УДК 336.76

ИНВЕСТИЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПОРТФЕЛЬНОГО АНСАМБЛЯ ОДНОИНДЕКСНЫХ МОДЕЛЕЙ ШАРПА

Акопян Елена Александровна,
кандидат экономических наук, доцент кафедры математики Пятигорского государственного гуманитарно-технологического университета; elena_hlebnikova@mail.ru

Предлагается на основе имитационно-эконометрического подхода строить портфельный ансамбль одноиндексных моделей Шарпа и использовать его для формирования портфельного образа инвестиционных решений. Варианты портфельного образа используются для получения структуры портфеля, сохраняющего эффективность на упреждающем отрезке времени.
Ключевые слова: портфель ценных бумаг, одноиндексная модель, портфельный образ, портфельный ансамбль моделей.

Известно, что предложенная Марковицем модель портфельного инвестирования стала первым «кирпичиком» в фундаменте современной финансовой теории. С ее помощью удалось понять взаимосвязь таких характеристик, как риск-доходность, она открыла дорогу для решений на основе диверсификации, но ни Марковицу, ни его последователям так и не удалось эту модель превратить в инструмент, используемый в практике финансового менеджмента. Несмотря на это, исследования по совершенствованию методики обоснования инвестиционных решений, в том числе и портфельных, ведутся и довольно интенсивно. Особенно обращают на себя внимание работы, в которых реализуется идея заимствования многовариантного подхода, используемого при обосновании стоимости деревативов. Так, в работах [1, 2] вводится понятие портфельного образа инвестиционных решений, под которым понимается некоторое разнообразие портфельных решений с указанием вероятностного распределения их предпочтительности на упреждающем отрезке времени. Смысл портфельного образа можно уточнить следующим пояснением. Портфель, который можно построить на основе данных упреждающего периода, если бы они были известны, должен находиться внутри портфельного образа.

Как следует из определения, природа портфельного образа, содержит в себе неопределенность, разрешение которой требует прогнозных оценок. Наиболее удачно эта проблема решается, если в качестве базовой модели портфеля использовать портфель У. Шарпа. Смысл предлагаемого подхода становится понятным из рассмотрения особенностей построения модели Шарпа.

Главное отличие модели Шарпа от других моделей портфельного инвестирования в том, что ее построение осуществляется на основе эконометрического моделирования. Это тот аргумент, который позволяет предпочесть данную модель в качестве основного инструмента, используемого при построении портфельного образа инвестиционных решений. Реализация этого аргумента требует более подробного рассмотрения особенностей этой модели.

У. Шарп предложил портфель формировать с использованием коэффициентов одноиндексной модели. Модель идентифицирует зависимость доходности активов, включаемых в инвестиционный портфель, от доходности рыночного индекса. Записывается она в виде однофакторной регрессионной модели

$$r_{ti} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + \varepsilon_{ti}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где r_{ti} – уровень доходности i-го актива в момент времени t; r_{It} – уровень доходности рыночного индекса в момент времени t; α_i, β_i – параметры регрессионной модели; ε_{ti} – ненаблюдаемая случайная величина.

В модели (1) β представляет собой хорошо известный бета-коэффицент модели, которую в финансовой теории принято называть CAPM. С помощью CAPM удается получить объяснение предпочтительности инвестирования в рыночные активы перед другими вариантами, например, депозитом.

С помощью параметров этой регрессионной модели (1) удается выразить все величины, используемые в моделях портфельного инвестирования и, в частности, используемые в модели Шарпа. Расчет этих величин осуществляется по следующим формулам:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{r}_I, \tag{2}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_I^2, \tag{4}$$

где $\bar{r}_i$, $\bar{r}_I$ – математические ожидания доходности i-го актива и индекса; σ_i^2, σ_I^2 – дисперсии доходностей i-го актива и индекса; σ_{ij} – ковариация доходностей i-го и j-го активов.

Формулы выведены на основе свойств, которые постулируются для ненаблюдаемых случайных величин ε_{ti}. Естественность всех предположений относительно случайных величин ε_{ti} не вызывают сомнений и, кроме того, обеспечивают возможность корректного проведения преобразований.

Для того чтобы записать модель, предложенную Шарпом, необходимо определить выражение для доходности портфеля и выражение для дисперсии портфеля. В соответствии с идеями Марковица на основе этих двух характеристик можно построить модель, обеспечивающую получение портфеля, называемого в рамках финансовой теории эффективным и записываемого в виде:

$$\mathbf{w}'_{n+1}\mathbf{\Sigma}_d\mathbf{w}_{n+1} \to \min, \tag{5}$$

$$\mathbf{w}'_{n+1}\boldsymbol{\alpha} = \mu, \tag{6}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{i} = 1, \tag{7}$$

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\beta} = w_{n+1}, \tag{8}$$

где $\mathbf{w}'_{n+1} = (w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})$ – вектор, компоненты которого определяют структуру расширенного портфеля;

$$\mathbf{\Sigma}_d = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma^2_{\varepsilon,n} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \sigma^2_m \end{pmatrix}$$ – диагональная матрица, на диагонали которой стоят остаточные дисперсии активов и дисперсия рыночного портфеля (индекса) σ^2_m; $\mathbf{w}' = (w_1, \ldots, w_n)$ – вектор, компоненты которого определяют структуру портфеля; $\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – вектор параметров; $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \ldots, \beta_n,)$ – вектор параметров.

Решение задачи условной оптимизации (5) – (8) с помощью множителей Лагранжа сводится к решению системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 2\sigma_2^2 & 0 & 0 & \alpha_2 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 2\sigma_3^2 & 0 & \alpha_3 & 1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sigma_m^2 & \overline{r}_m & 0 & -1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \overline{r}_m & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Полученная система уравнений позволяет сделать вывод о характере портфеля. Если по преимуществу $\beta > 1$, то портфель считается агрессивным. В противном случае портфель осторожный. В тех случаях, когда $\beta = 1$, портфель обеспечивает средний уровень доходности на уровне доходности индекса. Эта характеристика портфеля относятся только к историческому периоду.

Вопрос, касающийся построения портфельного образа инвестиционных решений, в основном связан с исследованием возможностей модифицированного представления одноиндексной модели (1). На ее основе предлагается построить имитационную модель для формирования портфельного ансамбля стохастических моделей, являющегося информационной базой портфельного образа.

Для упрощения схемы расчетов будем предполагать независимость финансовых активов. Реальность не всегда находится в соответствии с этим предположением. Однако признавая возможность автономного моделирования ожидаемых ситуаций по каждому финансовому активу, включаемому в портфель, мы тем самым принимаем решение относительно аппарата, который можно использовать в данной ситуации. Этим аппаратом, безусловно, являются имитационно-эконометрические модели [3]. Реализация этой идеи на интуитивном уровне выглядит довольно просто. Для каждого актива строится имитационно-эконометрическая модель, с помощью которой имитируется необходимый набор данных. Но результатом применения этих моделей является единый набор данных, используемый для построения портфеля ценных бумаг. Поэтому возникает естественный вопрос: «В предлагаемом подходе используется совокупность автономных модели или система автономных моделей?».

Ответ может показаться несколько неожиданным. В предлагаемом подходе используется и не совокупность автономных моделей, и не система моделей. Не совокупность потому, что эти модели объединяет функциональный признак – все они предназначены для обоснования портфельного решения. Но это и не система моделей, так как изъятие любой из этих моделей или включение дополнительной модели в число используемых не требует пересчета остальных моделей. Между моделями нет явных связей. В то же время в составе исходных данных каждой модели находится единый для всех моделей информационный источник. Благодаря этому источнику между моделями устанавливается неявная взаимосвязь, которая проявляется в результатах имитирования. Этот тип моделей, на наш взгляд, имеет смысл выделить в отдельный класс. Для этого целесообразно ввести специальный термин.

Имитационные модели, объединяемые только функциональным признаком, будем называть ансамблем. Между собой ансамбли различаются функциональным признаком, в силу чего в название ансамбля следует включать наименование функционального признака. В соответствии с изложенной точкой зрения ниже будем рассматривать портфельный ансамбль имитационно-эконометрических моделей. Из названия нетрудно понять, что ансамбль может состоять, в том числе и из специальным образом модифицированных одноиндексных моделей финансовых активов, включаемых в портфель.

Модифицированный вариант одноиндексной модели для наших целей получается путем включения и записывается следующим образом:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{It} + d_i x_{it} + \varepsilon_{it} \tag{10}$$

Коэффициент d_i оценивается по методунаименьших квадратов вместе с остальными коэффициентами модели, а дискретная переменная принимает два значения 1 и –1, идентифицируемые на историческом периоде в соответствии с гипотезой альтернативных ожиданий (высокая доходность, низкая доходность). Для дискретной переменной строится функция логистического распределения $\Lambda_i(\cdot)$ и в имитационной модели используется математическое ожидание выражения (10), т.е.

$$\overline{r_i} = \alpha_i + \beta_i \overline{r_I} + d - 2d\Lambda(\sigma_I)\,. \tag{11}$$

Как известно, строгих рамок, регламентирующих построение имитационных моделей, нет. В предлагаемых нами моделях таким регламентирующим элементом является принцип стохастического воспроизведения закономерностей исторического периода. Можно предположить, что существуют различные варианты формального представления этого принципа в имитационных моделях. В моделях, рассматриваемых в данной статье, этот принцип реализуется с помощью эконометрических моделей с дискретной (качественной) зависимой переменной.

Рассмотрим простейший вариант имитационно-эконометрической модели, в которой реализован принцип стохастического воспроизведения закономерностей исторического периода. В общем виде, с ориентацией на получение прогнозных оценок доходности финансовых активов, такая модель может быть записана в следующем виде:

$$\xi_{ik} = RND \tag{12}$$

$$\Lambda(\xi_{ik}) = \frac{e^{b_{0i}+b_{1i}\xi_{ik}}}{1+e^{b_{0i}+b_{1i}\xi_{ki}}} \tag{13}$$

$$\varepsilon_{ik} = N(0, \sigma_i^2) \tag{14}$$

$$\sigma_{ik}^{[p]} = d_i - 2d_i\Lambda_i(\xi_{ik}) \tag{15}$$

$$r_{it}^k = \alpha_i + \beta_i r_t + \sigma_{ik}^{[p]} + \varepsilon_{ik} \tag{16}$$

где r_{it}^k – уровень доходности финансового актива, полученный в результате k –го имитационного эксперимента для момента времени t; α_i, β_i, d_i – оцениваемые коэффициенты модели; $\sigma_{ik}^{[p]}$ – распределенная волатильность i –го актива в k –ом имитационном эксперименте; $\Lambda_i(\cdot)$ –

функция логистичекого распределения; ε_{ik}– случайная величина, сгенерированная датчиком нормально распределенных случайных чисел в k– м имитационном эксперименте; $N(0,\sigma_i^2)$– датчик нормально распределенных случайных чисел; b_{0i}, b_{1i} – оцениваемые коэффициенты логистической функции; ξ_{ik}– случайная величина, сгенерированная датчиком равномерно распределенных случайных чисел в k-ом имитационном эксперименте; RND – датчик равномерно распределенных случайных чисел.

В модели (12) – (16) предусматривается генерирование двух случайных величин ξ_{ik} и ε_{ik}. Первая случайная величина имеет равномерное распределение и используется в качестве аргумента логистической функции для стохастического воспроизведения с помощью распределенной волатильности закономерностей исторического периода. Результат получается в виде ожидаемого отклонения от экстраполяционной оценки, получаемой с помощью аналитической составляющей. Его складывают с этой экстраполяционной оценкой, получая усредненное стохастическое воспроизведение исторического периода. Вторая случайная величина имеет нормальное распределение и предназначена для ослабления зависимости от данных исторического периода. Трудно понять смысл введения двух случайных величин, эффекты, от воздействия которых на результаты моделирования, могут противоречить друг другу. Поэтому кратко поясним основную идею замысла, который реализуется с помощью данного приема.

Целевое назначение первой случайной составляющей – описание будущего в виде такого многообразия, усреднение которого позволяет понять, что будущее это прошлое, видоизмененное в соответствии с доминирующими на историческом периоде тенденциями. Вторая случайная величина привносит в это описание те элементы нового, ростки которого не зафиксированы статистикой в прошлом. Таким образом, правдоподобность описания будущего повышается до такой степени, что сгенерированные данные этого описания можно использовать для построения различного рода моделей инвестирования, точно таким же образом, как это делается при построении моделей с использованием данных исторического периода. Например, данные, сгенерированные с помощью такой имитационно-эконометрической модели, могут использоваться для построения портфеля ценных бумаг. В реализации этого подхода особый интерес представляет портфель Шарпа, построение которого основано на одноиндексной модели.

Портфельный ансамбль имитационно-эконометрических моделей в каждой серии расчетов позволяет получить скорректированные оценки α– коэффициентов и остаточных дисперсий

$$\hat{\alpha}_{ik} = \alpha_i + \sigma_{ik}^{[p]} \tag{17}$$

$$\hat{\sigma}_i = \sigma_{ik}^{[p]} + \varepsilon_{ik} \quad (18)$$

Скорректированными значениями заменяются соответствующие значения матрицы (9) и решается полученная таким образом система уравнений. В результате получается один из вариантов портфельного образа. Следующая серия расчетов позволяет получить еще один вариант портфельного образа. Таким образом, количеству имитационных экспериментов соответствует количество вариантов портфельного образа инвестиционных решений. Из вариантов портфельного образа формируется структура финального портфеля ценных бумаг. Существуют различные подходы к формированию этого портфеля. В настоящее время ведутся исследования в этом направлении. Наиболее перспективным в настоящее время является направление, в котором реализует принцип стохастического предпочтения наихудших вариантов исторического периода в надежде, что будущее окажется не хуже наихудших вариантов исторического периода.

Список источников

1. Борисов А.Н. Портфельный образ инвестиционных решений на фондовом рынке / А.Н. Борисов, О.В. Тимченко // Современная экономика: проблемы и решения. – 2011. – №7(19). – С. 139-148.

2. Давнис В.В. Модели портфельного образа и оценка возможностей их практического использования / В.В. Давнис, С.Е. Касаткин, О.В. Тимченко // Современная экономика: проблемы и решения. – 2011. – №9(21). – С. 126-137.

3.Давнис В.В. Имитационно-эконометрическое моделирование доходности финансового актива / В.В. Давнис, Д.А. Хабибулин // Экономические науки. – 2010. – №6(67). – С. 236-249.

INVESTMENT DECISIONS BASED ON PORTFOLIO ENSEMBLE SHARPE'S SINGLE-INDEX MODEL

Akopyan Yelena Aleksandrovna,
Ph. D. of Economy, Associate Professor of the Chair of Mathematics
Pyatigorsk State Humanitarian and Technological University;
elena_hlebnikova@mail.ru

It is proposed on the basis of simulation and econometric approach to build a portfolio ensemble Sharpe single-index model and use it to generate an image of portfolio investment decisions. Variants of the portfolio of the image are used to obtain the structure of the portfolio at preserving the effectiveness of proactive time interval.
Keywords: portfolio, single-index model portfolio image portfolio ensemble of models.