УДК 330.44, 519.86

ОПТИМИЗАЦИЯ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОТРЕБЛЕНИЕМ И ИНВЕСТИЦИЯМИ (В МОДЕЛИ СОЛОУ)

Дудчак Владимир Власьевич,
доктор экономических наук, заместитель генерального директора ОАО «Концерн «Созвездие»; dudchak@sozvezdie.su
Скапцов Юрий Петрович,
начальник планово-экономического департамента ОАО «Концерн «Созвездие»; syp@sozvezdie.su
Маликов Александр Аркадьевич,
начальник экономической службы ОАО «Концерн «Созвездие»; syp@sozvezdie.su

Рассмотрена задача регулирования экономики посредством выбора оптимального отношения $s = s(t)$ между потреблением и инвестициями. Наилучшее потребление определяется функцией благосостояния. В данной статье описан подход к оптимизации инвестиций в случае кусочно-постоянной (релейной) функции $s(t)$.
Ключевые слова: потребление, инвестиции, функционал благосостояния, оптимизация.

Введение. Свою модель экономического роста Р. Солоу впервые изложил в 1956 г. в статье «Вклад в теорию экономического роста» («A Contribution to the Theory of Economic Growth»). По оценкам американских специалистов, никто из экономистов не использовал так искусно и просто в теории роста понятие «замещение труда капиталом». В 1987 г. Р. Солоу «за вклад в теорию экономического роста» получил нобелевскую премию. Он исходил из предположения, что на сбережение идет определенная часть национального дохода, выражаемая понятием «склонность к сбережениям».

При наличии исправно функционирующих рынков труда и капитала сбережения, в конечном счете, взаимосвязаны с инвестициями, которые намерены сделать фирмы. Если норма сбережений (инвестиций) невысока, то капитал дорожает и капиталоемкость, определяемая ценами на факторы производства, падает. Сокращение инвестиций может привести к износу, разрушению материальной и технической базы, к снижению качества и конкурентоспособности, а рациональное увеличение может способствовать экономическому приросту, улучшению качества продукции [1 – 6].

В его работах было показано, что капитал, труд и объем производства имеют одинаковую норму роста (если рассматривать продолжительный отрезок времени при данной неизменной технологии и при отсутствии технического прогресса). Это означало, что величина капитала, так же как и объем производимого продукта, приходящиеся на одного работающего, будут постоянными, поэтому и размер реальной заработной платы тоже будет неизменной величиной.

Таким образом, доказывалось, что увеличение сберегаемой доли дохода само по себе не может быть источником постоянного возрастания темпа экономического роста. Экономика с более высокой нормой сбережений может, разумеется, добиться большего объема производства на душу населения и более высокой реальной заработной платы. Однако при отсутствии технического прогресса темп роста останется прежним, несмотря на возросшую норму сбережений, и будет равнозначен росту предложения труда. Тем более что чрезмерное увлечение инвестициями может привести к заметному падению жизненного уровня персонала.

Основной вывод Р. Солоу заключался в том, что темпы экономического роста, рассмотренные на протяжении длительного периода времени, не зависят от темпов роста капиталовложений. В длительной перспективе именно технологическое развитие становится фундаментальной предпосылкой для экономического роста. В его работах постоянный технический прогресс и эффективное использование ресурсов являются определяющими факторами экономического роста.

Ниже рассмотрена классическая математическая модель Р. Солоу для односекторной экономики. Модель способна регулировать взаимодействие и эволюцию основных экономико-производственных характеристик (параметров) предприятий или фирм. Она позволяет определять зависимости между затратами основных фондов (капитала) или выпуском (валовым доходом), с одной стороны, и объемами инвестиций (отчислениями на развитие «производства») или потреблением – с другой стороны.

В данной статье описан процесс оптимизации инвестиций в случае кусочно-постоянной (релейной) функции баланса между потреблением и инвестированием.

1. Основные обозначения

Ниже рассматриваются следующие экономические параметры:

$Y(t)$ – выпуск (валовый доход) учреждения к моменту t, $0 \le t \le T$,

$K(t)$ – прирост капитала (основных фондов),

$L(t)$ – число занятых (трудовые ресурсы),

$I(t)$ – объем инвестиций (отчислений на развитие учреждения),

$C(t)$ – объем потребления,

$S(t)$ – объем сбережений.

Используются также удельные («подушевые») показатели:

$$k = \frac{K}{L}, \qquad y = \frac{Y}{L}, \qquad i = \frac{I}{L}, \qquad c = \frac{C}{L}.$$

$s = \frac{S}{Y}$ – коэффициент сбережений,

$v = \frac{I}{Y}$ – коэффициент инвестирования,

$Y=F(K,L)$ – производственная функция,

$A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ – производственная функция Кобба–Дугласа,

A, α – коэффициенты Кобба–Дугласа (A – инновационный уровень),

$L(t) = L_0 e^{\nu t}$ – формула экспоненциального роста трудовых ресурсов,

ν – показатель роста трудовых ресурсов,

μ – коэффициент выбытия используемого капитала (неизбежные отчисления),

2. Базовое (модельное) уравнение и его решение

При использовании модели Солоу часто рассматривается такое регулирование, при котором соотношения между потреблением, накоплением и инвестированием постоянны:

$$i = sy, \;\; c = (1-s)y, \;\; \frac{i}{c} = \frac{s}{1-s},$$

где y – ВВП, выраженный в денежном эквиваленте (валовый выпуск), s – коэффициент инвестирования $0 \le s \le 1$. В реальной ситуации естественно рассматривать и переменные соотношения: $s = s(t)$.

Уравнение Солоу запишем (см. [3], [5]) в виде:

$$\dot{k} = -\lambda k + s\,A\,k^{\alpha}. \tag{1}$$

Задача оптимизации инвестиций состоит теперь в том, чтобы определить регулирование $s=s(t)$, при котором достигалось бы наилучшее потребление. Для этого рассматривается функционал благосостояния:

$$V = \int_0^T e^{-\delta t}\, U(c(t))dt, \tag{2}$$

где δ – коэффициент дисконтирования, U – функция благосостояния ([4]), $c(t)=(1-s(t))y(t)$ – удельное потребление. Положим сначала $\delta=0$.

Из уравнения (1) можно найти функцию капитала. Подставив ее в производственную функцию (см. (2)), получим выражение V через s. Теперь нужно отыскать функцию s, на которой функционал V достигает максимума. Сначала решим уравнение (1).

Запишем модельное уравнение в виде задачи Коши

$$\dot{k} = -\lambda k + \sigma k^{\alpha}, \;\; k(0) = k_0 \;\; (\sigma = s\,A), \tag{3}$$

где $0 < \sigma < A$. Произведя замену переменной

$$k = e^{\frac{u}{\alpha}}, \quad \dot{k} = e^{\frac{u}{\alpha}}\,\frac{\dot{u}}{\alpha},$$

из (3) получим соотношение:

$$\dot{u} = -\lambda\alpha + \alpha\sigma e^{u\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)}, \quad u(0) = \alpha \ln\, k_0. \tag{4}$$

После замены $v=u+\lambda\alpha t$, $\dot{v} = \dot{u} + \lambda\alpha$ получим:

$$\dot v = \alpha\sigma e^{(v-\lambda\alpha t)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)}, \quad v(0) = u(0). \tag{5}$$

Разделим переменные

$$e^{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)v}\dot v = \alpha\sigma e^{\lambda(1-\alpha)t} \tag{6}$$

и проинтегрируем соотношение (4) по t от 0 до t, учитывая, что $\dot v dt = dv$, $v(0)=u(0)$, $v(t)=u(t)+\lambda\alpha t$. Получим:

$$e^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}u} = \frac{\sigma}{\lambda} + e^{-\lambda(1-\alpha)t}\left(e^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}u(0)} - \frac{\sigma}{\lambda}\right) \tag{7}$$

и

$$k(t)^{(1-\alpha)} = \frac{\sigma}{\lambda} + e^{-\lambda(1-\alpha)t}\left({k_0}^{(1-\alpha)} - \frac{\sigma}{\lambda}\right). \tag{8}$$

3. Вычисление и исследование функционала благосостояния в случае постоянного коэффициента инвестирования

Пусть удельный выпуск $y(t)$ выражается через функцию Кобба–Дугласа в удельных показателях:

$$y=Ak^{\alpha}.$$

Тогда формула удельного потребления примет следующий вид:

$$\begin{aligned} c(t) &= (1-s)y(t) = (1-s)Ak(t)^{\alpha} \\ &= (1-s)A(a+be^{-ht})^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}} \end{aligned} \tag{9}$$

где $k(t)$ – решение уравнения (3) с $\sigma = sA$, $a = \frac{sA}{\lambda}$, $b=k(0)^{(1-\alpha)} - a$, $h=\lambda(1-\alpha)$.

Рассмотрим («для удобства вычислений») функционал благосостояния в следующем виде:

$$V_1 = \int_0^T c(t)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}dt, \tag{10}$$

$$\alpha \in (0,1) \Rightarrow \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \in (0,\infty).$$

Подставив в (10) выражение (9), получим:

$$\begin{aligned} V_1 &= ((1-s)A)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}\int_0^T (a+be^{-ht})dt = \\ &= ((1-s)A)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}\left(aT - \frac{b}{h}(e^{-hT}-1)\right) = \\ &= ((1-s)A)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}\left(aT - \frac{k(0)^{1-\alpha}-a}{h}(e^{-hT}-1)\right) = \\ &= ((1-s)A)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}\left(a\left(T+\frac{1}{h}(e^{-hT}-1)\right) - \frac{k(0)^{1-\alpha}}{h}(e^{-hT}-1)\right) = \\ &= ((1-s)A)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}\left(\frac{sA}{\lambda}\left(T+\frac{1}{h}(e^{-hT}-1)\right) - \frac{k(0)^{1-\alpha}}{h}(e^{-hT}-1)\right) = \\ &= (1-s)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}(sN-M), \end{aligned}$$

где

$$N = \frac{A^{\frac{1}{\alpha}}}{\lambda}\left(T + \frac{1}{h}(e^{-hT} - 1)\right),$$

$$M = \frac{k(0)^{1-\alpha} A^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}}{h}(e^{-hT} - 1).$$

Рассмотрим функционал благосостояния в виде:

$$V_2 = \int_0^T c\,(t)dt. \qquad (11)$$

Подставив (9) в (11), получим:

$$V_2 = \int_0^T (1 - s)A(a + be^{-ht})^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}dt =$$

$$= \int_a^{v(T)} A\,(s - 1)\,v^{\frac{\alpha}{h(1-\alpha)}}\frac{1}{v - a}dv,$$

где

$$v = a + be^{-ht},\ \ dt = -\frac{1}{h}\frac{dv}{(v - a)}.$$

Пусть $\alpha = \frac{m}{p}$, где $\frac{m}{p}$ — правильная дробь, тогда $\frac{\alpha}{(1-\alpha)} = \frac{m}{p-m}$. В итоге получим:

$$V_2 = \frac{(s - 1)A}{h}\int_a^{v(T)} v^{\frac{m}{p-m}}\frac{1}{v - a}dv.$$

Для функционала благосостояния с ненулевым коэффициентом дисконтирования (положим $\delta = h$) и функцией благосостояния $U(c) = \frac{bh}{(1-\alpha)}c(t)$ имеем:

$$V_3 = \int_0^T e^{-ht}\frac{bh}{(1 - \alpha)}(1 - s)A(a + be^{-ht})^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}dt =$$

$$= \frac{(s - 1)A}{(1 - \alpha)}\int_0^T (a + be^{-ht})^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}\,d(a + be^{-ht}) =$$

$$= \frac{(s - 1)A}{(1 - \alpha)}\int_{a+b}^{a+be^{-hT}} v^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}\,dv = (s - 1)A\left((a + be^{-hT})^{\frac{1}{1-\alpha}} - k(0)\right).$$

4. Случай 2-ступенчатого управления.

Пусть интервал $[0,T]$ разбит на две равные части: $[0,\frac{T}{2}]$ и $[\frac{T}{2},T]$. Пусть функционал благосостояния задан в виде:

$$V = \int_0^T c(t)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}dt = \int_0^{T/2} c(t)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}dt + \int_{T/2}^T c(t)^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}dt = V_1 + V_2.$$

Рассмотрим по отдельности каждый из интервалов.

Пусть на интервале $[0, \frac{T}{2}]$ $s = s_1$. Тогда (1) примет вид:

$\dot{k} = -\lambda k + s_1 A k^{\alpha}, \;\; k(0) = k_0, \;\; 0 \le t \le T/2$.

Его решение имеет следующий вид:

$k = k_1(t, s_1) = ((s_1 \frac{A}{\lambda} + e^{-ht}(k_0^{1-\alpha} - s_1 \frac{A}{\lambda})))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Для функционала благосостояния на $[0, \frac{T}{2}]$ получаем представление:

$$V_1 = \frac{A^{1/\alpha}}{h\lambda}(1 - s_1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(s_1(h\frac{T}{2} - N) + M),$$

где $N = 1 - e^{-h\frac{T}{2}}$, $M = k_0^{1-\alpha}\frac{\lambda}{A}N$, $h = (1-\alpha)\lambda$.

Пусть на интервале $[\frac{T}{2}, T]$ $s = s_2$. Тогда система (1) примет вид:

$$\dot{k} = -\lambda k + s_2 A k^{\alpha}, \;\; k(T/2) = k_1(T/2), \;\; T/2 \le t \le T.$$

Для нее имеем решение:

$k = k_2(t, s_1, s_2) = (s_2 \frac{A}{\lambda} + e^{-h(t-\frac{T}{2})}(k_1(T/2)^{1-\alpha} - s_2 \frac{A}{\lambda}))^{\frac{1}{1-\alpha}}$,

где $k_1(T/2, s_1)^{1-\alpha} = s_1 \frac{A}{h\lambda} N + k_0^{1-\alpha} e^{-h\frac{T}{2}}$

Для функционала благосостояния на $[\frac{T}{2}, T]$ имеем представление:

$$V_2(s_1, s_1) = \frac{A^{1/\alpha}}{h\lambda}(1 - s_2)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(s_2(h\frac{T}{2} - N) + s_1 N + M e^{-h\frac{T}{2}}).$$

Таким образом, на интервале $[0,T]$ функционал благосостояния примет вид:

$$V(s_1, s_2) = \frac{A^{1/\alpha}}{h\lambda}(1 - s_1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(s_1(h\frac{T}{2} - N) + M\right) +$$
$$+ \frac{A^{1/\alpha}}{h\lambda}(1 - s_2)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(s_2(h\frac{T}{2} - N) + s_1 N + M e^{-h\frac{T}{2}}\right).$$

5. Пример

Рассмотрим частный случай: $A = 2.8$, $\lambda = 0.8$, $\alpha = 0.4$, $k_0 = 1$, $T = 10$. Функционал благосостояния сведется к функции:

$4.685(1-s_1)^{1.5}(1.894+10.869s_1)+4.685(1-s_2)^{1.5}(0.171+6.028s_1+10.869s_2)$,
максимум которой достигается при $s_1 = 0.51539$, $s_2 = 0.2190$.

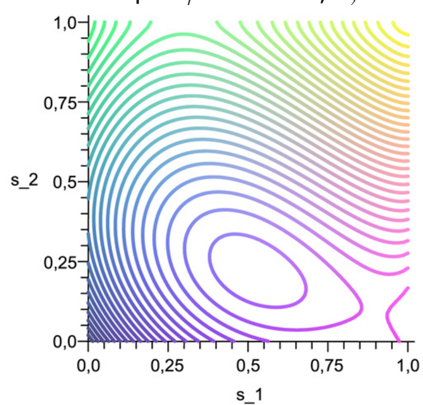

Рис.

Список источников

1. Воркуев, Б.Л. Модели макро- и микроэкономики [текст] / Б.Л. Воркуев. – М.: ТЕИС, 1999. – 235 с.

2. Замков, О.О. Математические методы в экономике [текст] / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных // Учебник МГУ им. М.В. Ломоносова. изд. "ДИС", 1998. – 368 с.

3. Занг, В.–Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории [текст] / В.–Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.

4. Колемаев, В.А. Математическая экономика: учебник для вузов [текст] / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.

5. Митягин, Б.С. Заметки по математической экономике [текст] / Б.С. Митягин // Успехи математических наук. – 1972. – Т 27. – вып. 3. – С. 3 – 19.

6. Пу, Е. Нелинейная экономическая динамика [текст] / Е. Пу. – Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 2000. – 200 с.

OPTIMIZATION OF RELATIONS BETWEEN CONSUMPTION AND INVESTMENTS (IN THE SOLOW'S MODEL)

Dudchak Vladimir Vlasyevich,
Dr. Sc. of Economy, Deputy General Director of JSC "Concern" Sozvezdie"; dudchak@sozvezdie.su
Skaptsov Yuriy Petrovich,
Head of Planning and Economic Department of JSC "Concern" Sozvezdie"; syp@sozvezdie.su
Malikov Aleksandr Arkadyevich,
Head of Economic Service of JSC "Concern" Sozvezdie";
syp@sozvezdie.su

The problem of regulating the economy by choosing the optimal ratio s = s (t) between consumption and investment is considered. Best consumption defines welfare function. The article describes an approach to optimize investments in the case of piecewise constant (relay) function s (t).
Keywords: consumption, investment, functional well-being, optimization.