(i,j=1,...,n)$. Если инвестор распределил свой капитал долями $x_i \left(0 \le x_i \le 1, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right)$ в разные ценные бумаги, то доходность сформированного портфеля $R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$ имеет следующие математическое ожидание (среднюю доходность) $\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ и дисперсию $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j$.

Задача Марковица об оптимальном портфеле минимального риска такова [4]: найти распределение долей капитала x_i минимизирующих вариацию портфеля:

$$\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \to \min \ , \tag{1}$$

при условиях заданной средней доходности портфеля m_p:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i = m_p \ , \tag{2}$$

и полноты долей

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 . \tag{3}$$

Впервые, задачу вида (1) – (3) исследовал Г. Марковиц [8] при дополнительном предположении неотрицательности долей $x_i \geq 0$ $(i = 1,...,n)$. Позже стали рассматривать ситуацию, когда инвестор имеет возможность проводить операции с ценными бумагами типа коротких продаж, так что неотрицательность x_i $(i = 1,...,n)$ не требуется.

Задача Марковица об оптимальном портфеле максимальной доходности ставится следующим образом: найти распределение долей капитала инвестора x_i максимизирующих ожидаемую среднюю доходность:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i \to \max \ , \tag{4}$$

при условии, что обеспечивается заданный уровень риска r_p:

$$\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j = r_p^2 \ , \tag{5}$$

и выполняется условие полноты долей (3).

С теми же комментариями по поводу влияния коротких продаж на отсутствие условия $x_i \geq 0$ $(i = 1,...,n)$.

Обозначим через $V = (V_{ij})$ ковариационную матрицу, через $M = (m_i)$ вектор составленный из средних доходностей ценных бумаг, а через $X = (x_i)$ – вектор долей капитала. Пусть, кроме того, I – *n*-мерный вектор, компоненты которого являются единицами. Будем считать, что $\det\ V \neq 0$, тогда матрица V имеет обратную V^{-1}. Положим

$$a := \left(V^{-1}M, M\right),\ b := \left(M, V^{-1}I\right),\ c := \left(I, V^{-1}I\right),$$

где скобки (,) обозначают скалярное произведение в R^n.

Как известно [3], решение задачи (1) – (3) дается формулой

$$X_* = V^{-1}\left(\frac{cm_p - b}{ac - b^2}M + \frac{a - bm_p}{ac - b^2}I\right). \qquad (6)$$

При этом минимальная дисперсия, соответствующая оптимальной структуре, имеет вид

$$r_p^2 = \left(VX_*, X_*\right) = \frac{1}{ac - b^2}\left(m_p^2 c - 2m_p b + a^2\right). \qquad (7)$$

Теорема 1. Предположим, что $\det\ V \neq 0$. Решение задачи (3) – (5) определяется формулой:

$$X^* = \frac{1}{\lambda_2}V^{-1}M - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}V^{-1}I\ ., \qquad (8)$$

где числа λ_1 и λ_2 задаются равенствами:

$$\lambda_2^2 = \left(ac\text{-}b^2\right)/\left(cr_p^2 - 1\right),\ \lambda_1 = \frac{1}{\mathrm{c}}\left(b - \sqrt{\frac{ac - b^2}{cr_p^2 - 1}}\right). \qquad (9)$$

Действительно, функция Лагранжа для задачи (3)-(5) дается формулой:

$$L\left(x_i, \lambda_1, \lambda_2\right) = 2\sum_{i-1}^{n} x_i m_i + 2\lambda_1\left(1 - \sum_{i-1}^{n} x_i\right) + \lambda_2\left(r_p^2 - \sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}x_i x_j\right),$$

где λ_1, λ_2 – множители Лагранжа. Соответствующие необходимые условия экстремума имеют вид (3), (5) и:

$$m_i - \lambda_1 - \lambda_2\sum_{j=1}^{n} V_{ij}x_j = 0 \qquad \left(i = 1, \ldots, n\right).$$

Отсюда получаются формулы (8), (9).

Замечание 1. В случае положительной определенности ковариационной матрицы *V* выполнено условие

$$\sqrt{ac} = \left\|V^{-\frac{1}{2}}M\right\|\left\|V^{-\frac{1}{2}}I\right\| \geq \left|\left(V^{-\frac{1}{2}}M, V^{-\frac{1}{2}}I\right)\right| \geq \left(V^{-\frac{1}{2}}M, V^{-\frac{1}{2}}I\right) = b.$$

Поэтому, необходимым и достаточным условием разрешимости поставленной вариационной задачи (3) – (5) в этом случае является условие $cr_p^2 > 1$.

Эффективным множеством в координатной плоскости риск-средняя доходность называют множество точек, координаты $\left(r_p, m_p\right)$ которых соответствуют эффективным, т.е. неулучшаемым сразу по двум рассматриваемым показателям риск r_p и средняя доходность m_p портфелям ценных бумаг.

Согласно теореме об эффективном множестве [7] оно состоит из портфелей, каждый из которых:

1) Обеспечивает максимальную среднюю доходность для некоторого уровня риска.

2) Обеспечивает минимальный риск для некоторой заданной средней ожидаемой доходности.

Ниже мы покажем, что в наших условиях эффективное множество характеризуется одним из условий (1), либо (2). При этом другое выполняется автоматически при выполнении взятого первым.

Теорема 2. Каждой точке (r_p, m_p) эффективной траектории отвечает как оптимальный портфель Марковица минимального риска, так и оптимальный портфель Марковица максимальной средней доходности. Более того, структура (распределение долей) как оптимального портфеля Марковица минимального риска, так и оптимального портфеля Марковица максимальной средней доходности в точке (r_p, m_p) одинакова.

Действительно, рассмотрим кривую, определяемую формулой (7). Каждая точка (r_p, m_p) этой кривой обеспечивает выполнение условия (2) эффективного множества, т.е. минимальный риск r_p для заданной средней ожидаемой доходности m_p. Найдем выражение для максимальной средней доходности портфеля m_p, при заданном риске r_p соответствующее оптимальной структуре распределения долей задачи (4), (5), (3). Согласно (8) и равенству $b - \lambda_1 c = \lambda_2$ имеем

$$\left(M, X^*\right) = \frac{1}{\lambda_2} a - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} b = \frac{1}{\lambda_2} a + \frac{b - \lambda_2}{c\lambda_2} b = \frac{1}{c\lambda_2}\left(ac - b^2\right) + \frac{b}{c}.$$

Подставляя сюда вместо λ_2 соответствующее выражение из (9) найдем, что

$$m_p = \left(M, X^*\right) = \frac{1}{c}\left(\sqrt{\left(ac - b^2\right)\left(cr_p^2 - 1\right)} + b\right).$$

Выражая из этого соотношения дисперсию r_p^2, придем к той же формуле (7), связывающей риск и доходность, что и для задачи Марковица о минимизации риска. Таким образом, каждая точка (r_p, m_p) кривой (7) обеспечивает также выполнение условия 1) эффективного множества.

Чтобы проверить последнее утверждение теоремы следует подставить в формулу (8), вместо λ_1 и λ_2, соответствующие выражения (9) и использовать соотношение (7). Тогда получится формула (6).

Замечание 2. Свойство двойственности задач (1) – (3) и (4), (5), (3) проявляется также и в том, что при дополнительном предположении (7) справедливо соотношение $(VX_*,X_*)=(X^*,M)$.

Рассмотрим ситуацию, когда на рынке имеются безрисковые ценные бумаги со средней доходностью m_0. Тогда инвестор имеет возможность сформировать портфель с безрисковой компонентой x_0. Этот случай впервые исследовал Тобин [9]. Задача Тобина об оптимальном портфеле минимального риска такова (см., [4] гл.15): найти распределение долей капитала x_i минимизирующих вариацию портфеля:

$$\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}x_ix_j \to \min, \tag{10}$$

при условиях заданной средней доходности портфеля m_p:

$$x_0m_0+\sum_{i=1}^{n} x_im_i = m_p \ , \tag{11}$$

и полноты долей

$$x_0+\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{12}$$

Как известно, решение этой задачи дает распределение долей рискового капитала в виде:

$$X_0 = X_0(m_p)=\frac{m_p-m_0}{d^2}V^{-1}(M-m_0I), \tag{13}$$

где $d^2=(V^{-1}(M\text{-}m_0I),M\text{-}m_0I)$. При этом $x_0=1-(X_0,I)$.

Задача Тобина об оптимальном портфеле максимальной средней доходности в случае наличия безрисковых бумаг ставится следующим образом: найти распределение долей капитала инвестора x_i максимизирующих ожидаемую среднюю доходность портфеля:

$$x_0m_0+\sum_{i=1}^{n} x_im_i \to \max \tag{14}$$

при условии, что обеспечивается заданный уровень риска r_p:

$$\sum_{i,j=1}^{n} V_{ij}x_ix_j = r_p^2 \tag{15}$$

и выполняется условие полноты долей (12).

Соответствующая формула распределения долей рискового капитала имеет вид [4]:

$$X^0 = X^0(r_p)=\frac{r_p}{d}V^{-1}(M-m_0I), \tag{16}$$

при этом $x_0 = 1 - (X_0, I)$.

Заметим, что по определению векторы X^0 и X_0 коллинеарны. Точнее $X^0 = \gamma X_0$, где $\gamma = r_p d / (m_p - m_0)$. Отсюда по существу вытекают многие последующие суждения.

Теорема 3. Любая точка (r_p, m_p), лежащая на эффективной прямой (линии рынка капитала CML) в координатах риск-средняя доходность соответствует оптимальной постановке как задачи Тобина о портфеле минимального риска, так и задачи Тобина о портфеле максимальной средней доходности. Более того, структура (распределение долей) как оптимального портфеля Тобина минимального риска, так и оптимального портфеля Тобина максимальной средней доходности в точке (r_p, m_p) одинакова.

Действительно, выражая зависимость риска r_p оптимального портфеля минимального риска от его средней доходности m_p с использованием (13), получим формулу [4]:

$$r_p^2 = (VX_0, X_0) = (m_p - m_0)^2 / d^2 .$$

Следовательно,

$$m_p - m_0 = dr_p . \qquad (17)$$

С другой стороны, выражая зависимость средней доходности оптимального портфеля максимальной средней доходности от его риска с использованием (16), получим формулу [4]:

$$x_0 m_0 + (M, X^0) = m_0 + dr_p , \qquad (18)$$

из которой следует (17).

Кроме того, пусть, например, зафиксирован уровень средней доходности портфеля m_p и решается задача минимизации риска (10) – (12). Решение этой задачи дает распределение долей капитала в виде формулы (13).

Но это же решение является оптимальным и для задачи (12), (14), (15) максимизации доходности портфеля при условии, что r_p определяется выражением (17). Это следует из того, что соответствующая формула распределения долей капитала имеет вид (16).

Аналогично обратное. Если решается задача максимизации средней доходности портфеля при заданном уровне риска r_p, то соответствующее решение $X^0(r_p)$ будет оптимальным и для задачи минимизации риска $X_0(m_p)$ при $m_p = m_0 + r_p d$. Это следует из формулы (18).

Кроме того, в силу равенства $X^0 = X_0$ в условиях теоремы 3 совпадают и доли безрискового капитала x_0 для обеих задач.

Как известно, важным понятием в методологии оптимального портфельного инвестирования является касательный портфель [7].

Замечание 3. Координаты касательного портфеля имеют вид:

$$r_p = \frac{\sqrt{a\text{-}2m_0 b + cm_0^2}}{b - cm_0}, \; m_p = \frac{a\text{-}bm_0}{b - cm_0}. \qquad (19)$$

Эти формулы получаются путем решения системы уравнений (7), (17).

Замечание 4. Распределение долей рисковых ценных бумаг касательного портфеля (касательный портфель) задается выражением

$$X_k = \frac{1}{b - cm_0} V^{-1}\left(M - m_0 I\right). \qquad (20)$$

Эта формула вытекает из (18) с учетом равенства

$$m_p - m_0 = \frac{a - 2m_0 b + cm_0^2}{b - cm_0} = \frac{d^2}{b - cm_0},$$

следующего из (19).

Отметим, что формула (20) определяет касательный портфель как для задачи (10) – (12), так и для задачи (12), (14), (15).

§2. Зависимость параметров оптимального портфеля от предварительно выбранной доли безрисковых бумаг

Решение задачи (1), (2), (3) (также как и задачи (4), (5), (3)) определяет, в частности, величину x_0 – долю вложения инвестора в безрисковый капитал. Однако, часто поступают иначе, а именно инвестор заранее определяется с долей ν вложения в безрисковый капитал, доходность которого является детерминированной величиной m_0. Затем может решаться оптимизационная задача Марковица или Тобина для рисковых активов. Понятно, что минимальный риск комбинированного портфеля Тобина (равный нулю) будет при $\nu = 1$. Однако, при этом гарантируется лишь средняя доходность портфеля равная m_0.

Выбор доли ν – безрискового капитала может быть связан с оптимизацией функции полезности [3] или с соображениями, характеризующими отношение инвестора к риску. Часто, используется известная теорема разделения [7], в соответствии с которой доля рисковых активов определяется равенством $(1-\nu)X_k$, где X_k – касательный портфель. Однако, интересными и полезными могут быть и другие варианты.

Итак, зафиксируем долю $\nu \in (0,1)$ вложения в безрисковый капитал и будем решать, например, задачу о минимизации риска портфеля ценных бумаг при заданном уровне средней доходности рисковой части портфеля, равной m_p. Рассмотрим зависимость от параметра ν оптимального распределения X_ν долей рискового капитала и минимального значения риска $r_p(\nu)$.

Для фиксированного $\nu \in (0,1)$ дело сводится к решению задачи типа Марковица:

$$(VX,X) \to \min \ , \tag{21}$$

при условиях:

$$(X,M) = m_p , \tag{22}$$

$$(X,I) = 1 - \nu . \tag{23}$$

Как и выше будем использовать обозначение:

$$a: = \left(V^{-1}M,M\right),\ b: = \left(V^{-1}M,I\right),\ c: = \left(V^{-1}I,I\right).$$

Теорема 4. Решение задачи (21) – (23) дается формулой:

$$X_\nu = X_* + \nu Y . \tag{24}$$

Здесь X_* – решение стандартной задачи Марковица (1) – (3) вида (6), а

$$Y: = \frac{1}{ac\text{-}b^2} V^{-1}\left(bM - aI\right).$$

При этом риск портфеля, порождаемого решением оптимизационной задачи (21) – (23), определяется соотношением:

$$r_p^2(\nu) = \frac{1}{ac\text{-}b^2}\left(a(1-\nu)^2 - 2bm_p(1-\nu) + cm_p^2\right). \tag{25}$$

Действительно, функция Лагранжа задачи (21)-(23) описывается формулой:

$$L(X,\lambda,\delta) = (VX,X) - 2\lambda\left[(X,M) - m_p\right] - 2\delta\left[(X,I) - 1 + \nu\right],$$

где λ и δ – параметры функции.

Необходимые условия экстремума этой функции имеют вид системы:

$$\begin{cases} VX = \lambda M + \delta I \\ a\lambda + b\delta = m_p \\ b\lambda + c\delta = 1\text{-}\nu \end{cases} . \tag{26}$$

Найдем λ и δ по правилу Крамера из второго и третьего уравнения системы (26). Подставляя эти значения в первое равенство, после несложных преобразований, получим формулу (24).

Тогда для заданного $\nu \in (0,1)$ минимальный риск портфеля $r_p(\nu)$ при ограничениях (22), (23) имеет вид:

$$r_p^2(\nu) = (VX_\nu,X_\nu) = \left(r_p^*\right)^2 + 2\nu(VX_*,Y) + \nu^2(VY,Y), \tag{27}$$

где $\left(r_p^*\right)^2 := \left(VX_*, X_*\right)$ – минимальный риск стандартного портфеля Марковица, имеющий вид (7).

Используя выражения для X_* и Y получим:

$$\left(VX_*, Y\right) = \frac{m_p b - a}{ac - b^2},\ \left(VY, Y\right) = \frac{a}{ac - b^2}.$$

Подставляя эти значения в (27), заключаем, что риск портфеля определяется формулой (25).

Замечание 5. В соответствии с теоремой 4 каждому $v \in (0,1)$ соответствует своя линия рынка капитала в координатах риск-средняя доходность. Со всеми вытекающими из этого факта последствиями.

Интересно установить, при каком v выражение $\left(r_p^v\right)^2$ будет минимальным.

Следствие 1. Выражение риска (25) принимает экстремальное значение в точке v_0, определяемой равенством

$$v_0 = \frac{a - m_p b}{a} = 1 - \frac{m_p b}{a}. \tag{28}$$

При этом v_0 – точка минимума, например, в случае положительной определенности матрицы ковариации V.

Действительно, из (27) следует,

$$\frac{d\left(r_{\mathrm{p}}^v\right)^2}{dv} = 2\left(VX_*, Y\right) + 2v\left(VY, Y\right).$$

Тогда экстремальная точка $v_0 = -\frac{\left(VX_*, Y\right)}{\left(VY, Y\right)}$. Используя здесь приведенные в теореме 4 выражения для $\left(VX_*, Y\right)$ и $\left(VY, Y\right)$, получим формулу для v_0. Так как $\frac{d^2\left(r_p\right)^2}{dv^2} = 2\left(VY, Y\right)$, то v_0 – точка минимума в случае положительной определенности матрицы ковариации V.

Заметим что, формулу (28) можно получить другим способом, исходя из (25).

В зависимости от входящих в выражение (28) параметров величина v_0 может содержаться в интервале (0,1), либо не содержаться в этом интервале. В первом случае в качестве доли безрискового капитала следует выбирать именно v_0. Во втором случае следует отдельно рассматривать вариант $v_0 \geq 1$ и $v_0 < 0$. Если $v_0 \geq 1$, то получим тривиальную рекомендацию инвестору – весь капитал вложить в безрисковый актив. Если же $v_0 < 0$, то следует рекомендовать инвестору заимствовать деньги (в количестве доли $|v_0|$ от его капитала) под безрисковую ставку m_0 и вложить весь капитал, в том числе и заимствованный, в рисковый портфель.

Отметим, что согласно формуле (28) в случае, например, положительности всех элементов матрицы ковариации *V* величина $v_0 < 1$.

Замечание 6. Используя формулы (25) и (28), получим $r_p^2(v_0) = \frac{m_p^2}{a}$. Отсюда видно, что в случае, например, положительной определенности матрицы ковариации *V* справедливо неравенство $r_p^2(v_0) < (r_p^*)^2$.

Рассмотрим какие изменения предыдущих рассуждений возникают при выборе параметра $v \in (0,1)$, минимизирующего риск рисковых активов при заданной средней доходности всего портфеля m_p. Для заданного $v \in (0,1)$ дело сводится к решению задачи типа Марковица:

$$(VX,X) \to \min, \tag{29}$$

при условиях:

$$(X,M) = m_p - vm_0, \tag{30}$$

$$(X,I) = 1 - v. \tag{31}$$

Теорема 5. Решение задачи (29) – (31) имеет вид:

$$X_v = X_* + vZ, \tag{32}$$

где X_* – решение (6) стандартной задачи Марковица, а:

$$Z := \frac{1}{ac\text{-}b^2} V^{-1}\left[(b - cm_0)M + (bm_0 - a)I\right].$$

Минимальный риск портфеля r_p при ограничениях (30), (31) для заданного $v \in (0,1)$ имеет вид:

$$r_p^2 = (VX_v, X_v) = (r_p^*)^2 + 2v(VX_*, Z) + v^2(VZ, Z), \tag{33}$$

где $r_\text{p}^* = (VX_*, X_*)^{\frac{1}{2}}$ – минимальный риск стандартного портфеля Марковица, выражаемый формулой (7).

Действительно, функция Лагранжа задачи (29)-(31) описывается формулой:

$$L(X,\lambda,\delta) = (VX,X) - 2\lambda\left[(X,M) - m_p + vm_0\right] - 2\delta\left[(X,I) - 1 + v\right],$$

где λ и δ – параметры функции.

Необходимые условия экстремума этой функции имеют вид системы:

$$\begin{cases} VX = \lambda M + \delta I \\ A\lambda + B\delta = m_p - vm_0 \\ B\lambda + C\delta = 1\text{-}v \end{cases}. \tag{34}$$

Находя λ и δ по правилу Крамера из второго и третьего уравнения системы (34) и подставляя эти значения в первое равенство, получим формулу (32). Формула (33) получается простой подстановкой (32) в выражение риска.

Следствие 2. Выражение риска (33) принимает экстремальное значение в точке v_1, определяемой равенством:

$$v_1 = \frac{a - b(m_p + m_0) + cm_0 m_p}{a - 2bm_0 + cm_0^2}. \tag{35}$$

При этом, v_1 – точка минимума, например, в случае положительной определенности матрицы ковариации V.

Действительно, аналогично теореме 4 точка v_1, в которой достигается экстремум выражения (33) по v определяется по формуле $v_1 = -\frac{(VX_*,Z)}{(VZ,Z)}$.

Используя выражение для X_* и Z получим:

$$(\mathrm{VX}_*, Z) = -\frac{1}{ac - b^2}\left(a - b(m_p + m_0) + cm_p m_0\right), \tag{36}$$

$$(VZ,Z) = \frac{1}{ac - b^2}\left(a - 2bm_0 + cm_0^2\right). \tag{37}$$

Отсюда следует формула (35). Аналогично следствию 1 v_1 – точка минимума в случае положительной определенности матрицы ковариации V.

Заметим, что в случае $m_p = m_0$ из (37) получим естественное равенство $v_1 = 1$.

Подсчитаем выражение $r_p^2(v_1)$. Напомним, что согласно определению $\left(r_p^*\right)^2 = \frac{m_p^2 c - 2m_p b + a}{ac - b^2}$. Тогда, используя формулы (35)-(37), получим:

$$r_p^2(v_1) = \left(r_p^*\right)^2 - \frac{(VX_*,Z)^2}{(VZ,Z)} = \frac{(m_p - m_0)^2}{a - 2bm_0 + m_0^2}. \qquad 38)$$

Замечание 7. Поскольку $a - 2bm_0 + m_0^2 = d^2$, то формулы (35) и (38) совпадают с соответствующими формулами, полученными при решении стандартной задачи Тобина о минимизации риска портфеля ценных бумаг для заданной средней доходности m_p портфеля при наличии безрисковых бумаг со средней доходностью m_0. В частности, (38) совпадает с (17).

До сих пор мы рассматривали ситуацию, когда при фиксированной доле *v* безрисковых ценных бумаг мы решали задачу о минимизации риска портфеля при заданном уровне средней доходности рисковой части портфеля (либо всего портфеля) m_p. Посмотрим на ситуацию иначе, а именно, пусть задана доля v безрисковых ценных бумаг. Зададимся вопросом, при каком уровне средней доходности портфеля $m_p(v)$ мы, решая задачу Тобина о минимизации риска, придем именно к такой доле безрисковых ценных бумаг.

Теорема 6. Средняя доходность портфеля минимизации риска, гарантирующая заданную долю v безрисковых ценных бумаг определяется выражением:

$$m_p(v) = m_0 + \frac{(1-v)d^2}{b - m_0 c}.$$

При этом зависимость решения (структура рискового капитала) указанной оптимизационной задачи Тобина от заданной доли v безрискового капитала выражается формулой:

$$X_0(v) = \frac{1-v}{b - m_0 c} V^{-1}\left(M - m_0 I\right), \tag{39}$$

а риск, соответствующий оптимальному решению, равен:

$$r_p(v) = \frac{1}{d}\left(m_p(v) - m_0\right) = \frac{(1-v)d}{b - m_0 c}.$$

Действительно, выражение для $m_p(v)$ следует из соотношения $(X_0, I) = 1 - v$, где X_0 – решение (13) задачи Тобина о минимизации риска при заданном уровне средней доходности. При получении формулы для риска $r_p(v)$ используется равенство (17).

Известная теорема разделения [7] утверждает, что в условиях теории CAPM портфель инвестора состоит из доли v безрисковых бумаг, зависящей от отношения инвестора к риску, оптимальная же для инвестора комбинации рисковых активов не зависит от его предпочтений относительно риска и дохода. При этом рисковые активы распределяются в пропорциях соответствующих касательному портфелю.

Замечание 8. Формула (39) влечет теорему разделения в нашей ситуации, поскольку согласно (20) касательный портфель определяется равенством $X_k = \dfrac{1}{b - m_0 c} V^{-1}\left(M - m_0 I\right)$. При этом $(X_k, I) = 1$. Тогда $(X_0(v), I) = 1 - v$.

Теорема 7. Риск портфеля в задаче о максимизации средней доходности, гарантирующий заданную долю v безрисковых ценных бумаг, определяется формулой

$$r_p(v) = \frac{(1-v)d}{(b - m_0 c)}.$$

При этом распределение долей рискового капитала имеет вид:

$$X^0(v) = \frac{(1-v)}{b - m_0 c} V^{-1}(M - m_0 I). \qquad (40)$$

Действительно, для задачи о максимизации средней доходности при заданном уровне риска имеет место формула $(X^0, I) = 1 - v = \frac{r_p(v)}{d}(b - m_0 c)$. Она совместно с (16) обеспечивает высказанное утверждение.

Замечание 9. Поскольку вектор $\frac{1}{b - m_0 c} V^{-1}(M - m_0 I)$ характеризует касательный портфель, то из формулы (40) следует, что в случае задачи о максимизации эффективности при заданном уровне риска также справедлива теорема разделения.

Список источников

1. Давнис, В.В., Тинякова В.И. Модели портфельного инвестирования в финансовые активы [текст] /В.В.Давнис,В.И. Тинякова. – Воронеж: ЦНТИ, 2010. – 112 с.
2. Касимов, И.Ф. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг [текст] / И.Ф. Касимов. – М.: ФИЛИНЪ, 1998. – 144 с.
3. Колемаев, В.А. Математическая экономика[текст] / В.А.Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.
4. Малыхин, В.И. Финансовая математика[текст] /В.И.Малыхин. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999. – 247 с.
5. Хацкевич, В.Л. О взаимосвязи классических задач портфельного инвестирования минимизации риска и максимизации доходности [текст] / В.Л. Хацкевич // Материалы I Международной научно-практической Интернет-конференции «Финансовые рынки: модели, риски, решения». – Воронеж: ЦНТИ, 2011. – с. 86 – 91.
6. Шаповал, А.Б. Инвестиции: математические методы [текст] / А.Б. Шаповал. – М.: ФОРУМ: ИНФРА, 2007. – 96 с.
7. Шарп. У. Инвестиции[текст] / У.Шарп, Г. Александер, Дж. Бейли. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 1028 с.
8. Markowitz,H.M. PortfolioSelection [текст] / H.M. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – №1. –Pp. 77 – 91.
9. Tobin, J. The Theory of Portfolio Selection [текст] / J.Tobin // Theory of Interest Rates. – London: MacMillan, 1965. – Pp. 3 – 51.

SOME PROPERTIES OF OPTIMAL PORTFOLIO SECURITIES OF MINIMAL RISK AND MAXIMUM RETURN

Khatskevich Vladimir Lvovich,
Dr. Sc. of Technical Sciences, Professor of the Chair of High Mathematics of All-Russian Correspondence Financial and Economic Institute (Voronezh filial-branch); okp.voronezh@vsfsei.ru

The interrelation of the characteristics of classical models Markowitz – Tobin to minimize the risk of the securities portfolio at a given yield and maximize return on average portfolio for a given level of risk. Formulas expressing the dependence of the parameters of the optimal portfolio preselected percentage of risk-free securities are established.
Keywords: portfolio, risk, profitability, risk-free securities, investor.